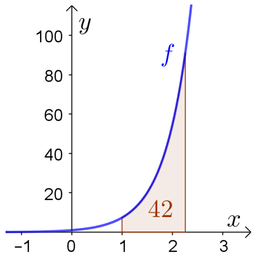
Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{2\cdot x}$ ist rechts dargestellt.



a) Ermittle eine Stammfunktion F von f.

b) Berechne $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x = 42$$

gilt.

Lösung.

a) Aus der Kettenregel folgt: $f'(x) = e^{2\cdot x} \cdot 2$

Zum Ermitteln einer Stammfunktion F von f kehren wir die Kettenregel um:

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2\cdot x}$$

b) Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:

$$\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(1) = \frac{1}{2} \cdot e^{2\cdot b} - \frac{1}{2} \cdot e^2$$

Wir berechnen die Lösung b der folgenden Exponentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot e^{2\cdot b} - \frac{1}{2} \cdot e^2 &= 42 \\
e^{2\cdot b} - e^2 &= 84 \\
e^{2\cdot b} &= 84 + e^2 \\
2 \cdot b &= \ln\left(84 + e^2\right) \\
b &= \frac{\ln\left(84 + e^2\right)}{2} = 2{,}257...
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Für die Funktion f gilt: $f(x) = 4 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + x - 3$

Die Funktion hat eine Nullstelle $x_1 \in \mathbb{Z}$ und zwei Nullstellen $x_2,\, x_3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

a) Begründe, warum jede ganzzahlige Nullstelle von f ein Teiler des konstanten Terms -3 sein muss, und ermittle die Nullstelle x_1.

b) Berechne mithilfe einer Polynomdivision die beiden anderen Nullstellen x_2 und x_3, und zerlege den Funktionsterm in Linearfaktoren:

Lösung.

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

a) Es gilt:

$$f(x) = 0 \iff 4 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + x = 3 \iff x \cdot \underbrace{(4 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 1)}_{\in \mathbb{Z}} = 3$$

Wenn x eine ganzzahlige Nullstelle von f ist, dann muss sie also ein Teiler von 3 sein. Durchprobieren dieser vier Teiler ± 1, ± 3 liefert:

$$f(-1) = -4 + 8 - 1 - 3 = 0 \implies x_1 = -1$$

b) Es gilt also:

$$4 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + x - 3 = 4 \cdot (x+1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \tag{$\star$}$$

Wir dividieren beide Seiten von ($\star$) durch den Linearfaktor $(x+1)$.

Auf der linken Seite erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
\ominus \begin{cases} (4 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + \quad x - 3) : (x+1) = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 \\ \ 4 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 \end{cases} \\
\hline
\qquad \ominus \begin{cases} 4 \cdot x^2 + \quad x - 3 \\ 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x \end{cases} \\
\hline
\qquad\qquad \ominus \begin{cases} -3 \cdot x - 3 \\ -3 \cdot x - 3 \end{cases} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Die rechte Seite von ($\star$) hat nach der Division durch $(x+1)$ noch die Nullstellen x_2 und x_3:

$$4 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = 4 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Also können wir die Nullstellen x_2 und x_3 als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$4 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = 0$$

berechnen:

$$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8} \implies x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{3}{2}$$

Wir zerlegen den Funktionsterm in Linearfaktoren:

$$\implies f(x) = 4 \cdot (x+1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

□

Aufgabe 3. Ein Punkt bewegt sich ausgehend von $A = (2\,\text{m} \mid 1\,\text{m})$ mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung seines Geschwindigkeitsvektors $\overrightarrow{v_A} = \begin{pmatrix} 3\,\text{m/s} \\ 1\,\text{m/s} \end{pmatrix}$.

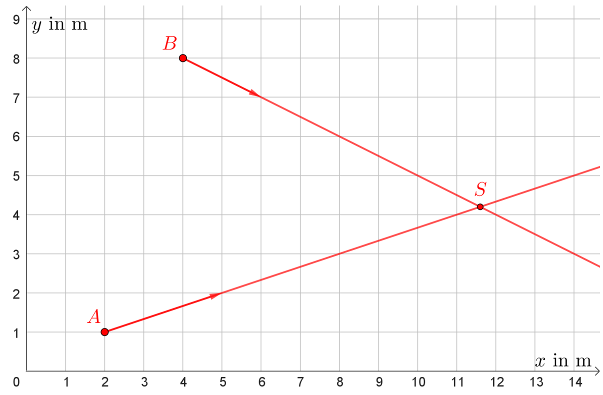
Ein zweiter Punkt bewegt sich ausgehend von $B = (4\,\text{m} \mid 8\,\text{m})$ mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung seines Geschwindigkeitsvektors $\overrightarrow{v_B} = \begin{pmatrix} 2\,\text{m/s} \\ -1\,\text{m/s} \end{pmatrix}$.

a) Konstruiere rechts den Schnittpunkt S der beiden Bewegungsbahnen.

b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S.

Wenn beide Punkte gleichzeitig starten, dann sind sie *nicht* zur gleichen Zeit im Schnittpunkt S.

c) Berechne die Zeitdauer (in Sekunden), um die der zweite Punkt ausgehend von B früher/später starten muss, damit die beiden Punkte zur gleichen Zeit im Schnittpunkt S sind.



Lösung.

a) siehe oben

b) Wir ermitteln jeweils eine Parameterdarstellung der beiden Geraden:

$$a\colon\ X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$b\colon\ X = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Um den Schnittpunkt zu berechnen, setzen wir gleich und lösen das Gleichungssystem in t und s:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I:}\ & 2 + 3 \cdot t = 4 + 2 \cdot s \\ \text{II:}\ & 1 + t = 8 - s \qquad \implies t = 7 - s \end{aligned}$$

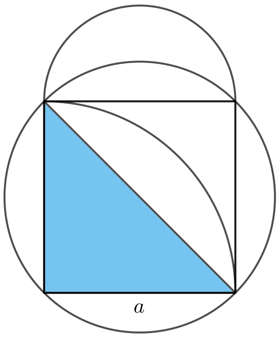
$$\xrightarrow{\text{I}}\ 2 + 3 \cdot (7 - s) = 4 + 2 \cdot s \implies 2 + 21 - 3 \cdot s = 4 + 2 \cdot s \implies s = \frac{19}{5}$$
$$\xrightarrow{\text{II}}\ t = 7 - \frac{19}{5} = \frac{16}{5}$$

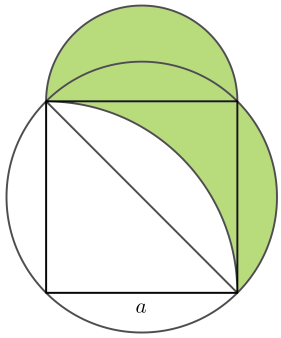
Für den Schnittpunkt S gilt also:

$$S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{16}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/5 \\ 5/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48/5 \\ 16/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58/5 \\ 21/5 \end{pmatrix} = (11{,}6 \mid 4{,}2)$$

c) Wenn beide Punkte gleichzeitig starten, dann sind sie nach $t = \frac{16}{5}$ bzw. $s = \frac{19}{5}$ Sekunden im Schnittpunkt. Der zweite Punkt muss also um $\frac{3}{5} = 0{,}6$ Sekunden früher starten, damit beide Punkte gleichzeitig im Schnittpunkt sind. □

Aufgabe 4. Die blaue Fläche links unten ist ein halbes Quadrat mit Seitenlänge a.
Die grüne Fläche rechts unten wird von einem Halbkreis und zwei Viertelkreisen berandet:



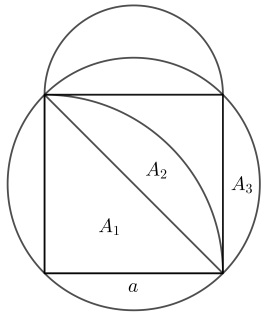


a) Stelle mithilfe von a eine Formel für die rechts eingezeichneten Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 auf.

$A_1 =$

$A_2 =$

$A_3 =$



b) Zeige, dass das Verhältnis der Flächeninhalte der oben eingezeichneten blauen Fläche und der grünen Fläche $2 : 3$ beträgt.

Lösung.

a) Für den Flächeninhalt A_1 (halbes Quadrat mit Seitenlänge a) gilt:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a^2$$

Für den Flächeninhalt A_2 (Viertelkreis mit Radius a − halbes Quadrat mit Seitenlänge a) gilt:

$$A_2 = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2$$

Der Radius r des Umkreises ist die halbe Diagonale des Quadrats, also:

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a$$

Für den Flächeninhalt A_3 (Viertelkreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a$ − Viertelquadrat mit Seitenlänge a) gilt:

$$A_3 = \frac{\pi}{8} \cdot a^2 - \frac{1}{4} \cdot a^2$$

b) Wir setzen die grüne Fläche aus 3 Teilen zusammen:

i) Halbkreis mit Radius $\frac{1}{2} \cdot a$

ii) A_3

iii) (Halbes Quadrat mit Seitenlänge a) $-A_2$

$$\Longrightarrow \text{Grüner Flächeninhalt} = \frac{\pi}{8} \cdot a^2 + \frac{\pi}{8} \cdot a^2 - \frac{1}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 - \frac{\pi}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{3}{4} \cdot a^2$$

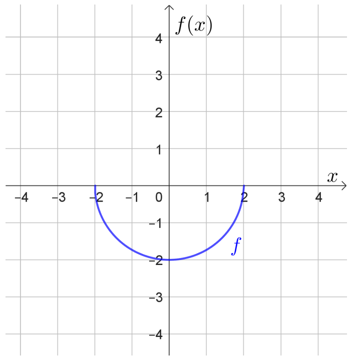
$$\Longrightarrow \frac{\text{Blauer Flächeninhalt}}{\text{Grüner Flächeninhalt}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a^2}{\frac{3}{4} \cdot a^2} = \frac{4}{6} = 2 : 3 \checkmark \qquad \square$$

Aufgabe 5. Für die Funktion f gilt: $f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ mit $r > 0$ und $-r < x < r$

a) Ermittle eine Funktionsgleichung von f'.

Für die Krümmung κ einer zweimal differenzierbaren Funktion f an der Stelle x gilt allgemein:

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$



b) Zeige, dass für diese Funktion f gilt:

$$\left[1 + f'(x)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{r^3}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

c) Zeige, dass für diese Funktion f gilt:

$$f''(x) = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

d) Zeige, dass die Krümmung $\kappa(x)$ für diese Funktion f *nicht* von x abhängt.

e) Skizziere rechts oben den Funktionsgraphen von f, wenn $r = 2$ gilt.

Lösung.

a) Wir ermitteln die 1. Ableitungsfunktion von $f(x) = -(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ mit der Kettenregel:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2 \cdot x) = x \cdot \left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

b) Wir vereinfachen die linke Seite:

$$\left[1 + f'(x)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \left[1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\right]^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\right]^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{r^2}{r^2 - x^2}\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{r^3}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \checkmark$$

c) Wir ermitteln eine Funktionsgleichung von f'' mit der Quotientenregel und der Kettenregel:

$$f''(x) = \frac{1 \cdot (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2 \cdot x)}{r^2 - x^2} =$$

$$= \frac{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2 \cdot (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{r^2 - x^2} \cdot \frac{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{(r^2 - x^2) + x^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \checkmark$$

d) Aus den Ergebnissen von **b)** und **c)** folgt, dass $\kappa(x)$ für diese Funktion f *nicht* von x abhängt:

$$\kappa(x) = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{r^3} = \frac{1}{r}$$

□