## 1. Hinweise

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist gleich viele Punkte wert.
- Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen:

☐ Aufgabe 1 ☐ Aufgabe 2 ☐ Aufgabe 3 ☐ Aufgabe 4 ☐ Aufgabe 5

## 2. Aufgaben

**Aufgabe 1.** Für welche Werte von $k$ hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + (2 \cdot k - 4) \cdot x + 7 - 6 \cdot k = 0$$

**1)** genau eine reelle Lösung? **2)** keine reelle Lösung? **3)** zwei reelle Lösungen?

**Aufgabe 2.** Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{5 \cdot x + 10} = \frac{10}{\sqrt{5 \cdot x + 10}} + 3$$

**Aufgabe 3.** Gegeben ist die Funktion

$$f\colon\ ]0;\infty[\ \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = [\,\ln(x)\,]^2 - 2 \cdot \ln(x) - 3.$$

**a)** Ermittle die Nullstellen von $f$.

**b)** Zeige, dass gilt:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln(x) - 1)$$

Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.

**c)** Argumentiere mit dem Vorzeichen von $f'$, dass $f$ an der Stelle $x_0 = e$ ein globales Minimum hat.

**d)** Zeige ohne Hilfe der Differentialrechnung, dass $f$ an der Stelle $x_0 = e$ ein globales Minimum hat.

**Aufgabe 4.** Welcher Punkt des Graphen der Funktion

$$f\colon\ [0;1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - x^2$$

hat vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand? Wie groß ist dieser kleinste Abstand?

**Aufgabe 5.** Sei $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion so, dass $f'(0) = 0$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt. Beweise mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und sorgfältig dokumentierten Fallunterscheidungen, dass $f$ *streng monoton fallend* ist.