Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

1. Hinweise

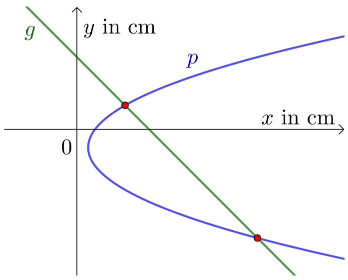
- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
- Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Die Gerade g und die Parabel p mit

$$g\colon\ x + y = 6 \qquad p\colon\ y^2 - 4 \cdot x + 3 \cdot y + 6 = 0 \qquad (x, y \text{ in cm})$$

sind links unten dargestellt.



1) Die Gerade und die Parabel schneiden einander in 2 Punkten.
Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

2) ☆ Die senkrechte Gerade $x = c$ schneidet die Parabel p in 2 Punkten.
Berechne $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Entfernung dieser beiden Schnittpunkte 23 cm beträgt.

Lösung.

1) Die Schnittpunkte sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \text{I}: \quad & x + y = 6 \quad \Longrightarrow \quad y = 6 - x \\ \text{II}: \quad & y^2 - 4 \cdot x + 3 \cdot y + 6 = 0 \end{aligned}$$

Wir setzen in Gleichung II ein und formen um:

$$\begin{aligned} (6 - x)^2 - 4 \cdot x + 3 \cdot (6 - x) + 6 &= 0 \\ 36 - 12 \cdot x + x^2 - 4 \cdot x + 18 - 3 \cdot x + 6 &= 0 \\ \underbrace{x^2 - 19 \cdot x + 60}_{=(x-4)\cdot(x-15)} &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen in I liefert die Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} x_1 = 4 \quad &\Longrightarrow \quad y_1 = 6 - 4 = 2 \quad &\Longrightarrow \quad S_1 = (4 \mid 2) \\ x_2 = 15 \quad &\Longrightarrow \quad y_2 = 6 - 15 = -9 \quad &\Longrightarrow \quad S_2 = (15 \mid -9) \end{aligned}$$

Der Satz von Pythagoras liefert die Entfernung zwischen den beiden Punkten:

$$\sqrt{(15 - 4)^2 + (-9 - 2)^2} = \sqrt{242} = 15{,}55\ldots\,\text{cm}$$

2) Für die y-Koordinaten der beiden Schnittpunkte gilt:

$$y^2 + 3 \cdot y + 6 - 4 \cdot c = 0$$

Aus der kleinen Lösungsformel folgt:

$$y_1 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 6 + 4 \cdot c} \qquad y_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 6 + 4 \cdot c}$$

Für die Entfernung der beiden Schnittpunkte gilt:

$$y_2 - y_1 = 2 \cdot \sqrt{4 \cdot c - \frac{15}{4}}$$

Wir lösen die Wurzelgleichung $y_2 - y_1 = 23$ nach c auf:

$$2 \cdot \sqrt{4 \cdot c - \frac{15}{4}} = 23 \quad \Longrightarrow \quad 16 \cdot c - 15 = 529 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 34$$

Probe: $2 \cdot \sqrt{4 \cdot 34 - \frac{15}{4}} = 23$ ✓

Die Schnittpunkte der Parabel mit der senkrechten Gerade $x = 34$ liegen 23 cm voneinander entfernt.

□

Aufgabe 2. Eine Polynomfunktion f mit Grad 3 hat die folgenden Eigenschaften:

- Der Graph von f enthält den Punkt $(0 \mid 18)$.
- Die Funktion hat die Nullstelle $x = 3$.
- An der Stelle $x = 2$ ändert f das Monotonieverhalten.
- An der Stelle $x = -1$ ändert f das Krümmungsverhalten.

1) Stelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f auf.
2) Ermittle eine Funktionsgleichung von f.

Lösung.

1) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad f(0) = 18 &&\implies d = 18 \\
\text{II}: &\quad f(3) = 0 &&\implies 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = 0 \\
\text{III}: &\quad f'(2) = 0 &&\implies 12 \cdot a + 4 \cdot b + c = 0 \implies c = -12 \cdot a - 4 \cdot b \\
\text{IV}: &\quad f''(-1) = 0 &&\implies -6 \cdot a + 2 \cdot b = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II}^*: &\quad 27 \cdot a + 9 \cdot b - 36 \cdot a - 12 \cdot b + 18 = 0 \implies -9 \cdot a - 3 \cdot b + 18 = 0 \\
\text{IV}: &\quad b = 3 \cdot a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\xRightarrow{\text{II}^*} -9 \cdot a - 9 \cdot a + 18 = 0 \implies a = 1 \\
&\xRightarrow{\text{IV}} b = 3 \cdot a = 3 \\
&\xRightarrow{\text{III}} c = -12 \cdot a - 4 \cdot b = -12 - 12 = -24
\end{aligned}$$

2) $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 18$

□

Aufgabe 3. Für die Funktion f gilt: $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k \neq 0$

1) Stelle mithilfe von k und d eine Formel für $\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$ auf.

2) Stelle mithilfe von k und d eine Formel für $\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x$ auf.

3) Zeige, dass für alle $k, d \in \mathbb{R}$ mit $k \neq 0$ gilt:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 < \int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Lösung.

1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left(k \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + d \cdot x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot k + d$

$$\implies \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot k + d\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot k^2 + d \cdot k + d^2$$

2) $f(x)^2 = (k \cdot x + d)^2 = k^2 \cdot x^2 + 2 \cdot d \cdot k \cdot x + d^2$

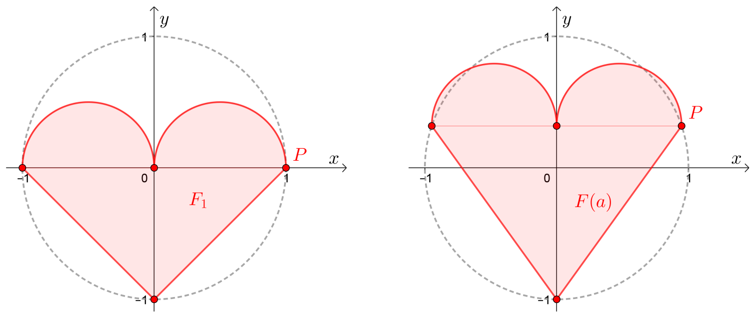
$$\implies \int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3} \cdot k^2 \cdot x^3 + d \cdot k \cdot x^2 + d^2 \cdot x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot k^2 + d \cdot k + d^2$$

3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot k^2 - \frac{1}{4} \cdot k^2 = \frac{1}{12} \cdot k^2 > 0$ für alle $k, d \in \mathbb{R}$ mit $k \neq 0$.

Also gilt $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 < \int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x$ für alle $k, d \in \mathbb{R}$ mit $k \neq 0$.

□

Aufgabe 4. Die unten dargestellten Herzen sind symmetrisch zur y-Achse und bestehen jeweils aus zwei Halbkreisen und einem gleichschenkeligen Dreieck:



1) Berechne den Flächeninhalt F_1 des linken Herzens mit $P = (1 \mid 0)$.

Der Punkt $P = (a \mid b)$ ist beweglich auf dem Einheitskreisbogen im 1. Quadranten.
Der Flächeninhalt F des Herzens hängt dann vom Wert von $a \in [0;1]$ ab.

2) Zeige, dass für den Flächeninhalt des Herzens gilt:

$$F(a) = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 + a + \sqrt{a^2 - a^4}$$

3) Ermittle die Ableitungsfunktion F' mithilfe der Ableitungsregeln.

Die Funktion F' hat genau eine Nullstelle $a^* \in \,]0;1[\,$, nämlich $a^* \approx 0{,}9475$.

4) Berechne, um wie viel Prozent der Inhalt des flächengrößten Herzens größer als F_1 ist.

Lösung.

1) $F_1 = 1 + \frac{\pi}{4}$

2) Die beiden Halbkreise haben den Durchmesser a.
Gemeinsam haben sie also den Flächeninhalt $\frac{\pi}{4} \cdot a^2$.

Das gleichschenkelige Dreieck hat die Basis $2 \cdot a$ und die zugehörige Höhe $(1 + b)$.
Das gleichschenkelige Dreieck hat also den Flächeninhalt $a \cdot (1 + b)$.

Aus dem Satz von Pythagoras folgt $a^2 + b^2 = 1^2$.
Da der Punkt P auf dem Einheitskreisbogen im 1. Quadranten liegt, folgt daraus $b = \sqrt{1 - a^2}$.

Für den Flächeninhalt des Herzens gilt damit:

$$F(a) = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 + a \cdot (1 + \sqrt{1 - a^2}) = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 + a + \sqrt{a^2 - a^4}$$

3) Aus $F(a) = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 + a + (a^2 - a^4)^{\frac{1}{2}}$ und der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} F'(a) &= \frac{\pi}{2} \cdot a + 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 - a^4\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot a - 4 \cdot a^3) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot a + 1 + \frac{2 \cdot a \cdot (1 - 2 \cdot a^2)}{2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot (1 - a^2)}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot a + 1 + \frac{1 - 2 \cdot a^2}{\sqrt{1 - a^2}} \end{aligned}$$

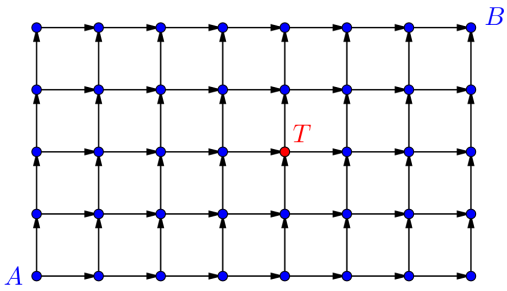
4) Es gilt:

$$F(0) = 0$$
$$F(1) = F_1 = 1{,}785...$$
$$F(a^*) \approx 1{,}955$$
$$\implies \frac{F(a^*)}{F_1} \approx 1{,}0953$$

Das flächengrößte Herz ist also rund 9,53 % größer als F_1.

□

Aufgabe 5. Jonas steht im Punkt A und möchte entlang der Pfeile zum Punkt B kommen.



1) Wie viele mögliche Wege von A nach B hat Jonas?

2) Wie viele mögliche Wege von A nach B hat Jonas, wenn der eingezeichnete Punkt T *nicht* am Weg liegen darf?

Lösung.

1) Jeder Weg von A nach B besteht aus einer Abfolge von 7 Schritten nach rechts und 4 Schritten nach oben in beliebiger Reihenfolge. Zum Beispiel:

$$(\rightarrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \rightarrow)$$

Jeder Weg von A nach B entspricht umkehrbar eindeutig einer Anordnung dieser 11 Pfeile. Für die gesuchte Anzahl gilt also:

$$\frac{11!}{4! \cdot 7!} = \binom{11}{4} = 330$$

2) Wir zählen zunächst umgekehrt die Anzahl der Wege von A nach B, bei denen T am Weg liegt: Jeder Weg von A nach B, bei dem T auf dem Weg liegt, setzt sich aus zwei voneinander unabhängigen Teilwegen $A \to T$ und $T \to B$ zusammen.
Anzahl Wege $A \to T$: $\binom{6}{2} = 15$
Anzahl Wege $T \to B$: $\binom{5}{2} = 10$
Anzahl Wege $A \to T \to B$: $15 \cdot 10 = 150$

Von den insgesamt 330 Wegen von A nach B liegt also bei 150 Wegen der Punkt T am Weg. Also gibt es $330 - 150 = 180$ Wege von A nach B, bei denen der Punkt T *nicht* am Weg liegt.

$\square$