

Name: _____

Matrikelnummer: _____

1. HINWEISE

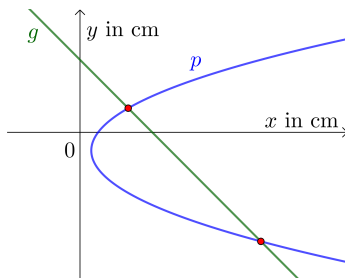
- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller vorhergegangenen Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. AUFGABEN

Aufgabe 1. Die Gerade g und die Parabel p mit

$$g: x + y = 6 \quad p: y^2 - 4 \cdot x + 3 \cdot y + 6 = 0 \quad (x, y \text{ in cm})$$

sind links unten dargestellt.



- 1) Die Gerade und die Parabel schneiden einander in 2 Punkten.
Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

- 2) ★ Die senkrechte Gerade $x = c$ schneidet die Parabel p in 2 Punkten.

Berechne $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Entfernung dieser beiden Schnittpunkte 23 cm beträgt.

Aufgabe 2. Eine Polynomfunktion f mit Grad 3 hat die folgenden Eigenschaften:

- Der Graph von f enthält den Punkt $(0 \mid 18)$.
- Die Funktion hat die Nullstelle $x = 3$.
- An der Stelle $x = 2$ ändert f das Monotonieverhalten.
- An der Stelle $x = -1$ ändert f das Krümmungsverhalten.

- 1) Stelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f auf.
- 2) Ermittle eine Funktionsgleichung von f .

Aufgabe 3. Für die Funktion f gilt: $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k \neq 0$

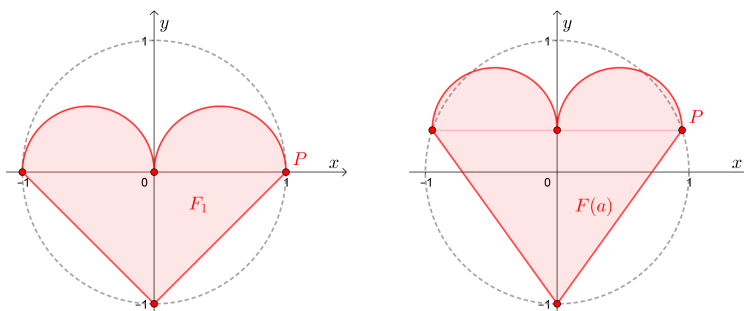
1) Stelle mithilfe von k und d eine Formel für $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2$ auf.

2) Stelle mithilfe von k und d eine Formel für $\int_0^1 f(x)^2 dx$ auf.

3) Zeige, dass für alle $k, d \in \mathbb{R}$ mit $k \neq 0$ gilt:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 < \int_0^1 f(x)^2 dx$$

Aufgabe 4. Die unten dargestellten Herzen sind symmetrisch zur y -Achse und bestehen jeweils aus zwei Halbkreisen und einem gleichschenkeligen Dreieck:



1) Berechne den Flächeninhalt F_1 des linken Herzens mit $P = (1 | 0)$.

Der Punkt $P = (a | b)$ ist beweglich auf dem Einheitskreisbogen im 1. Quadranten. Der Flächeninhalt F des Herzens hängt dann vom Wert von $a \in [0; 1]$ ab.

2) Zeige, dass für den Flächeninhalt des Herzens gilt:

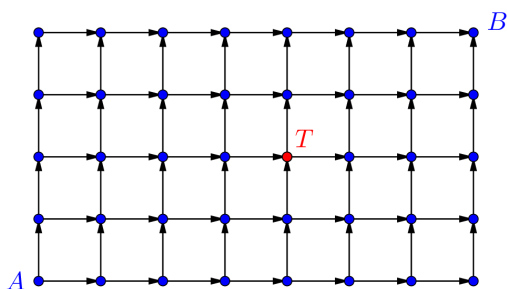
$$F(a) = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 + a + \sqrt{a^2 - a^4}$$

3) Ermittle die Ableitungsfunktion F' mithilfe der Ableitungsregeln.

Die Funktion F' hat genau eine Nullstelle $a^* \in]0; 1[$, nämlich $a^* \approx 0,9475$.

4) Berechne, um wie viel Prozent der Inhalt des flächengrößten Herzens größer als F_1 ist.

Aufgabe 5. Jonas steht im Punkt A und möchte entlang der Pfeile zum Punkt B kommen.



- 1) Wie viele mögliche Wege von A nach B hat Jonas?
- 2) Wie viele mögliche Wege von A nach B hat Jonas, wenn der eingezeichnete Punkt T *nicht* am Weg liegen darf?