Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

1. Hinweise

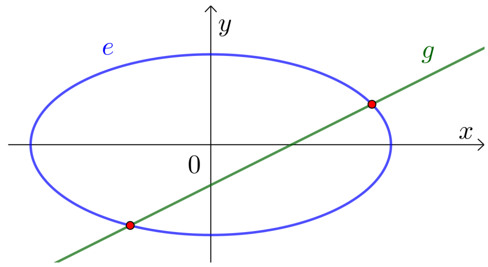
– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Die Gerade g und die Ellipse e mit

$$g\colon\ -x + 2 \cdot y = -2 \qquad\qquad e\colon\ x^2 + 4 \cdot y^2 = 20$$

schneiden einander in 2 Punkten:



Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

Lösung. Die Schnittpunkte sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}:&\quad -x + 2 \cdot y = -2 \qquad \Longrightarrow x = 2 \cdot y + 2 \\ \mathrm{II}:&\quad x^2 + 4 \cdot y^2 = 20 \end{aligned}$$

Wir setzen in Gleichung II ein und formen um:

$$\begin{aligned} (2 \cdot y + 2)^2 + 4 \cdot y^2 &= 20 \\ 4 \cdot y^2 + 8 \cdot y + 4 + 4 \cdot y^2 &= 20 \\ 8 \cdot y^2 + 8 \cdot y - 16 &= 0 \\ \underbrace{y^2 + y - 2}_{=(y+2)\cdot(y-1)} &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen in I liefert die Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2 &&\Longrightarrow && x_1 = 2 \cdot (-2) + 2 = -2 &&\Longrightarrow && S_1 = (-2 \mid -2) \\ y_2 &= 1 &&\Longrightarrow && x_2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4 &&\Longrightarrow && S_2 = (4 \mid 1) \end{aligned}$$

Der Satz von Pythagoras liefert die Entfernung zwischen den beiden Punkten:

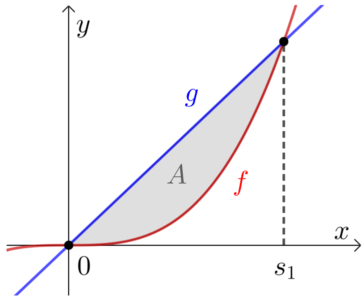
$$\sqrt{(4 - (-2))^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{45} = 6{,}708...$$

$\square$

Aufgabe 2. Für die Funktionen f bzw. g gilt:

$$f(x) = x^3 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = k \cdot x \quad \text{mit } k > 0$$

Die Graphen der beiden Funktionen sind rechts dargestellt.



1) Stelle mithilfe von k eine Formel für die Schnittstelle s_1 auf.

Für den markierten Flächeninhalt gilt: $A = 36$

2) Ermittle k.

Lösung.

1) Die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$:

$$x^3 = k \cdot x \iff x^3 - k \cdot x = 0 \iff x \cdot (x^2 - k) = 0$$

Die 3 Schnittstellen sind also 0, $\sqrt{k}$ und $-\sqrt{k}$. Aus $s_1 > 0$ folgt $s_1 = \sqrt{k}$.

2) Für den markierten Flächeninhalt A gilt:

$$A = \int_0^{\sqrt{k}} [g(x) - f(x)] \, \mathrm{d}x = \left[\frac{k}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot x^4\right] \Big|_0^{\sqrt{k}} = \frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{4}$$

$$\implies \frac{k^2}{4} = 36 \implies k^2 = 144 \overset{k>0}{\implies} k = 12$$

□

Aufgabe 3. Für die Funktion f gilt: $f(x) = a \cdot e^{2 \cdot x} - b \cdot e^x + c$

1) Ermittle die Ableitungsfunktionen f' und f''.

Die Koeffizienten a und b haben das gleiche Vorzeichen.

2) Stelle mithilfe von a und b eine Formel für die Nullstelle x_1 von f' auf.
3) Stelle mithilfe von a und b eine Formel für die Nullstelle x_2 von f'' auf.
4) Begründe, warum die Differenz $x_1 - x_2$ von *keinem* der Koeffizienten a, b bzw. c abhängt.

Lösung.

1) Wir ermitteln die Ableitungsfunktionen mithilfe der Kettenregel:

$$f'(x) = 2 \cdot a \cdot e^{2 \cdot x} - b \cdot e^x$$

$$f''(x) = 4 \cdot a \cdot e^{2 \cdot x} - b \cdot e^x$$

2) Wir ermitteln die Nullstelle von f' mit dem Produkt-Null-Satz:

$$f'(x) = 0 \iff \underbrace{e^x}_{>0} \cdot (2 \cdot a \cdot e^x - b) = 0 \iff 2 \cdot a \cdot e^x = b \iff x = \ln\left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)$$

$$\implies x_1 = \ln\left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)$$

3) Wir ermitteln die Nullstelle von f'' mit dem Produkt-Null-Satz:

$$f''(x) = 0 \iff \underbrace{e^x}_{>0} \cdot (4 \cdot a \cdot e^x - b) = 0 \iff 4 \cdot a \cdot e^x = b \iff x = \ln\left(\frac{b}{4 \cdot a}\right)$$

$$\implies x_2 = \ln\left(\frac{b}{4 \cdot a}\right)$$

4) Wir vereinfachen $x_1 - x_2$ mit den Rechenregeln für Logarithmen:

$$x_1 - x_2 = \ln\left(\frac{b}{2 \cdot a}\right) - \ln\left(\frac{b}{4 \cdot a}\right) = \ln\left(\frac{b}{2 \cdot a} : \frac{b}{4 \cdot a}\right) = \ln\left(\frac{b}{2 \cdot a} \cdot \frac{4 \cdot a}{b}\right) = \ln(2)$$

Die Differenz $x_1 - x_2$ ist also konstant $\ln(2) = 0{,}693\ldots$.

$\square$

Aufgabe 4. Felix schneidet Geraden im $\mathbb{R}^3$ in Parameterdarstellung mit einer Ebene.
Dabei tritt das folgende Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad x = -4 - 2 \cdot t \\
\text{II}: &\quad y = 6 + t \\
\text{III}: &\quad z = a + b \cdot t \\
\text{IV}: &\quad 4 \cdot x - 5 \cdot y - 3 \cdot z = -1
\end{aligned}$$

a) Wenn $a = 4$ und $b = 2$ gilt, dann schneidet die Gerade die Ebene in einem Punkt $S = (x \mid y \mid z)$. Löse das Gleichungssystem, um diesen Schnittpunkt zu ermitteln.

b) Wenn das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, ist die Gerade in der Ebene enthalten. Berechne a und b so, dass die Gerade in der Ebene enthalten ist.

Lösung.

a) Wir setzen $x = -4 - 2 \cdot t$, $y = 6 + t$ und $z = 4 + 2 \cdot t$ in Gleichung IV ein:

$$\begin{aligned}
4 \cdot (-4 - 2 \cdot t) - 5 \cdot (6 + t) - 3 \cdot (4 + 2 \cdot t) &= -1 \\
-16 - 8 \cdot t - 30 - 5 \cdot t - 12 - 6 \cdot t &= -1 \\
-19 \cdot t &= 57 \\
t &= -3
\end{aligned}$$

Wir setzen $t = -3$ in die Gleichungen I, II und III ein, um den Schnittpunkt S zu berechnen:

$$S = (-4 - 2 \cdot (-3) \mid 6 + (-3) \mid 4 + 2 \cdot (-3)) = (2 \mid 3 \mid -2)$$

b) *Lösung ohne Vektorrechnung*

Wir setzen $x = -4 - 2 \cdot t$, $y = 6 + t$ und $z = a + b \cdot t$ in Gleichung IV ein:

$$\begin{aligned}
4 \cdot (-4 - 2 \cdot t) - 5 \cdot (6 + t) - 3 \cdot (a + b \cdot t) &= -1 \\
-16 - 8 \cdot t - 30 - 5 \cdot t - 3 \cdot a - 3 \cdot b \cdot t &= -1 \\
(-13 - 3 \cdot b) \cdot t &= 45 + 3 \cdot a \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Wenn $-13 - 3 \cdot b \neq 0$ gilt, dann hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.
Also muss $-13 - 3 \cdot b = 0$ bzw. $\boldsymbol{b = -\frac{13}{3}}$ gelten.
Wenn auch $45 + 3 \cdot a = 0$ bzw. $\boldsymbol{a = -15}$ gilt, dann ist $(\star)$ die wahre Aussage $0 = 0$.
In diesem Fall liefert jeder Wert $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung des Gleichungssystems:

$$(x \mid y \mid z) = (-4 - 2 \cdot t \mid 6 + t \mid -15 - \tfrac{13}{3} \cdot t) \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

Lösung mit Vektorrechnung

Das Lösen dieses Gleichungssystems ist geometrisch gleichbedeutend mit dem Schneiden einer Gerade g in Parameterdarstellung mit einer Ebene ε:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2\cdot t \\ 6+t \\ a+b\cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \qquad \varepsilon\colon 4\cdot x - 5\cdot y - 3\cdot z = -1$$

Ein Normalvektor der Ebene ε ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Damit die Gerade in der Ebene enthalten sein kann, muss der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ der Gerade im rechten Winkel auf $\vec{n}$ stehen, also:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff -8 - 5 - 3\cdot b = 0 \iff \boldsymbol{b = -\frac{13}{3}}$$

Die Gerade ist in diesem Fall genau dann in der Ebene enthalten, wenn der Punkt $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ a \end{pmatrix}$ nicht nur auf der Gerade, sondern auch in der Ebene liegt, also:

$$4\cdot(-4) - 5\cdot 6 - 3\cdot a = -1 \iff \boldsymbol{a = 15}$$

□

Aufgabe 5. Ein D6 ist ein fairer Spielwürfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6.

a) Du würfelst mit einem D6 so oft, bis du eine *beliebige* Augenzahl zum 5. Mal gewürfelt hast.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du dafür insgesamt nur 5 Würfe benötigst.
Gib die Wahrscheinlichkeit auch als Verhältnis „1 zu ...“ an.

b) Du würfelst mit einem D6 so oft, bis du eine *beliebige* Augenzahl zum n. Mal gewürfelt hast.
Die Wahrscheinlichkeit, dass du dafür insgesamt nur n Würfe benötigst, ist p_n.
Berechne die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$, für die $p_n < \frac{1}{10^9}$ gilt.

c) ☆ Du würfelst mit einem D6 so oft, bis du eine *beliebige* Augenzahl zum 5. Mal gewürfelt hast.
Wie oft musst du dafür höchstens würfeln?
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt.
Gib die Wahrscheinlichkeit auch als Verhältnis „1 zu ...“ an.

Lösung.

a) Da der Würfel fair ist, gilt:

$$P(⚀ \to ⚀ \to ⚀ \to ⚀ \to ⚀) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

Die anderen 5 Abläufe mit gleichen Augenzahlen

⚁ → ⚁ → ⚁ → ⚁ → ⚁ / ⚂ → ⚂ → ⚂ → ⚂ → ⚂ / ... / ⚅ → ⚅ → ⚅ → ⚅ → ⚅

haben jeweils auch die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^5$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt also:

$$6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0{,}000\,771... = 1 : 1296$$

b) Wir stellen mit der gleichen Begründung wie in **a)** eine Formel für p_n auf:

$$p_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Wir lösen die Ungleichung $p_n < \frac{1}{10^9}$:

$$6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n < \frac{1}{10^9} \iff \left(\frac{1}{6}\right)^n < \frac{1}{6 \cdot 10^9} \iff n \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}_{<0} < \ln\left(\frac{1}{6 \cdot 10^9}\right) \iff n > \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{1}{6 \cdot 10^9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}}_{12{,}5...}$$

Es ist also $n = 13$ die kleinste natürliche Zahl mit $p_n < \frac{1}{10^9}$.

c) Um die maximale Anzahl an Würfen zu erreichen, muss zunächst jede der 6 Augenzahlen 4 Mal gewürfelt werden. Beim 25. Wurf wird dann jedenfalls die erste Augenzahl zum 5. Mal gewürfelt. Da der Würfel fair ist, hat jede der 6^{24} möglichen Abfolgen von 24 Würfen die gleiche Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6^{24}}$. Davon sind jene Abfolgen günstig, die jede der 6 Augenzahlen genau 4 Mal enthalten. Für deren Anzahl gilt:

$$\frac{24!}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!} = \frac{24!}{(4!)^6} \qquad \text{(Permutationen mit Wiederholung)}$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt also:

$$\frac{24!}{(4!)^6} \cdot p = 0{,}000\,685... \approx 1 : 1459$$

□