

Name: _____

Matrikelnummer: _____

1. HINWEISE

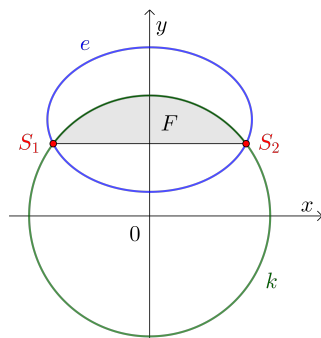
- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller vorhergegangenen Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. AUFGABEN

Aufgabe 1. Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge \mathbb{R} .

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} - \sqrt{2 \cdot x + 21} = 0$$

Aufgabe 2. Der Kreis k und die Ellipse e mit



$$k: x^2 + y^2 = 25$$

$$e: x^2 + 2 \cdot (y - 4)^2 = 18$$

schneiden einander in 2 Punkten.

- 1) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2 .
- 2) Berechne den Inhalt F der grau markierten Fläche.

Aufgabe 3. Für die Funktion f gilt: $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

- 1) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass $f'(x) = \tan^2(x) + 1$ gilt.
- 2) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass $f''(x) = 2 \cdot \tan^3(x) + 2 \cdot \tan(x)$ gilt.
- 3) Ermittle reelle Zahlen a , b und c so, dass $f'''(x) = a \cdot \tan^4(x) + b \cdot \tan^2(x) + c$ gilt.
- 4) ★ Für die 42. Ableitung von f gilt:

$$f^{(42)}(x) = k_{43} \cdot \tan^{43}(x) + k_{41} \cdot \tan^{41}(x) + k_{39} \cdot \tan^{39}(x) + \dots + k_1 \cdot \tan^1(x) \quad \text{mit } k_i \in \mathbb{R}$$

Ermittle den Koeffizienten k_{43} .

Aufgabe 4. Für die Funktion G gilt: $G(x) = x \cdot \ln(x) - x$

1) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass $G'(x) = \ln(x)$ gilt.

Für die Funktion f gilt: $f(x) = e^{-x^2}$

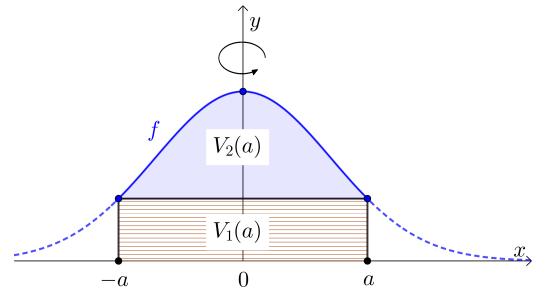
Der Teil des Funktionsgraphen von f mit $-a \leq x \leq a$ sowie die im Bild unten senkrecht eingezeichneten Strecken mit $x = \pm a$ rotieren um die y -Achse.

2) Stelle mithilfe von $a > 0$ eine Formel für das markierte Rotationsvolumen $V_1(a)$ auf.

3) Stelle mithilfe von $a > 0$ eine Formel für das markierte Rotationsvolumen $V_2(a)$ auf.

4) Vereinfache $V(a) = V_1(a) + V_2(a)$ so weit wie möglich.

5) Ermittle den Grenzwert $V = \lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$.



Aufgabe 5. Beim Glücksspiel „Lotto 6 aus 45“ gibt es 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 nummeriert sind.

Mit einem Lotto-Tipp entscheidet man sich für 6 von diesen 45 Zahlen. Zum Beispiel: {3, 6, 23, 26, 37, 42}

Bei einer Lotto-Ziehung werden 6 der 45 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und aufsteigend sortiert. Stimmen die Zahlen auf den 6 gezogenen Kugeln mit den 6 getippten Zahlen überein, gewinnt man den Hauptpreis.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem Lotto-Tipp den Hauptpreis gewinnt. Gib die Wahrscheinlichkeit als Verhältnis „1 zu ...“ an.

Das Glücksspiel „Lotto 2 aus n “ läuft nach dem gleichen Prinzip ab. Man gewinnt den Hauptpreis, wenn die beiden Zahlen auf den gezogenen Kugeln mit den beiden getippten Zahlen übereinstimmen.

2) Berechne die kleinste natürliche Zahl $n \geq 2$, bei der die Wahrscheinlichkeit für den Hauptpreis in „Lotto 2 aus n “ kleiner als für den Hauptpreis in „Lotto 6 aus 45“ ist.