

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

## 1. HINWEISE

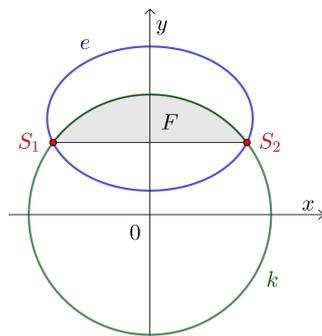
- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller vorhergegangenen Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

## 2. AUFGABEN

**Aufgabe 1.** Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} - \sqrt{2 \cdot x + 21} = 0$$

**Aufgabe 2.** Der Kreis  $k$  und die Ellipse  $e$  mit



$$k: x^2 + y^2 = 25$$

$$e: x^2 + 2 \cdot (y - 4)^2 = 18$$

schneiden einander in 2 Punkten.

- 1) Berechne die Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$ .
- 2) Berechne den Inhalt  $F$  der grau markierten Fläche.

**Aufgabe 3.** Für die Funktion  $f$  gilt:  $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

- 1) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass  $f'(x) = \tan^2(x) + 1$  gilt.
- 2) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass  $f''(x) = 2 \cdot \tan^3(x) + 2 \cdot \tan(x)$  gilt.
- 3) Ermittle reelle Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  so, dass  $f'''(x) = a \cdot \tan^4(x) + b \cdot \tan^2(x) + c$  gilt.
- 4) ★ Für die 42. Ableitung von  $f$  gilt:

$$f^{(42)}(x) = k_{43} \cdot \tan^{43}(x) + k_{41} \cdot \tan^{41}(x) + k_{39} \cdot \tan^{39}(x) + \dots + k_1 \cdot \tan^1(x) \quad \text{mit } k_i \in \mathbb{R}$$

Ermittle den Koeffizienten  $k_{43}$ .

**Aufgabe 4.** Für die Funktion  $G$  gilt:  $G(x) = x \cdot \ln(x) - x$

1) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass  $G'(x) = \ln(x)$  gilt.

Für die Funktion  $f$  gilt:  $f(x) = e^{-x^2}$

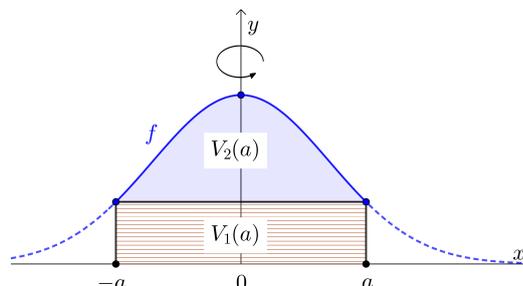
Der Teil des Funktionsgraphen von  $f$  mit  $-a \leq x \leq a$  sowie die im Bild unten senkrecht eingezeichneten Strecken mit  $x = \pm a$  rotieren um die  $y$ -Achse.

2) Stelle mithilfe von  $a > 0$  eine Formel für das markierte Rotationsvolumen  $V_1(a)$  auf.

3) Stelle mithilfe von  $a > 0$  eine Formel für das markierte Rotationsvolumen  $V_2(a)$  auf.

4) Vereinfache  $V(a) = V_1(a) + V_2(a)$  so weit wie möglich.

5) Ermittle den Grenzwert  $V = \lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ .



**Aufgabe 5.** Beim Glücksspiel „Lotto 6 aus 45“ gibt es 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 nummeriert sind.

Mit einem Lotto-Tipp entscheidet man sich für 6 von diesen 45 Zahlen. Zum Beispiel: {3, 6, 23, 26, 37, 42}

Bei einer Lotto-Ziehung werden 6 der 45 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und aufsteigend sortiert. Stimmen die Zahlen auf den 6 gezogenen Kugeln mit den 6 getippten Zahlen überein, gewinnt man den Hauptpreis.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem Lotto-Tipp den Hauptpreis gewinnt. Gib die Wahrscheinlichkeit als Verhältnis „1 zu ...“ an.

Das Glücksspiel „Lotto 2 aus  $n$ “ läuft nach dem gleichen Prinzip ab. Man gewinnt den Hauptpreis, wenn die beiden Zahlen auf den gezogenen Kugeln mit den beiden getippten Zahlen übereinstimmen.

2) Berechne die kleinste natürliche Zahl  $n \geq 2$ , bei der die Wahrscheinlichkeit für den Hauptpreis in „Lotto 2 aus  $n$ “ kleiner als für den Hauptpreis in „Lotto 6 aus 45“ ist.