Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.

– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.

– Arbeitszeit: 90 Minuten

– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).

– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.

– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Es gibt zwei Werte für den Parameter $a \in \mathbb{R}$, sodass die Gleichung

$$\sqrt{a \cdot x} = 3 \cdot x + 2$$

genau eine Lösung x über der Grundmenge $\mathbb{R}$ hat.

a) Berechne diese beiden Werte für den Parameter a.

b) Berechne für diese beiden Parameterwerte die jeweils eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

a) Wir quadrieren die Gleichung und erhalten eine quadratische Gleichung in x:

$$\begin{aligned} \implies \quad & a \cdot x = 9 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 4 \\ \iff \quad & 0 = 9 \cdot x^2 + (12 - a) \cdot x + 4 \end{aligned}$$

Damit die quadratische Gleichung genau eine Lösung hat, muss die Diskriminante aus der großen Lösungsformel gleich 0 sein:

$$\begin{aligned} & (12 - a)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0 \\ \iff \quad & (12 - a)^2 = 144 \\ \iff \quad & 12 - a = \pm 12 \\ \iff \quad & a = 12 \pm 12 \qquad \implies a = 0 \quad \text{oder} \quad a = 24 \end{aligned}$$

Damit die ursprüngliche Gleichung genau eine Lösung haben kann, muss also entweder $a = 0$ oder $a = 24$ gelten.

b) Wenn $a = 0$ gilt, dann hat die ursprüngliche Gleichung

$$\sqrt{0} = 3 \cdot x + 2$$

genau eine Lösung, nämlich $x = -\frac{2}{3}$.
Wenn $a = 24$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung

$$0 = 9 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 4$$

genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{2}{3}$.

Wir führen die Probe durch:

Linke Seite: $\sqrt{24 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{16} = 4$ Rechte Seite: $3 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 4$ ✓ □

Aufgabe 2. Für die Funktionen sinh (Sinus Hyperbolicus) bzw. g gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \frac{e^x}{2}$$

a) Trage einen richtigen Term in das Kästchen ein und begründe, warum die Funktion sinh nur eine einzige Nullstelle hat.

$$\sinh(x) = \frac{e^x \cdot \left(\boxed{} \right)}{2}$$

b) Ermittle das asymptotische Verhalten von $x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{g(x)}$, also folgenden Grenzwert: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{g(x)}$

c) Ermittle jene Stammfunktion F von sinh, die $F(0) = 1$ erfüllt.

d) Berechne $\displaystyle\int_0^1 \sinh(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung

a) Aus

$$\sinh(x) = \frac{e^x \cdot (1 - e^{-2\cdot x})}{2}$$

und dem Produkt-Null-Satz folgt:

$$\sinh(x) = 0 \iff \underbrace{e^x}_{>0} \cdot \left(1 - e^{-2\cdot x}\right) = 0 \iff 1 - e^{-2\cdot x} = 0 \iff -2\cdot x = 0$$

$$\iff x = 0$$

b) Aus

$$\frac{\sinh(x)}{g(x)} = \frac{e^x \cdot (1 - e^{-2\cdot x})}{2} \cdot \frac{2}{e^x} = 1 - \underbrace{e^{-2\cdot x}}_{\to 0}$$

folgt, dass $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{g(x)} = 1.$

$\sinh(x)$ wächst also „gleich schnell“ gegen unendlich wie $\frac{e^x}{2}$.

c) Aus dem Umkehren der Kettenregel folgt, dass die Funktion F mit

$$F(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von sinh ist.
Damit $F(0) = 1$ gilt, muss $\frac{1+1}{2} + c = 1$ gelten, also $c = 0$. Es folgt:

$$F(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Diese Stammfunktion heißt auch cosh (Cosinus Hyperbolicus).

d) Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:

$$\int_0^1 \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\Bigg|_0^1 = \frac{e + e^{-1}}{2} - 1 = 0{,}543\ldots \qquad \square$$

Aufgabe 3. Für die Geraden g und h_a im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

$$h_a\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

a) Begründe, warum es keinen Wert $a \in \mathbb{R}$ gibt, für den die beiden Geraden g und h_a parallel sind.

b) Berechne jenen Wert $a \in \mathbb{R}$, für den die Geraden g und h_a einander in genau einem Punkt P schneiden, und berechne diesen Schnittpunkt P.

Lösung

a) Damit die angegebenen Richtungsvektoren der beiden Vektoren parallel sind, müsste

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

für eine bestimmte Zahl $k \in \mathbb{R}$ gelten.
Aus der ersten Komponente folgt, dass diese Zahl $k = \frac{1}{2}$ sein müsste.
Aus der zweiten Komponente folgt aber gleichzeitig, dass diese Zahl $k = 3$ sein müsste.
Also können die beiden Geraden nicht parallel sein.

b) Um den Schnittpunkt zu berechnen, setzten wir die Parameterdarstellungen gleich und lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I}: \quad & 2 - t = -5 - 2 \cdot s \qquad \implies t = 7 + 2 \cdot s \\ \text{II}: \quad & -5 + 3 \cdot t = 6 + s \\ \text{III}: \quad & 3 - 2 \cdot t = 5 + a \cdot s \end{aligned}$$

$$\overset{\text{II}}{\implies} \quad -5 + 3 \cdot (7 + 2 \cdot s) = 6 + s \implies 21 + 6 \cdot s = 11 + s \implies 5 \cdot s = -10 \implies s = -2$$

$$\overset{\text{I}}{\implies} \quad t = 7 + 2 \cdot (-2) = 3$$

$$\overset{\text{III}}{\implies} \quad 3 - 2 \cdot 3 = 5 - 2 \cdot a \implies a = 4$$

Für den Schnittpunkt P der beiden Geraden gilt also:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = (-1 \mid 4 \mid -3)$$

□

Aufgabe 4. Ein Online-Casino hat das folgende Angebot:

„Kaufe Spiel-Jetons im Wert von 100 € und bezahle nur 85 €!“

Bevor die Spiel-Jetons wieder zurück in Geld umgewandelt werden dürfen, müssen sie mindestens einmal bei einem Glücksspiel eingesetzt werden. Beim Glücksspiel Roulette tritt genau eines von 3 möglichen Farbergebnissen ein:

i) Farbe Rot (Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$): Setzt man Spiel-Jetons auf die Farbe Rot, erhält man beim Ergebnis „Rot“ den doppelten Einsatz als Spiel-Jetons zurück.

ii) Farbe Schwarz (Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$): Setzt man Spiel-Jetons auf die Farbe Schwarz, erhält man beim Ergebnis „Schwarz“ den doppelten Einsatz als Spiel-Jetons zurück.

iii) Farbe Grün (Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{37}$): Setzt man Spiel-Jetons auf die Farbe Grün, erhält man beim Ergebnis „Grün“ den 36-fachen Einsatz als Spiel-Jetons zurück.

Sophia kauft Spiel-Jetons im Wert von 100 € und bezahlt dafür 85 €.
Sophia setzt bei einem einzigen Roulette-Spiel alle Spiel-Jetons auf die Farbe Grün.
Die Zufallsvariable X gibt Sophias Gewinn (nach Abzug der bezahlten 85 €) an.

a) Berechne den Erwartungswert von X.

Till kauft Spiel-Jetons im Wert von 100 € und bezahlt dafür 85 €.
Till möchte bei einem einzigen Roulette-Spiel alle Spiel-Jetons so auf die Farben Rot, Schwarz und Grün aufteilen, dass er danach *sicher* Spiel-Jetons im Wert von A € hat. Dafür setzt er jeweils Spiel-Jetons im Wert von r € auf Rot, s € auf Schwarz und g € auf Grün.

b) Stelle ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung von r, s und g auf.

c) Löse das Gleichungssystem und berechne Tills sicheren Gewinn (nach Abzug der bezahlten 85 €).

Lösung

a) Für die Zufallsvariable X und ihren Erwartungswert $E(X)$ gilt:

Farbe	Rot	Schwarz	Grün
x_i	-85 €	-85 €	3515 €
$P(X = x_i)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{18}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$\implies E(X) = -85 \text{ €} \cdot \frac{18}{37} \cdot 2 + 3515 \text{ €} \cdot \frac{1}{37} = 12{,}29... \text{ €}$$

b) Damit Till bei diesem Roulette-Spiel unabhängig vom Farbergebnis Spiel-Jetons im Wert von A € erhält, müssen die folgenden Gleichungen alle erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \text{I}: &\quad 2 \cdot r = A \\ \text{II}: &\quad 2 \cdot s = A \\ \text{III}: &\quad 36 \cdot g = A \\ \text{IV}: &\quad r + s + g = 100 \end{aligned}$$

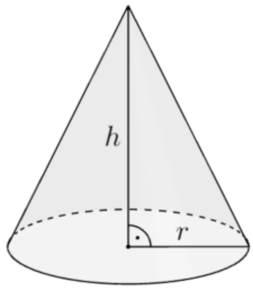
c) Wir lösen das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren:

$$\overset{\text{IV}}{\implies} \frac{A}{2} + \frac{A}{2} + \frac{A}{36} = 100 \implies \frac{37 \cdot A}{36} = 100 \implies A = \frac{100 \cdot 36}{37} = 97{,}29... \text{ €}$$

Tills sicherer Gewinn (nach Abzug der bezahlten 85 €) beträgt also 12,29... €. Vergleiche mit **a)**.
Dafür muss er die Spieljetons folgendermaßen auf die Farben verteilen:

$$r = \frac{A}{2} = 48{,}64... \text{ €} \qquad s = \frac{A}{2} = 48{,}64... \text{ €} \qquad g = \frac{A}{36} = 2{,}70... \text{ €} \qquad \square$$

Aufgabe 5. Das Volumen V und der Oberflächeninhalt O eines Drehkegels hängen von seinem Radius r und seiner Höhe h ab:



$V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

$O = \pi \cdot r \cdot (r + \sqrt{r^2 + h^2})$

Der Oberflächeninhalt eines bestimmten Drehkegels beträgt $42\,\text{cm}^2$.

a) Stelle mithilfe von r eine Formel für das Volumen $V(r)$ des Drehkegels auf.

$V(r) = \boxed{}$ (r in cm, $V(r)$ in cm^3)

Das Volumen des Drehkegels soll so groß wie möglich sein. Man kann zeigen, dass $V(r)$ den größten Funktionswert an der gleichen Stelle r^* annimmt wie die Funktion f, für die gilt:

$$f(r) = \frac{42}{\pi} \cdot r^2 - 2 \cdot r^4$$

b) Ermittle die Ableitungsfunktion f' und ihre positive Nullstelle r^*.

c) Zeige, dass f an der Stelle r^* ein lokales Maximum hat.

d) ☆ Begründe, warum $V(r)$ und $f(r)$ tatsächlich an der gleichen Stelle den jeweils größten Funktionswert annehmen.

Lösung

a) Wir formen die Formel für den Oberflächeninhalt nach h um:

$$42 = \pi \cdot r \cdot (r + \sqrt{r^2 + h^2}) \iff \frac{42}{\pi \cdot r} - r = \sqrt{r^2 + h^2} \iff h = \sqrt{\left(\frac{42}{\pi \cdot r} - r\right)^2 - r^2}$$

Für das Volumen V eines Drehkegels mit Radius r und Oberflächeninhalt $42\,\text{cm}^2$ gilt also:

$$V(r) = \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{42}{\pi \cdot r} - r\right)^2 - r^2}$$

b) Wir ermitteln f':

$$f'(r) = \frac{84}{\pi} \cdot r - 8 \cdot r^3 = r \cdot \left(\frac{84}{\pi} - 8 \cdot r^2\right) = 0$$

Für die positive Nullstelle r^* von f' gilt also:

$$\frac{84}{\pi} = 8 \cdot r^2 \implies r^* = \sqrt{\frac{84}{8 \cdot \pi}} = 1{,}828\ldots\,\text{cm}$$

c) Es gilt:

$$f''(r) = \frac{84}{\pi} - 24 \cdot r^2 \implies f''(r^*) = -53{,}4\ldots < 0$$

An der Stelle r^* hat f also die Steigung 0 und ist negativ gekrümmt. Also hat f an der Stelle r^* ein lokales Maximum. (Da f stetig ist und f' keine weitere positive Nullstelle hat, ist das lokale Maximum auch das globale Maximum.)

d) Wir vereinfachen die in **a)** ermittelte Funktionsgleichung von V:

$$\begin{aligned}
V(r) &= \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{42}{\pi \cdot r} - r\right)^2 - r^2} = \\
&= \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot \sqrt{\frac{42^2}{\pi^2 \cdot r^2} - \frac{84 \cdot \cancel{r}}{\pi \cdot \cancel{r}} + \cancel{r^2} - \cancel{r^2}} = \\
&= \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{42^2 \cdot r^4}{\pi^2 \cdot r^2} - \frac{84 \cdot r^4}{\pi}} = \\
&= \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{42}{\pi} \cdot \left(\frac{42 \cdot r^2}{\pi} - 2 \cdot r^4\right)} = \\
&= \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{42}{\pi}} \cdot \sqrt{f(r)}
\end{aligned}$$

Die Wurzelfunktion ☺ $\mapsto \sqrt{☺}$ ist streng monoton steigend. Also ist $V(r)$ genau dann maximal, wenn $f(r)$ maximal ist. □