1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Wähle am Ende, welche 4 der 5 Aufgaben zur Beurteilung herangezogen werden sollen:

☐ Aufgabe 1 ☐ Aufgabe 2 ☐ Aufgabe 3 ☐ Aufgabe 4 ☐ Aufgabe 5

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Löse die Gleichung

$$3^{(2\cdot x+2)^2}\cdot 9^{x-\frac{7}{2}} = 27^{(x+2)^2}$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Zerlege das Polynom

$$6\cdot x^3 - 19\cdot x^2 + 9\cdot x + 10$$

in Linearfaktoren.

Aufgabe 3. Sei $k\in\mathbb{R}$ ein Parameter und $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3\cdot k\cdot x.$$

a) Angenommen, $k<0$. Ermittle das Monotonieverhalten von f.
b) Angenommen, $k\geq 0$. Ermittle das Monotonieverhalten von f.
c) ☆ Für welche Werte von $k\in\mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$x^3 = 3\cdot k\cdot x + 16$$

jeweils genau **1)** eine Lösung **2)** zwei Lösungen **3)** drei Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$?

Aufgabe 4.

a) Seien a, b, $c\in\mathbb{R}$ und $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = e^{-x}\cdot(a\cdot x^2 + b\cdot x + c)$.
Zeige, dass

$$f'(x) = e^{-x}\cdot[-a\cdot x^2 + (2\cdot a - b)\cdot x + b - c].$$

Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.
b) Ermittle eine Stammfunktion von $g(x) = e^{-x}\cdot(x^2 - 3\cdot x + 1)$.
c) ☆ Ermittle eine Stammfunktion von $h(x) = e^{2\cdot x}\cdot(3\cdot x^2 + 2\cdot x^3)$.

Aufgabe 5. Das folgende Lemma soll grafisch veranschaulicht, bewiesen und angewendet werden.

Lemma: Sei $f\colon]a;b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion so, dass ihre Ableitungsfunktion $f'\colon]a;b[\to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist.

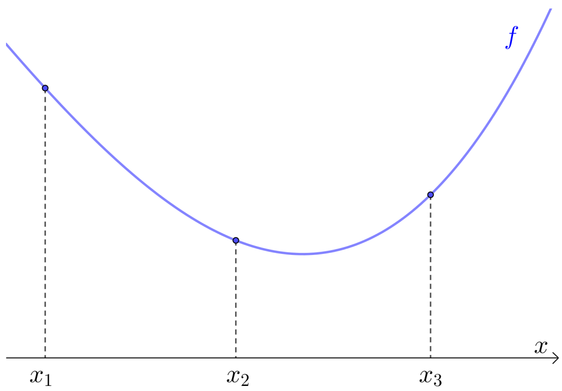
(i) Seien $x_1, x_2, x_3 \in]a;b[$ mit $x_1 < x_2 < x_3$. Dann gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(ii) Sei $x_0 \in]a;b[$. Dann gilt: Für alle $x \in]a;b[$ ist

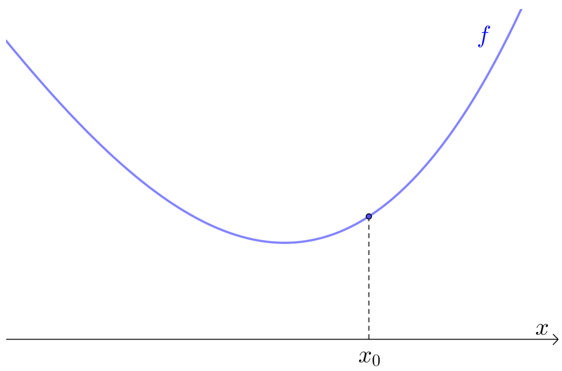
$$(x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \leq f(x).$$

a) Die Funktion f, deren Graph unten abgebildet ist, erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas. Veranschauliche Behauptung (i) des Lemmas in dieser Abbildung.



b) Beweise Behauptung (i) des Lemmas. Tipp: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

c) Die Funktion f, deren Graph unten abgebildet ist, erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas. Veranschauliche Behauptung (ii) des Lemmas in dieser Abbildung.



d) Beweise Behauptung (ii) des Lemmas. Tipp: Unterscheide die Fälle $x < x_0$, $x = x_0$ und $x > x_0$ und verwende (i).

e) ☆ Zeige, dass für alle reellen Zahlen $x > 0$ gilt:

$$x - 1 \leq x \cdot \ln(x)$$