Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

## 1. Hinweise

- Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
- Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
- Arbeitszeit: 90 Minuten
- Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ★ - Bonuspunkte).
- Die mit ★ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
- Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

## 2. Aufgaben

**Aufgabe 1.** Zerlege das Polynom

$$4 \cdot x^3 - 21 \cdot x + 10$$

in Linearfaktoren.

*Lösung.* Ganzzahlige Nullstellen müssen ganzzahlige Teiler von 10 sein, also $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 5$, $\pm 10$. Durch Probieren finden wir die Nullstelle $x_1 = 2$. Es gilt also:

$$4 \cdot x^3 - 21 \cdot x + 10 = 4 \cdot (x-2) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Wir dividieren beide Seiten durch den Linearfaktor $(x-2)$. Auf der linken Seite erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
\ominus \left\{ \begin{array}{l} (4 \cdot x^3 \qquad\qquad - 21 \cdot x + 10) : (x-2) = 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 5 \\ \ 4 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 \end{array} \right. \\ \hline
\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} \quad 8 \cdot x^2 - 21 \cdot x + 10 \\ \quad 8 \cdot x^2 - 16 \cdot x \end{array} \right. \\ \hline
\qquad\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{r} - \quad 5 \cdot x + 10 \\ - \quad 5 \cdot x + 10 \end{array} \right. \\ \hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Die rechte Seite hat nach der Division durch $(x-2)$ noch die Nullstellen $x_2$ und $x_3$. Also können wir $x_2$ und $x_3$ als Lösungen der quadratischen Gleichung $4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 5 = 0$ berechnen:

$$x_{2,3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \frac{-8 \pm 12}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{1}{2},\, x_3 = -\frac{5}{2}$$

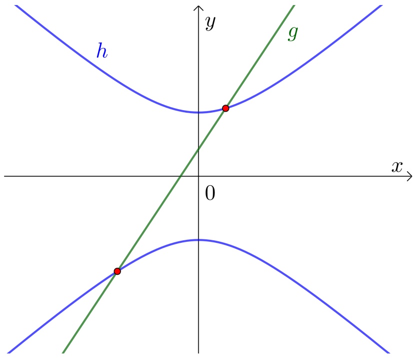
Die 3 Nullstellen und der Leitkoeffizient 4 legen die Zerlegung in Linearfaktoren fest:

$$4 \cdot x^3 - 21 \cdot x + 10 = 4 \cdot (x-2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{5}{2}\right) \qquad \square$$

**Aufgabe 2.** Die Gerade $g$ und die Hyperbel $h$ mit

$$g\colon\ -3\cdot x+2\cdot y=4 \qquad\qquad h\colon\ -3\cdot x^2+4\cdot y^2=88$$

schneiden einander in 2 Punkten:




Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

*Lösung.* Die Schnittpunkte sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad -3\cdot x+2\cdot y=4 \quad\implies y=\frac{3\cdot x+4}{2}\\ \mathrm{II}: &\quad -3\cdot x^2+4\cdot y^2=88 \end{aligned}$$

Wir setzen in Gleichung II ein und formen um:

$$\begin{aligned} -3\cdot x^2+4\cdot\left(\frac{3\cdot x+4}{2}\right)^2 &= 88\\ -3\cdot x^2+9\cdot x^2+24\cdot x+16 &= 88\\ 6\cdot x^2+24\cdot x-72 &= 0\\ \underbrace{x^2+4\cdot x-12}_{=(x-2)\cdot(x+6)} &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen in I liefert die Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} x_1=2 &\quad\implies\quad y_1=\frac{3\cdot 2+4}{2}=5 &&\implies\quad S_1=(2\mid 5)\\ x_2=-6 &\quad\implies\quad y_2=\frac{3\cdot(-6)+4}{2}=-7 &&\implies\quad S_2=(-6\mid -7) \end{aligned}$$

Der Satz von Pythagoras liefert die Entfernung zwischen den beiden Punkten:

$$\sqrt{(2-(-6))^2+(5-(-7))^2}=\sqrt{208}$$

$\square$

**Aufgabe 3.** Das Monotonieverhalten der Funktion $f$ mit

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot k \cdot x^2 + 42$$

hängt vom Wert des Parameters $k \in \mathbb{R}$ ab.
Ermittle das Monotonieverhalten von $f$ in Abhängigkeit von $k$. Hinweis: Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden.

*Lösung.* Wir ermitteln die Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = 6 \cdot x^2 - 6 \cdot k \cdot x = 6 \cdot x \cdot (x - k)$$

Die Nullstellen von $f'$ sind also $x_1 = 0$ und $x_2 = k$.
Der Graph von $f$ hat also an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = k$ eine waagrechte Tangente.

- Fall 1: $k = 0$
  In diesem Fall wechselt $f'(x) = 6 \cdot x \cdot x$ an keiner Stelle das Vorzeichen.
  Wir ermitteln das Monotonieverhalten von $f$:

| | $x < 0$ | $x = 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | Sattelpunkt | $\nearrow$ |

- Fall 2: $k > 0$
  In diesem Fall wechselt $f'(x) = 6 \cdot x \cdot (x - k)$ an den Stellen 0 und $k$ das Vorzeichen.
  Wir ermitteln das Monotonieverhalten von $f$:

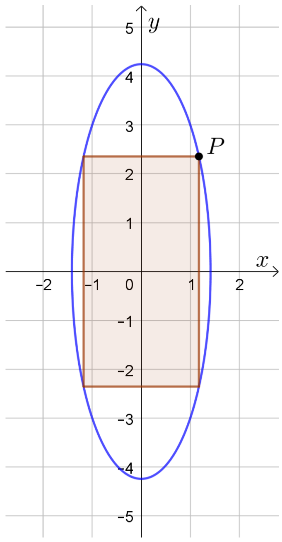
| | $x < 0$ | $x = 0$ | $0 < x < k$ | $x = k$ | $x > k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | Hochpunkt | $\searrow$ | Tiefpunkt | $\nearrow$ |

- Fall 3: $k < 0$
  In diesem Fall wechselt $f'(x) = 6 \cdot (x - k) \cdot x$ an den Stellen 0 und $k$ das Vorzeichen.
  Wir ermitteln das Monotonieverhalten von $f$:

| | $x < k$ | $x = k$ | $k < x < 0$ | $x = 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | Hochpunkt | $\searrow$ | Tiefpunkt | $\nearrow$ |

$\square$

**Aufgabe 4.** Die Lösungen der Gleichung $9 \cdot x^2 + y^2 = 18$ bilden die dargestellte Ellipse.




Dieser Ellipse werden Rechtecke eingeschrieben:

- Der Eckpunkt $P = (x_P \mid y_P)$ liegt auf der Ellipse im 1. Quadranten.
- Die Seiten des Rechtecks sind parallel zu den Koordinatenachsen.

Der Flächeninhalt $F$ des Rechtecks hängt von $x_P$ ab.

**1)** Zeige, dass

$$F(x_P) = 12 \cdot \sqrt{2 \cdot x_P^2 - x_P^4}$$

gilt.

**2)** Ermittle den größten Flächeninhalt, den ein solches Rechteck haben kann. Welche Koordinaten hat $P$ in diesem Fall?

*Lösung.*

**1)** Für den Flächeninhalt $F$ gilt:

$$F = 2 \cdot x_P \cdot 2 \cdot y_P = 4 \cdot x_P \cdot y_P$$

Da $P$ auf der Ellipse liegt, gilt:

$$9 \cdot x_P^2 + y_P^2 = 18 \implies y_P = \sqrt{18 - 9 \cdot x_P^2} = 3 \cdot \sqrt{2 - x_P^2}$$

Einsetzen liefert die angegebene Funktionsgleichung:

$$F(x_P) = 4 \cdot x_P \cdot 3 \cdot \sqrt{2 - x_P^2} = 12 \cdot \sqrt{2 \cdot x_P^2 - x_P^4}$$

**2)** Da die Wurzelfunktion ☺ $\mapsto \sqrt{☺}$ streng monoton wachsend ist, nimmt $F$ den größten Funktionswert an der gleichen *Stelle* an wie die Funktion $G$ mit:

$$G(x) = 2 \cdot x^2 - x^4$$

Wir ermitteln die Nullstellen von $G'$:

$$G'(x) = 4 \cdot x - 4 \cdot x^3 = 4 \cdot x \cdot (1 - x^2) = 4 \cdot x \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)$$

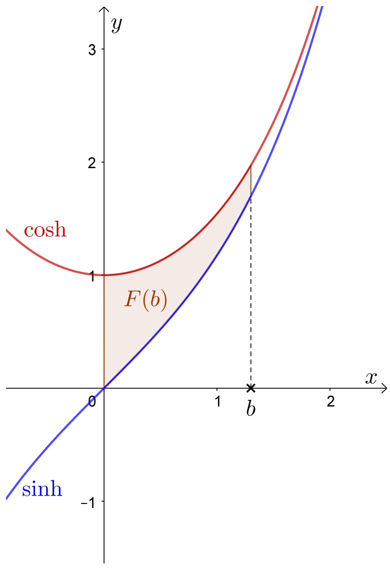
Der Graph von $G$ hat also an den Stellen $-1$, $0$ und $1$ eine waagrechte Tangente.
Aus

$$G''(x) = 4 - 12 \cdot x^2, \quad G''(-1) < 0, \quad G''(0) > 0, \quad \text{und} \quad G''(1) < 0$$

folgt, dass $G$ an den Stellen $-1$ und $1$ ein lokales Maximum und an der Stelle $0$ ein lokales Minimum hat. Also nimmt die Funktion $F$ an der Stelle $x_P = 1$ den größten Funktionswert im Definitionsbereich an.
Das gesuchte Rechteck hat also den Flächeninhalt $F(1) = 12$ mit $P = (1 \mid 3)$. □

**Aufgabe 5.** Für die reellen Funktionen sinh (*Sinus hyperbolicus*) und cosh (*Cosinus hyperbolicus*) gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$




**1)** Begründe, warum $\cosh(x) > \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Graphen der beiden Funktionen schließen im Intervall $[0; b]$ die rechts dargestellte Fläche mit Inhalt $F(b)$ ein.

**2)** Stelle eine Formel für $F(b)$ mit $b > 0$ auf, und berechne den Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$.

**3)** Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \cosh(a \cdot x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Berechne diesen Wert $a$.

Rotiert die dargestellte Fläche mit Inhalt $F(b)$ um die $x$-Achse, dann entsteht ein Rotationskörper mit Volumen $V(b)$.

**4)** ☆ Zeige, dass $\lim\limits_{b\to\infty} V(b) = \infty$ gilt.

*Lösung.*

**1)** Wir formen die Ungleichung um:

$$\cosh(x) > \sinh(x) \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^x + e^{-x} > e^x - e^{-x} \iff 2 \cdot e^{-x} > 0$$

Aus $e^{☺} > 0$ für alle ☺ $\in \mathbb{R}$ folgt damit, dass $\cosh(x) > \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**2)** Aus $\cosh(x) - \sinh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{2 \cdot e^{-x}}{2} = e^{-x}$ folgt

$$F(b) = \int_0^b (\cosh(x) - \sinh(x))\mathrm{d}x = \int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b} - (-1) = 1 - e^{-b}$$

$$\implies \lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1 - 0 = 1$$

**3)** Wir vereinfachen die linke Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}\sinh^2(x)+\cosh^2(x) &= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2\cdot x}-2+e^{-2\cdot x}}{4}+\frac{e^{2\cdot x}+2+e^{-2\cdot x}}{4} = \\ &= \frac{2\cdot e^{2\cdot x}+2\cdot e^{-2\cdot x}}{4} = \frac{e^{2\cdot x}+e^{-2\cdot x}}{2} = \cosh(2\cdot x)\end{aligned}$$

Der gesuchte Wert ist also $a = 2$.

**4)** Für das Rotationsvolumen gilt:

$$V(b) = \pi\cdot\int_0^b \cosh^2(x)\mathrm{d}x - \pi\cdot\int_0^b \sinh^2(x)\mathrm{d}x = \pi\cdot\int_0^b [\cosh^2(x)-\sinh^2(x)]\mathrm{d}x$$

Wir vereinfachen den Integranden:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x)-\sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2\cdot x}+2+e^{-2\cdot x}}{4}-\frac{e^{2\cdot x}-2+e^{-2\cdot x}}{4} = 1\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$V(b) = \pi\cdot\int_0^b 1\mathrm{d}x = \pi\cdot b$$

Tatsächlich wächst das Rotationsvolumen also unbeschränkt, obwohl $F(b)$ beschränkt ist:

$$\lim_{b\to\infty} V(b) = \lim_{b\to\infty}(\pi\cdot b) = \infty$$

$\square$