Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

1. Hinweise

– Als Hilfsmittel ist nur ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig, kein CAS) erlaubt.
– Bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe darfst du immer die zu zeigenden Behauptungen aller *vorhergegangenen* Teilaufgaben derselben Aufgabe verwenden, auch wenn du sie nicht bearbeitet hast.
– Arbeitszeit: 90 Minuten
– Jede der 5 Aufgaben ist 5 Punkte wert (ohne ☆ - Bonuspunkte).
– Die mit ☆ gekennzeichneten Unterpunkte sind jeweils 2 Bonuspunkte wert.
– Die besten 4 der 5 Aufgaben werden zur Beurteilung herangezogen.

2. Aufgaben

Aufgabe 1. Für die Ableitungsfunktion f' der Funktion f gilt:

$$f'(x) = e^x \cdot (2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3)$$

1) Zerlege das Polynom $2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3$ in Linearfaktoren.
2) Ermittle das Monotonieverhalten von f.

Für die Funktion g gilt: $g(x) = e^x \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$ mit $a \neq 0$

3) ☆ Begründe, warum g' mindestens so viele reelle Nullstellen wie g hat.

Lösung.

1) Wir berechnen die Nullstellen des Polynoms:

$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0$$

Aus der Großen Lösungsformel folgt:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} \implies x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 3$$

Damit können wir das Polynom in Linearfaktoren zerlegen:

$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 2 \cdot (x + \tfrac{1}{2}) \cdot (x - 3)$$

2) Aus dem Vorzeichen von

$$f'(x) = \underbrace{e^x \cdot 2}_{>0} \cdot (x + \tfrac{1}{2}) \cdot (x - 3)$$

ermitteln wir das Monotonieverhalten von f:

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Hochpunkt	$\searrow$	Tiefpunkt	$\nearrow$

3) **Begründung I:** Die Nullstellen von g können wir mit der Großen Lösungsformel berechnen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Die Anzahl der reellen Nullstellen hängt vom Vorzeichen der Diskriminante D_1 ab:

$$D_1 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Aus der Produktregel folgt:

$$g'(x) = e^x \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) + e^x \cdot (2 \cdot a \cdot x + b) = e^x \cdot \Big[a \cdot x^2 + (2 \cdot a + b) \cdot x + (b + c)\Big]$$

Die Nullstellen von g' sind also die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung:

$$a \cdot x^2 + (2 \cdot a + b) \cdot x + (b + c) = 0$$

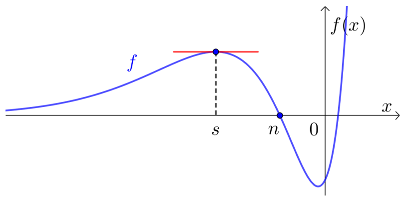
Die Anzahl der reellen Nullstellen hängt vom Vorzeichen der Diskriminante D_2 ab:

$$\begin{aligned} D_2 &= (2 \cdot a + b)^2 - 4 \cdot a \cdot (b + c) = \\ &= 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b + b^2 - 4 \cdot a \cdot b - 4 \cdot a \cdot c = \\ &= 4 \cdot a^2 + b^2 - 4 \cdot a \cdot c = \underbrace{4 \cdot a^2}_{>0} + D_1 > D_1 \end{aligned}$$

Aus $D_2 > D_1$ folgt, dass g' mindestens so viele reelle Nullstellen wie g hat.

Begründung II: Anwendung vom Satz von Rolle

Lemma 2.1. *Sei f eine differenzierbare Funktion mit $f(n) = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Dann hat f' mindestens eine Nullstelle $s \in \,]-\infty; n[$.*



Das Lemma ist grafisch einleuchtend.
Eine formale Begründung ist zum Beispiel mit dem Satz von Rolle möglich.
Wie würdest du vorgehen?

Mithilfe von Lemma 2.1 können wir auch begründen, warum die Funktion g mit

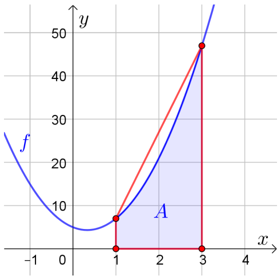
$$g(x) = e^x \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$

höchstens so viele reelle Nullstellen wie g' hat. Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass die Funktion g höchstens zwei reelle Nullstellen hat, nämlich die Nullstellen von $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

- Falls g keine reellen Nullstellen hat, ist nichts zu zeigen.
- Falls g genau eine reelle Nullstelle n hat, dann muss g' wegen Lemma 2.1 eine reelle Nullstelle in $]-\infty; n[$ haben.
- Falls g zwei reelle Nullstelle $n_1 < n_2$ hat, dann folgt aus dem Satz von Rolle, dass g' eine Nullstelle in $]n_1; n_2[$ hat, und aus Lemma 2.1, dass g' eine Nullstelle in $]-\infty; n_1[$ hat.

$\square$

Aufgabe 2. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5$ ist dargestellt.



Für den Inhalt der links markierten Fläche gilt: $A = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

1) Berechne den Flächeninhalt A.

2) Diese Fläche wird durch das eingezeichnete Trapez angenähert. Berechne den Flächeninhalt T des Trapezes.

3) Um wie viel Prozent ist T größer als A?

Lösung.

1) Wir berechnen A mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_1^3 \left(6 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5\right)\,\mathrm{d}x = \left(2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x\right)\Big|_1^3 = 51 - 5 = 46$$

2) Für den Flächeninhalt T des Trapezes gilt:

$$T = \frac{(f(1) + f(3)) \cdot (3 - 1)}{2} = \frac{(7 + 47) \cdot 2}{2} = 54$$

3) Aus

$$\frac{T}{A} = \frac{54}{46} = 1{,}1739... = 117{,}39...\,\%$$

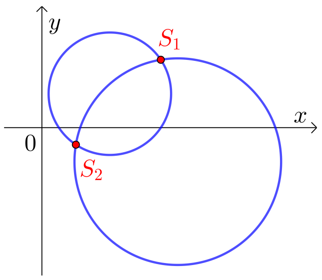
folgt, dass T um $17{,}39...\,\%$ größer als A ist.

Oder:

$$\frac{T - A}{A} = \frac{8}{46} = 0{,}1739... = 17{,}39...\,\%$$

□

Aufgabe 3. Die beiden dargestellten Kreise haben die folgenden Gleichungen:



$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 13 \\ (x-8)^2 + (y+2)^2 = 37 \end{cases}$$

1) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.

Hinweis: Subtrahiere eine Gleichung von der anderen Gleichung.

2) Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

Lösung.

1) Wir multiplizieren beide Gleichungen aus und vereinfachen:

$$\begin{cases} x^2 - 8 \cdot x + y^2 - 4 \cdot y = -7 \\ x^2 - 16 \cdot x + y^2 + 4 \cdot y = -31 \end{cases}$$

Wir subtrahieren die untere Gleichung von der oberen Gleichung:

$$8 \cdot x - 8 \cdot y = 24 \iff y = x - 3$$

Die beiden Schnittpunkte müssen also auf der Gerade $y = x - 3$ liegen.
Wir schneiden diese Gerade mit dem ersten Kreis:

$$\begin{aligned} x^2 - 8 \cdot x + (x-3)^2 - 4 \cdot (x-3) &= -7 \\ x^2 - 8 \cdot x + x^2 - 6 \cdot x + 9 - 4 \cdot x + 12 &= -7 \\ 2 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 28 &= 0 \\ \underbrace{x^2 - 9 \cdot x + 14}_{=(x-2)\cdot(x-7)} &= 0 \end{aligned}$$

Die beiden Schnittpunkte haben also die x-Koordinaten $x_1 = 7$ bzw. $x_2 = 2$.
Durch Einsetzen in $y = x - 3$ erhalten wir die zugehörigen y-Koordinaten:

$$S_1 = (7 \mid 4) \quad \text{und} \quad S_2 = (2 \mid -1)$$

2) Wir berechnen die Entfernung d zwischen den Schnittpunkten mit dem Satz von Pythagoras:

$$d = \sqrt{(-1-4)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{50} = 7{,}071...$$

□

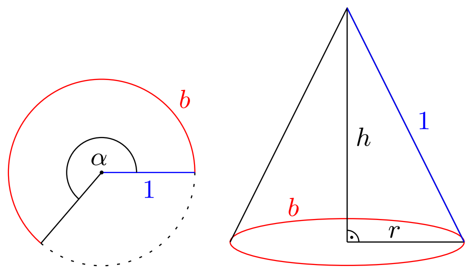
Aufgabe 4. Aus einem Kreissektor mit Radius 1 und Zentriwinkel α kann man – wie dargestellt – einen Drehkegel basteln.

Das Volumen V des Drehkegels hängt von α ab.

Für alle Winkel $\alpha \in \,]0; 2\cdot\pi[$ gilt:

$$V(\alpha) = \frac{\alpha^2}{12\cdot\pi}\cdot\sqrt{w(\alpha)} \quad \text{mit} \quad w(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{4\cdot\pi^2}$$

Der Winkel α ist dabei im Bogenmaß.



1) Ermittle $V'(\alpha)$ mit den Ableitungsregeln.

Es gibt genau einen Winkel $\alpha^* \in \,]0; 2\cdot\pi[$, für den das Volumen des Drehkegels maximal ist.

Dieser Winkel ist eine Lösung der folgenden Gleichung: $\sqrt{w(\alpha)} = \dfrac{\alpha^2}{8\cdot\pi^2\cdot\sqrt{w(\alpha)}}$

2) Berechne diesen Winkel α^* im Bogenmaß.

3) Es gilt: $\alpha^* = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}}$

Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.

Lösung.

1) Wir leiten $V(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{12\cdot\pi}\cdot[w(\alpha)]^{\frac{1}{2}}$ mit der Produktregel und der Kettenregel ab:

$$\begin{aligned}
V'(\alpha) &= \frac{2\cdot\alpha}{12\cdot\pi}\cdot[w(\alpha)]^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha^2}{12\cdot\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot[w(\alpha)]^{-\frac{1}{2}}\cdot w'(\alpha) = \\
&= \frac{\alpha}{6\cdot\pi}\cdot\sqrt{w(\alpha)} + \frac{\alpha^2}{24\cdot\pi\cdot\sqrt{w(\alpha)}}\cdot\frac{-2\cdot\alpha}{4\cdot\pi^2} = \\
&= \frac{\alpha}{6\cdot\pi}\cdot\sqrt{w(\alpha)} - \frac{\alpha^3}{48\cdot\pi^3\cdot\sqrt{w(\alpha)}}
\end{aligned}$$

2) Aus $\alpha \in \,]0; 2\cdot\pi[$ folgt $0 < w(\alpha) < 1$ und damit:

$$\sqrt{w(\alpha)} = \frac{\alpha^2}{8\cdot\pi^2\cdot\sqrt{w(\alpha)}} \iff 8\cdot\pi^2\cdot\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\cdot\pi^2}\right) = \alpha^2 \iff$$

$$\iff 8\cdot\pi^2 - 2\cdot\alpha^2 = \alpha^2 \iff \alpha = \sqrt{\frac{8\cdot\pi^2}{3}} = 5{,}13\ldots\,\text{rad}$$

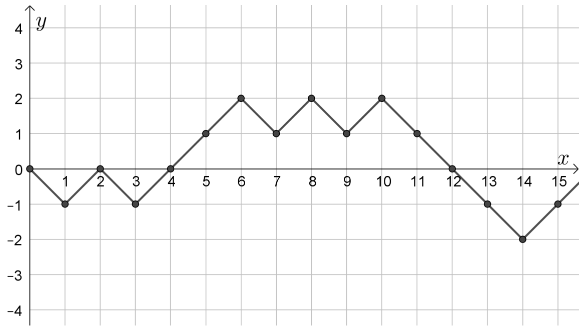
3) $\alpha^* = \sqrt{\dfrac{8\cdot\pi^2}{3}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (Der Kreissektor sollte also $\sqrt{\frac{2}{3}} = 81{,}64\ldots\,\%$ vom gesamten Kreis sein.) $\square$

Aufgabe 5. Bei einem *Random Walk* bewegt man sich ausgehend vom Punkt $(0 \mid 0)$.
Dazu wird immer wieder eine faire Münze geworfen.
Nach jedem Münzwurf bewegt man sich weiter:

i) Beim Ergebnis „Kopf" bewegt man sich entlang des Vektors $\binom{1}{1}$ weiter.

ii) Beim Ergebnis „Zahl" bewegt man sich entlang des Vektors $\binom{1}{-1}$ weiter.

Der rechts dargestellte Random Walk verläuft durch die Punkte $(6 \mid 2)$ und $(12 \mid 0)$.



1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Random Walk durch den Punkt $(6 \mid 2)$ verläuft.

2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Random Walk durch den Punkt $(12 \mid 0)$ verläuft.

3) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Random Walk durch den Punkt $(12 \mid 0)$ verläuft, wenn du schon weißt, dass dieser Random Walk durch den Punkt $(6 \mid 2)$ verläuft.

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, dass ein Random Walk durch den Punkt $(2 \cdot n \mid 0)$ verläuft? Stelle mithilfe von $n \in \mathbb{N}$ eine Formel für p_n auf.

Lösung.

Die Zufallsvariable X_n gibt die Anzahl der Ergebnisse „Kopf" unter den ersten n Münzwürfen an. Da es sich um eine faire Münze handelt, ist X_n binomialverteilt mit den Parametern n und $p = \frac{1}{2}$.

1) Ein Random Walk verläuft genau dann durch den Punkt $(6 \mid 2)$, wenn unter den ersten 6 Münzwürfen genau 4 Mal das Ergebnis „Kopf" ist. Für die entsprechende Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(X_6 = 4) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 23{,}43\ldots\,\%$$

2) Ein Random Walk verläuft genau dann durch den Punkt $(12 \mid 0)$, wenn unter den ersten 12 Münzwürfen genau 6 Mal das Ergebnis „Kopf" ist. Für die entsprechende Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(X_{12} = 6) = \binom{12}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 924 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 22{,}55\ldots\,\%$$

3) Wenn ein Random Walk durch den Punkt $(6 \mid 2)$ verläuft, muss unter den darauffolgenden 6 Münzwürfen genau 2 Mal das Ergebnis „Kopf" sein, damit der Random Walk durch den Punkt $(12 \mid 0)$ verläuft. Da die Münze fair ist, gilt für die entsprechende bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(X_6 = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 23{,}43\ldots\,\%$$

4) Für die Wahrscheinlichkeit p_n gilt:

$$p_n = P(X_{2 \cdot n} = n) = \binom{2 \cdot n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2 \cdot n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot n}$$

□