AUFGABENSAMMLUNG – DIFFERENTIALRECHNUNG

Inhaltsverzeichnis

Unterrichtsmaterialien – Differentialrechnung MmF

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

- ✓ Arbeitsblatt – Änderungsmaße von Funktionen
- ✓ Arbeitsblatt – Differentialquotient
- ✓ Arbeitsblatt – Ableitungsregeln
- ✓ Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen I
- ✓ Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen II
- ✓ Technologieblatt – Kurvenuntersuchungen
- ✓ Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen
- ✓ Arbeitsblatt – Physikalische Anwendungen der Differentialrechnung
- ✓ Arbeitsblatt – Optimierungsaufgaben
- ✓ Arbeitsblatt – Mittelwertsatz der Differentialrechnung
- ✓ Arbeitsblatt – Newtonsches Näherungsverfahren
- ✓ Arbeitsblatt – Lokale Änderungsrate
- ✓ Arbeitsblatt – Funktionen in mehreren Variablen

Datum: 2. Mai 2024

Wie darf ich die Aufgaben verwenden? MmF

Das MmF-Team entwickelt eigene Aufgabenstellungen. Sie sind mit dem Projektlogo MmF gekennzeichnet.

Alle anderen Aufgaben stammen aus den SR(D)P-Aufgabenpools der AHS bzw. BHS.

Bei diesen Aufgaben ist das BMBWF-Logo Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung mit der entsprechenden Aufgabe verlinkt.

Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

1. Änderungsmaße von Funktionen

MmF-Materialien

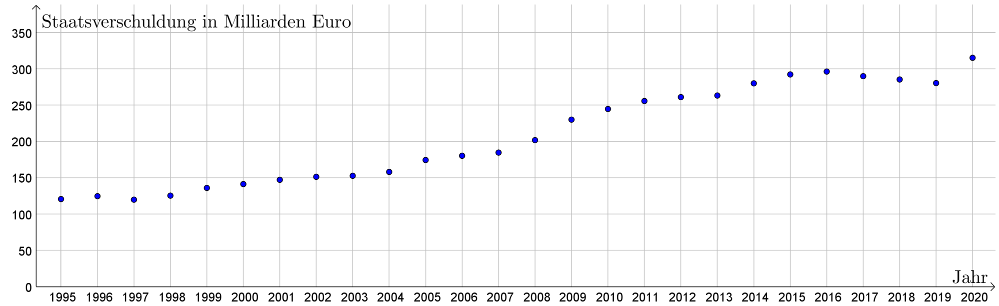
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Änderungsmaße von Funktionen

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 11. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

1.1

Der zeitliche Verlauf der österreichischen Staatsverschuldung ist im folgenden Bild dargestellt:



Quelle: Statistik Austria (10.06.2021)

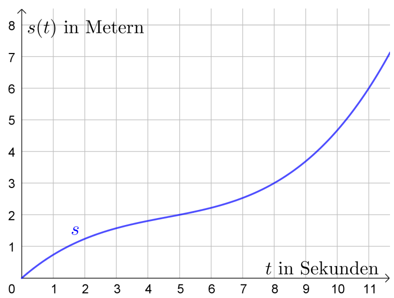
Im Jahr 1995 betrug die österreichische Staatsverschuldung rund 121 Milliarden Euro.
Im Jahr 2020 betrug die österreichische Staatsverschuldung rund 315 Milliarden Euro.

a) Berechne die absolute Änderung der österreichischen Staatsverschuldung im Zeitraum $[1995; 2020]$.
Interpretiere den Wert dieser absoluten Änderung im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Berechne die relative Änderung der österreichischen Staatsverschuldung im Zeitraum $[1995; 2020]$.
Interpretiere den Wert dieser relativen Änderung im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Berechne die mittlere Änderungsrate der österreichischen Staatsverschuldung im Zeitraum $[1995; 2020]$.
Interpretiere den Wert dieser mittleren Änderungsrate im gegebenen Sachzusammenhang.

1.2

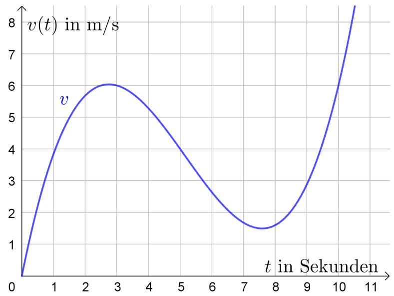


Der Graph einer Weg-Zeit-Funktion s ist links dargestellt.

a) Ermittle die mittlere Änderungsrate von s im Zeitintervall $[5\,\text{s}; 11\,\text{s}]$. Gib ihre Einheit an.

b) Interpretiere den Wert dieser mittleren Änderungsrate.

1.3

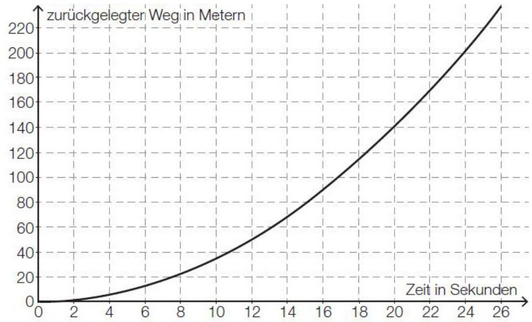


Der Graph einer Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist links dargestellt.

a) Ermittle die mittlere Änderungsrate von v im Intervall $[5\,\text{s}; 10\,\text{s}]$. Gib ihre Einheit an.

b) Interpretiere den Wert dieser mittleren Änderungsrate.

1.4

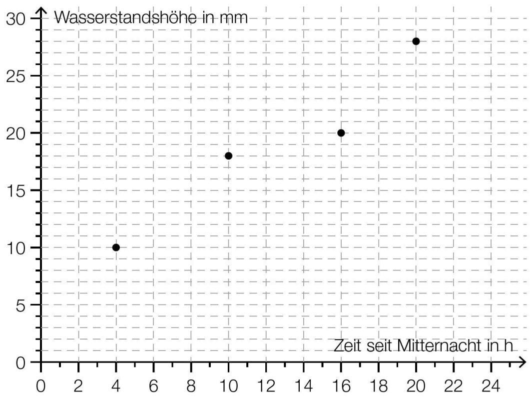


Jugendliche fahren mit ihren Motorrädern von Jenbach nach Schwaz.

Im nebenstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist der Funktionsgraph für die ersten Sekunden eines Motorradfahrers nach der Abfahrt von Jenbach dargestellt.

1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit v in den ersten 20 Sekunden in Kilometern pro Stunde.

1.5



Im nebenstehenden Diagramm sind 4 unterschiedliche Wasserstandshöhen in einem Regenmesser im Laufe eines Tages dargestellt.

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Wasserstandshöhe zwischen 4:00 Uhr und 16:00 Uhr.

1.6

Emanuel startet zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ einen Fallschirmsprung.

a) Der von ihm zurückgelegte Weg wird in den ersten 5 Sekunden durch die folgende Weg-Zeit-Funktion s modelliert:

$$s(t) = \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg in Metern bis zum Zeitpunkt t

Die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v hat dann die folgende Gleichung:

$$v(t) = 9{,}81 \cdot t$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t

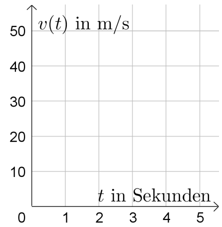
1) Emanuel versucht die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1\,\text{s}; 4\,\text{s}]$ folgendermaßen zu berechnen:

$$\frac{v(4) - v(1)}{4 - 1} = \frac{29{,}43}{3} = 9{,}81$$

Emanuel berechnet also die mittlere Änderungsrate von v im Zeitintervall $[1\,\text{s}; 4\,\text{s}]$.

Emanuel berechnet damit *nicht* die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1\,\text{s}; 4\,\text{s}]$.
Welche Einheit hat das Ergebnis? Was berechnet Emanuel damit?

2) Skizziere rechts den Graphen von v im Zeitintervall $[0\,\text{s}; 5\,\text{s}]$.



3) Berechne seine mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ im Zeitintervall $[1\,\text{s}; 4\,\text{s}]$ mit der folgenden Formel:

$$\bar{v} = \frac{\text{Zurückgelegter Weg}}{\text{Benötigte Zeit}}$$

4) Diesmal versucht Emanuel die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1\,\text{s}; 4\,\text{s}]$ als arithmetisches Mittel der Anfangs- und Endgeschwindigkeit zu berechnen:

$$\frac{v(1) + v(4)}{2} = 24{,}525\,\text{m/s}$$

Im Allgemeinen ist diese Rechnung *falsch*. Warum kommt Emanuel bei dieser Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v trotzdem zum richtigen Ergebnis?

b) Unter Berücksichtigung der Reibung wird sein Fallschirmsprung durch die Funktionen s_R und v_R modelliert:

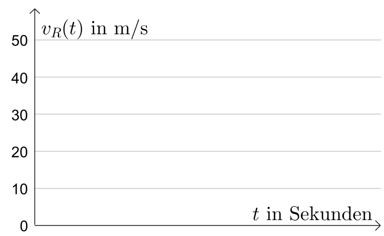
$$s_R(t) = 50 \cdot t + 312{,}5 \cdot e^{-0{,}16 \cdot t}$$

$$v_R(t) = 50 - 50 \cdot e^{-0{,}16 \cdot t}$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$s_R(t) \ldots$ zurückgelegter Weg in Metern bis zum Zeitpunkt t
$v_R(t) \ldots$ Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t

1) Berechne seine mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1\,\text{s}; 4\,\text{s}]$.

2) Skizziere rechts den Graphen der Funktion v_R.



3) Rechne nach, dass

$$\frac{v_R(1) + v_R(4)}{2}$$

nicht die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1\,\text{s}; 4\,\text{s}]$ ist.

1.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der „Energieverbrauch“ in Kilojoule (kJ) pro Minute (min) beim Joggen ist unter anderem abhängig von der Körpermasse in Kilogramm (kg). Der „Energieverbrauch“ bei einer bestimmten Geschwindigkeit durch ebenes Gelände wird durch die folgende Tabelle beschrieben:

Körpermasse in kg	50	60	70	80	90	100
„Energieverbrauch“ in kJ pro min	58	66	73	82	90	98

a) 1) Berechnen Sie aus den Werten der obigen Tabelle die mittlere Änderungsrate zwischen 50 kg und 100 kg des „Energieverbrauchs“ pro Kilogramm Körpermasse.

b) Eine Person mit 70 kg Körpergewicht beginnt mit einer bestimmten Geschwindigkeit zu joggen und wird aufgrund von Erschöpfung langsamer. Damit sinkt ihr „Energieverbrauch“ pro Minute um 0,5 %.

1) Stellen Sie eine Funktion der Zeit auf, die den sinkenden „Energieverbrauch“ dieser Person beschreibt.

1.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Wert N_{12} gibt die Anzahl der Nächtigungen in österreichischen Jugendherbergen im Jahr 2012 an, der Wert N_{13} jene im Jahr 2013.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung der Gleichung $\frac{N_{13}}{N_{12}} = 1{,}012$ für die Veränderung der Anzahl der Nächtigungen in österreichischen Jugendherbergen an!

1.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Von einer Funktion f ist die nebenstehende Wertetabelle gegeben.

Aufgabenstellung:

Die mittlere Änderungsrate der Funktion f ist im Intervall $[-1; b]$ für genau ein $b \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ gleich null. Geben Sie b an!

$b =$ ______________________

x	$f(x)$
–3	42
–2	24
–1	10
0	0
1	–6
2	–8
3	–6
4	0
5	10
6	24

1.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In ein Schwimmbad wird ab dem Zeitpunkt $t = 0$ Wasser eingelassen. Die Funktion h beschreibt die Höhe des Wasserspiegels zum Zeitpunkt t. Die Höhe $h(t)$ wird dabei in dm gemessen, die Zeit t in Stunden.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im gegebenen Kontext!

$$\frac{h(5) - h(2)}{5 - 2} = 4$$

1.11

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Benzinverbrauch im 1. Gang im Intervall $[7\,\text{km/h}; 40\,\text{km/h}]$ kann näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$b(v) = \frac{3 \cdot v^2 + 10 \cdot v + 1500}{10 \cdot (v + 10)}$$

v ... Geschwindigkeit in km/h
$b(v)$ ... Benzinverbrauch bei der Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

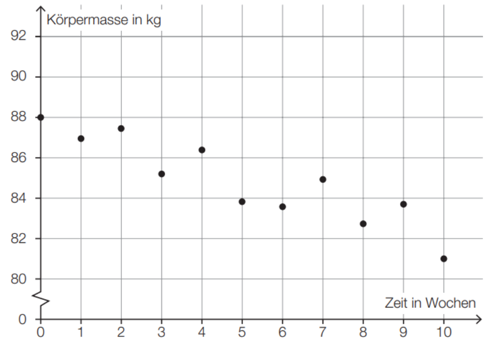
1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate des Benzinverbrauchs für das Intervall $[10\,\text{km/h}; 30\,\text{km/h}]$.

2) Berechnen Sie die relative Änderung des Benzinverbrauchs in Prozent bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit von 10 km/h auf 30 km/h.

1.12

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Hannes machte eine zehnwöchige Diät und notierte dabei am Beginn jeder Woche und am Ende der Diät seine Körpermasse (in kg). Diese Werte sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



Aufgabenstellung:
Geben Sie die absolute Änderung (in kg) und die relative Änderung (in %) der Körpermasse von Hannes vom Beginn bis zum Ende der zehnwöchigen Diät an.

absolute Änderung: ____________________ kg

relative Änderung: ____________________ %

1.13

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Drei Personen A, B und C absolvieren jeweils vor und nach einem Spezialtraining denselben Koordinationstest. In der nachstehenden Tabelle sind die dabei erreichten Punkte angeführt.

	Person A	Person B	Person C
erreichte Punkte vor dem Spezialtraining	5	15	20
erreichte Punkte nach dem Spezialtraining	8	19	35

Gute Leistungen sind durch hohe Punktezahlen gekennzeichnet. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, erreichen alle drei Personen nach dem Spezialtraining mehr Punkte als vorher.

Aufgabenstellung:
Wählen Sie aus den Personen A, B und C die beiden aus, die die nachstehenden Bedingungen erfüllen!

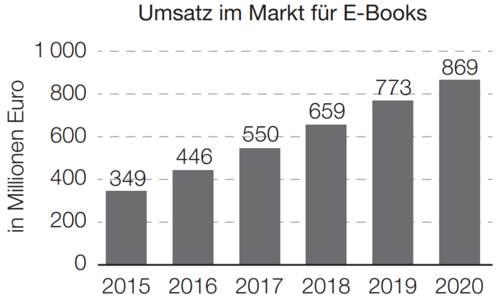
- Bei der ersten Person ist die absolute Änderung der Punktezahl größer als bei der zweiten.
- Bei der zweiten Person ist die relative Änderung der Punktezahl größer als bei der ersten Person.

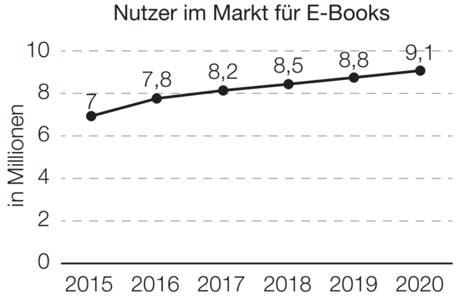
erste Person: ____________________ zweite Person: ____________________

1.14

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Buch in digitaler Form wird als *E-Book* (von engl. *electronic book*) bezeichnet. Die beiden folgenden auf Deutschland bezogenen Grafiken stellen Schätzwerte für die Entwicklung des Markts für E-Books dar:





Quelle: http://www.e-book-news.de/20-prozent-wachstum-pro-jahr-statista-sieht-deutschen-e-book-markt-im-aufwind/ [19.06.2019] (adaptiert).

Aufgabenstellung:

1) Berechnen Sie für den geschätzten Umsatz pro Nutzer in Deutschland die absolute und die relative Änderung für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

2) Berechnen Sie den Differenzenquotienten des geschätzten Umsatzes pro Nutzer in Deutschland für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

Die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wird in der oben angeführten Quelle wie folgt beschrieben:
„20 Prozent Wachstum pro Jahr"

3) Geben Sie an, wie die Umsatzschätzung $U(2017)$ für das Jahr 2017 hätte lauten müssen, wenn der Umsatz ausgehend vom Schätzwert von 2015 tatsächlich jährlich um 20 % zugenommen hätte.

$U(2017) =$ ____________________ Millionen Euro

Im Jahr 2015 betrug die Einwohnerzahl von Deutschland ungefähr 82,18 Millionen, jene von Österreich ungefähr 8,58 Millionen. Jemand stellt sich die folgende Frage: „Wie groß ist die Anzahl der Personen aus Österreich, die im Jahr 2015 schon E-Book-Nutzer waren?"

4) Beantworten Sie diese Frage unter der Annahme, dass Österreich im Jahr 2015 den gleichen (geschätzten) Anteil an E-Book-Nutzern wie Deutschland hatte.

Anzahl: ____________________ Personen

1.1 **a)** 194 Mrd. € Die öst. Staatsverschuldung war im Jahr 2020 um 194 Mrd. € größer als im Jahr 1995.

b) 160,3... % Die öst. Staatsverschuldung war im Jahr 2020 um 160,3... % größer als im Jahr 1995.

c) 7,76 Mrd. € /Jahr Die öst. Staatsverschuldung ist im Zeitraum $[1995; 2020]$ pro Jahr *durchschnittlich* um 7,76 Mrd € gewachsen.

1.2 **a)** $\frac{4\,\text{m}}{6\,\text{s}} = \frac{2}{3}\,\text{m/s}$

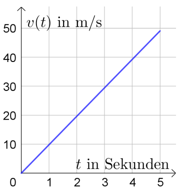
b) Im Zeitintervall $[5\,\text{s}; 11\,\text{s}]$ werden pro Sekunde *durchschnittlich* $\frac{2}{3}$ m zurückgelegt.
Oder: Im Zeitintervall $[5\,\text{s}; 11\,\text{s}]$ beträgt die mittlere Geschwindigkeit $\frac{2}{3}$ m/s.

1.3 **a)** $\frac{2\,\text{m/s}}{5\,\text{s}} = 0{,}4\,\text{m/s}^2$

b) Im Zeitintervall $[5\,\text{s}; 10\,\text{s}]$ wird die Geschwindigkeit pro Sekunde *durchschnittlich* um 0,4 m/s größer.
Oder: Im Zeitintervall $[5\,\text{s}; 10\,\text{s}]$ beträgt die mittlere Beschleunigung $0{,}4\,\text{m/s}^2$.

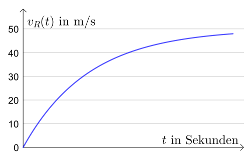
1.4 25,2 km/h

1.5 0,833...mm/h

1.6 **a)** **1)** $9{,}81\,\text{m/s}^2$ ist seine mittlere Beschleunigung im Zeitintervall $[1\,\text{s}; 4\,\text{s}]$. **2)** 

3) 24,525 m/s

4) v ist eine lineare Funktion. Deshalb ist der „durchschnittliche“ Funktionswert das arithmetische Mittel von Anfangs- und Endwert.

b) **1)** 16,16... m/s **2)** 

3) $\frac{v_R(1)+v_R(4)}{2} = 15{,}51\ldots\,\text{m/s} \neq 16{,}16\ldots\,\text{m/s}$

1.7 **a)** $\frac{40\,\text{kJ/min}}{50\,\text{kg}} = 0{,}8\,\frac{\text{kJ}}{\text{min}\cdot\text{kg}}$ **b)** $E(t) = 73 \cdot 0{,}995^t$ ... Energieverbrauch in kJ/min nach t Minuten

1.8 Im Jahr 2013 gab es um 1,2 % mehr Nächtigungen in österreichischen Jugendherbergen als im Jahr 2012.

1.9 $b = 5$

1.10 Die Wasserhöhe nimmt im Zeitintervall $[2; 5]$ um durchschnittlich 4 dm pro Stunde zu.

1.11 **1)** 0,0875 L/100 km **2)** 18,42... %

1.12 absolute Änderung: -7 kg Toleranzintervall: $[-7{,}25\,\text{kg}; -6{,}75\,\text{kg}]$
relative Änderung: $-8\,\%$ Toleranzintervall: $[-8{,}3\,\%; -7{,}6\,\%]$

1.13 erste Person: Person B zweite Person: Person A

1.14 **1)** absolute Änderung: € 45,63... relative Änderung: 0,915... **2)** € 9,12 pro Jahr **3)** 502,56 Millionen Euro **4)** 730 835 Personen

2. Differentialquotient

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Differentialquotient

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 11. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

2.1

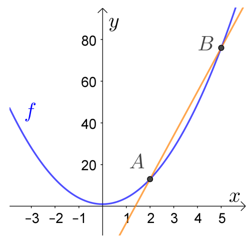
Berechne die mittlere Änderungsrate der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 + 1$ im Intervall $[2; 2+h]$ für

a) $h = 1$, **b)** $h = 0{,}1$, **c)** $h = 0{,}01$. Welchem Wert nähert sich die mittlere Änderungsrate *vermutlich* an, wenn $h \to 0$?

2.2

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot x^2 + 1$

Die Punkte $A = (2 \mid y_A)$ und $B = (5 \mid y_B)$ liegen auf dem Funktionsgraphen.



a) Berechne y_A und y_B.

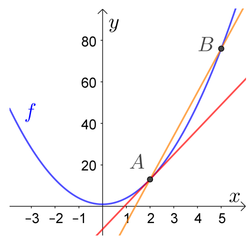
b) Berechne die Steigung der Sekante durch die Punkte A und B.

c) Ermittle eine Gleichung der Sekante, die durch die Punkte A und B verläuft.

2.3

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot x^2 + 1$

Die Punkte $A = (2 \mid 13)$ und $B = (2 + h \mid f(2 + h))$ liegen auf dem Funktionsgraphen.



a) Stelle mithilfe von h eine Formel für die Steigung der Sekante durch die Punkte A und B auf.

b) Berechne die Steigung der Tangente im Punkt A.

c) Ermittle eine Gleichung der Tangente im Punkt A.

2.4

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot x^2 + 1$

Die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$ liegen auf dem Funktionsgraphen.

a) Stelle mithilfe von x_0 und h eine Formel für die Steigung der Sekante durch die Punkte A und B auf.

b) Stelle mithilfe von x_0 eine Formel für die Steigung der Tangente im Punkt A auf.

c) Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

2.5

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = -x^2 + 3 \cdot x - 42$

Die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$ liegen auf dem Funktionsgraphen.

a) Stelle mithilfe von x_0 und h eine Formel für die Steigung der Sekante durch die Punkte A und B auf.

b) Stelle mithilfe von x_0 eine Formel für die Steigung der Tangente im Punkt A auf.

c) Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

2.6

Für die kubische Funktion f gilt: $f(x) = 0{,}5 \cdot x^3$

Die Punkte $A = (2 \mid f(2))$ und $B = (2 + h \mid f(2 + h))$ liegt auf dem Funktionsgraphen.

a) Stelle mithilfe von h eine Formel für die Steigung der Sekante durch die Punkte A und B auf.

b) Berechne die Steigung der Tangente im Punkt A.

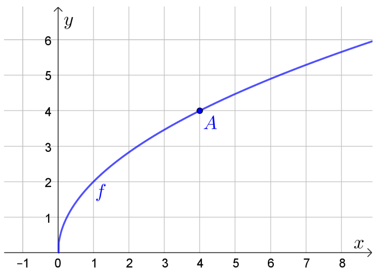
c) Ermittle eine Gleichung der Tangente im Punkt A.

2.7

Für die kubische Funktion f gilt: $f(x) = 2 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 87$

Berechne die lokale Änderungsrate von f an der Stelle $x = 4$.

2.8



Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ ist links dargestellt.

a) Skizziere die Tangente im Punkt $A = (4 \mid f(4))$.

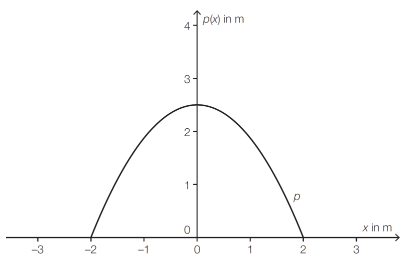
Tatsächlich gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) Berechne $f'(4)$.

2.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Aufblasbare Tunnelzelte erfreuen sich als Messestände immer größerer Beliebtheit.
In der nebenstehenden Abbildung ist die Außenhülle eines Zeltes, die durch den Graphen einer geraden Funktion p modelliert wurde, dargestellt.
In einer Höhe von 2 m werden an der linken und an der rechten Seite der Außenhülle Seile angebracht. Diese werden so gespannt und am Boden befestigt, dass sie wie eine Tangente an die Außenhülle verlaufen.

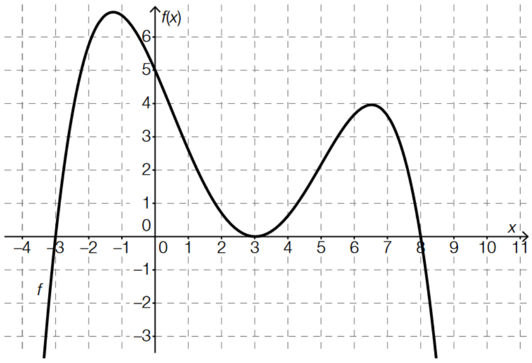


1) Zeichnen Sie in der nebenstehenden Abbildung die Seile ein.

2.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Differenzialquotient an der Stelle $x = 6$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle $x = –3$.	☐
Der Differenzialquotient an der Stelle $x = 1$ ist negativ.	☐
Der Differenzenquotient im Intervall $[–3; 0]$ ist 1.	☐
Die mittlere Änderungsrate ist in keinem Intervall gleich 0.	☐
Der Differenzenquotient im Intervall $[3; 6]$ ist positiv.	☐

2.11

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Um Unebenheiten eines Bodens festzustellen, wird eine Messlatte verwendet.

Das Profil des Bodens kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion p beschrieben werden, die Unterkante der Messlatte kann durch den Graphen einer linearen Funktion f beschrieben werden. Die Messlatte berührt den Boden in den Punkten $P_1 = (x_1 \mid p(x_1))$ und $P_2 = (x_2 \mid p(x_2))$.

Die Steigung der linearen Funktion f ist k.

Eine der nebenstehenden Aussagen stimmt *nicht* mit der obigen Abbildung überein.

1) Kreuzen Sie die *nicht* zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

$k = \frac{p(x_2) - p(x_1)}{x_2 - x_1}$	☐
$p'(x_1) = 0$	☐
$p'(x_2) = k$	☐
$p'(x_1) = p'(x_2)$	☐
$f(x_1) = p(x_1)$	☐

2.12

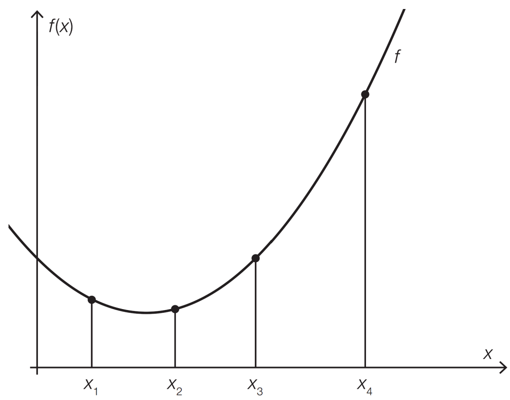
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Nachstehend ist der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades abgebildet. Zusätzlich sind vier Punkte auf dem Graphen mit den x-Koordinaten x_1, x_2, x_3 und x_4 eingezeichnet.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf die Funktion f zutreffenden Aussagen an.

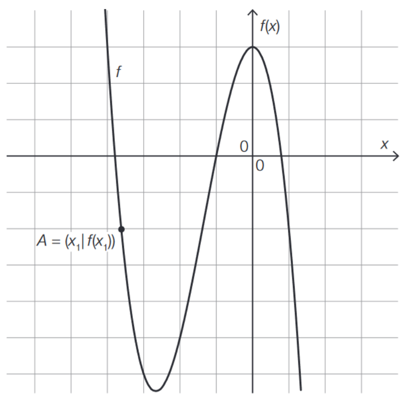
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_2]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_1.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_3]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_3.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_4]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_2.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_2; x_4]$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle x_2.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_3; x_4]$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle x_4.	☐



2.13

In der nebenstehenden Abbildung sind der Graph der Polynomfunktion f und der Punkt $A = (x_1 \mid f(x_1))$ des Graphen von f dargestellt.
Für eine Stelle x_2 in der nebenstehenden Abbildung mit $x_2 > x_1$ gelten folgende Bedingungen:

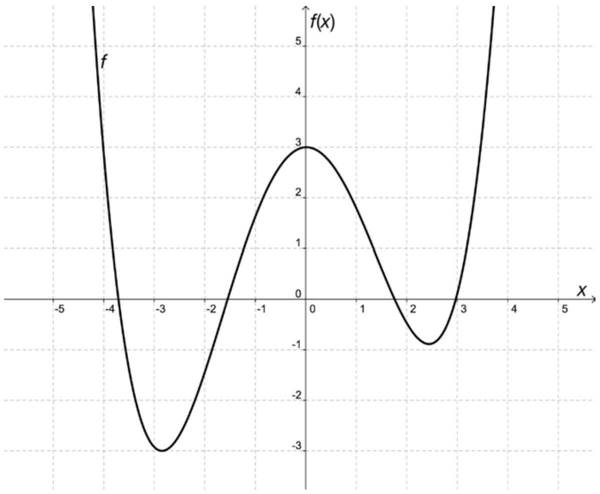
- Der Differenzialquotient von f an der Stelle x_2 ist negativ.
- Der Differenzenquotient von f im Intervall $[x_1; x_2]$ ist null.



Aufgabenstellung:
Kennzeichnen Sie in der nebenstehenden Abbildung denjenigen Punkt $P = (x_2 \mid f(x_2))$, bei dem beide oben genannten Bedingungen erfüllt sind.

2.14

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f:

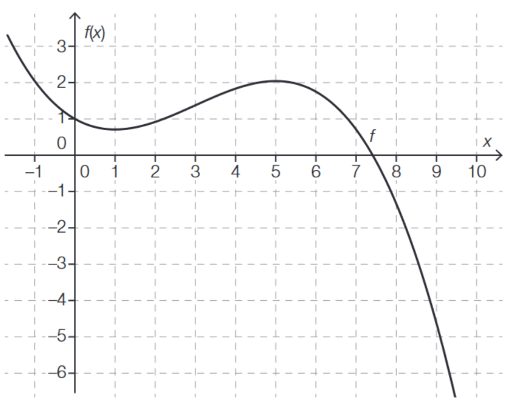


Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$\frac{f(3) - f(-3)}{6} = 0$	☐
$\frac{f(3) - f(0)}{3} < 0$	☐
$f'(3) = 0$	☐
$f'(-2) > 0$	☐
$f'(-1) = f'(1)$	☐

2.15

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades f dargestellt.



Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Im Intervall (0; 2) gibt es eine Stelle a, sodass gilt: $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(0)$	☐
Im Intervall (4; 6) gibt es eine Stelle a, sodass gilt: $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(0)$	☐
Für alle $a \in (0; 1)$ gilt: Je kleiner a ist, desto weniger unterscheidet sich $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0}$ von $f'(0)$.	☐
Für alle $a \in (2; 5)$ gilt: Je größer a ist, desto weniger unterscheidet sich $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0}$ von $f'(0)$.	☐
Für alle $a \in (2; 3)$ gilt: $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} > f'(0)$	☐

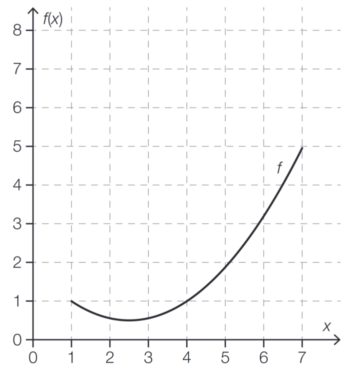
2.16

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[1; 7]$ dargestellt.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nebenstehenden Abbildung denjenigen Punkt P des Graphen von f ein, in dem für die Funktion f der Differenzialquotient dem Differenzenquotienten im Intervall $[1; 7]$ entspricht.



2.1 **a)** 15 **b)** 12,3 **c)** 12,03

2.2 **a)** $y_A = 13$, $y_B = 76$ **b)** 21 **c)** $y = 21 \cdot x - 29$

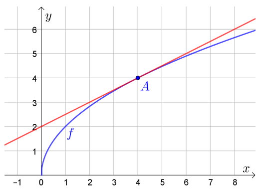
2.3 **a)** $12 + 3 \cdot h$ **b)** $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}(12 + 3 \cdot h) = 12$ **c)** $y = 12 \cdot x - 11$

2.4 **a)** $6 \cdot x_0 + 3 \cdot h$ **b)** $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}(6 \cdot x_0 + 3 \cdot h) = 6 \cdot x_0$ **c)** $f'(x) = 6 \cdot x$

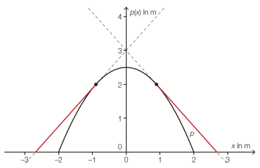
2.5 **a)** $-2 \cdot x_0 - h + 3$ **b)** $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}(-2 \cdot x_0 - h + 3) = -2 \cdot x_0 + 3$ **c)** $f'(x) = -2 \cdot x + 3$

2.6 **a)** $6 + 3 \cdot h + 0{,}5 \cdot h^2$ **b)** $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}(6 + 3 \cdot h + 0{,}5 \cdot h^2) = 6$ **c)** $y = 6 \cdot x - 8$

2.7 Zur Kontrolle: $f(4+h) = 2 \cdot h^3 + 17 \cdot h^2 + 42 \cdot h + 111$ Lokale Änderungsrate: $f'(4) = 42$

2.8 

$f'(4) = \frac{1}{2}$

2.9 

2.10 Richtig sind die 2. Antwort und die 5. Antwort von oben.

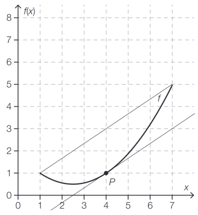
2.11 $p'(x_1) = 0$ stimmt *nicht*.

2.12 Richtig sind die 2. Antwort und die 4. Antwort von oben.

2.13 Schneide die waagrechte Gerade durch A mit dem Graphen. Der rechte Schnittpunkt ist P.

2.14 Richtig sind die 2. Antwort und die 4. Antwort von oben.

2.15 Richtig sind die 3. Antwort und die 5. Antwort von oben.

2.16 

3. Ableitungsregeln

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Ableitungsregeln

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 11. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

3.1

Verwende die Ableitungsregeln, um die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion zu ermitteln.

a) $f(x) = 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x^{-1} - \frac{4}{3 \cdot x^2}$ **b)** $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[4]{x^5}$ **c)** $h(x) = x^e + e^x$

3.2

Verwende die Quotientenregel, um die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion zu ermitteln.

a) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ **b)** $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $h(x) = \frac{42}{1+x^3}$ **d)** $i(x) = \frac{\sin(x)}{e^x}$

3.3

Verwende die Kettenregel, um die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion zu ermitteln.

a) $f(x) = 4 \cdot \sin(2 \cdot x + 5)$ **b)** $g(x) = 8 \cdot e^{0{,}5 \cdot x}$ **c)** $h(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2}$ **d)** $i(x) = \ln(1 - x^2)$

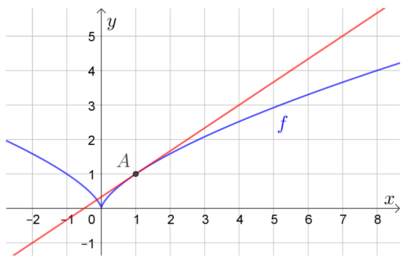
3.4

Verwende die Ableitungsregeln, um die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion zu ermitteln.

a) $f(x) = \frac{x}{3} \cdot e^{-x}$ **b)** $g(x) = 0{,}42 \cdot e^{-x} \cdot \sin(4 \cdot x - 2)$ **c)** $h(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(2 \cdot x - 5)$

3.5

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ist rechts dargestellt.
Im Punkt $A = (1 \mid f(1))$ ist die Tangente eingezeichnet.

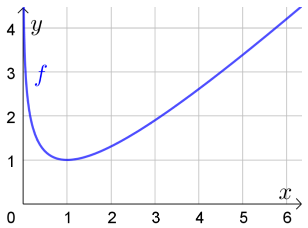


a) Lies die Steigung von f im Punkt A ab.

b) Berechne die Steigung von f im Punkt A mit den Ableitungsregeln.
Vergleiche das Ergebnis mit **1)**.

c) Erstelle eine Gleichung der Tangente im Punkt A.

3.6 MmF



Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x - \ln(x)$ ist links dargestellt.

a) Zeichne links jene Tangente ein, die man vom Ursprung ausgehend an den Funktionsgraphen legen kann.

b) Berechne die Steigung dieser Tangente.

c) Berechne den Berührpunkt dieser Tangente mit dem Graphen.

3.7 MmF

Berechne an welcher Stelle die Tangenten an die beiden Funktionsgraphen die gleiche Steigung haben:

$$f(x) = 3 \cdot e^x + x \quad \text{und} \quad g(x) = 7 \cdot x - 2$$

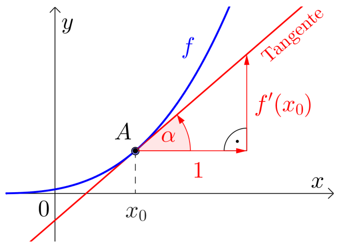
3.8 MmF

Zwischen der Steigung $f'(x_0)$ und dem Steigungswinkel α an der Stelle x_0 besteht folgender Zusammenhang: $\boldsymbol{f'(x_0) = \tan(\alpha)}$

In welchem Punkt hat die Tangente an den Graphen ...

a) ... von $f(x) = e^x - 3 \cdot x$ die Steigung 40 % ?

b) ... von $g(x) = \sqrt{x} + 10$ den Steigungswinkel $\alpha = 16°$?



3.9 MmF

Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^x$ die senkrechte Achse?

3.10 MmF

Ermittle eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1$$

an der Stelle $x = -3$ und ihren Neigungswinkel.

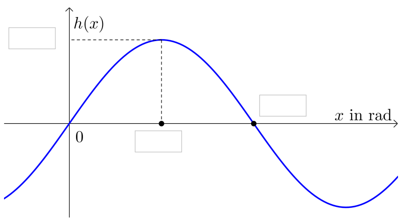
3.11 MmF

Der Graph der Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{5} \cdot \sin(2 \cdot x)$ ist rechts dargestellt.

a) Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

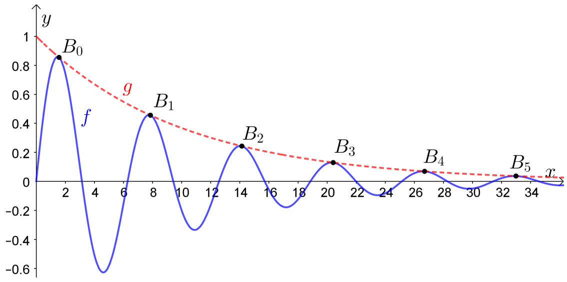
b) Unter welchem Winkel schneidet der Graph die x-Achse bei den beiden dargestellten Nullstellen?

Beachte, dass der Winkel im Bogenmaß gemessen ist.



3.12

Die maximale Auslenkung eines Pendels nimmt aufgrund der Reibung stetig ab. „Gedämpfte Schwingung“



Für die dargestellte Funktion f gilt:

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$$

Die dargestellte Funktion g mit

$$g(x) = e^{-0{,}1 \cdot x}$$

heißt auch *Einhüllende* von f.

a) Berechne den Schnittpunkt B_0.

b) Zeige, dass die Steigung von f im Punkt B_0 *nicht* 0 ist.

c) Zeige, dass die Steigung von f und die Steigung von g im Punkt B_0 gleich groß sind.

3.13

Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Weise damit und der Quotientenregel nach, dass gilt: $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

3.14

Ermittle die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^x$ auf $]0;\infty[$.

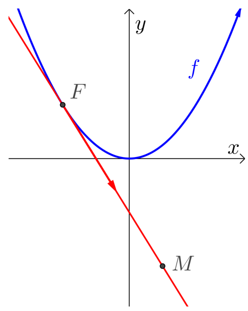
Hinweis: Es gilt $a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \cdot \ln(a)}$ für alle $a > 0$.

3.15

In einem Computerspiel möchte eine Alienflotte die Erde erobern.
Als letzte Hoffnung schicken die Erdlinge ein Raumschiff los,
um das Alien-Mutterschiff im Punkt $M = (1 \mid -8)$ zu zerstören.
Das Raumschiff fliegt entlang des Funktionsgraphen von

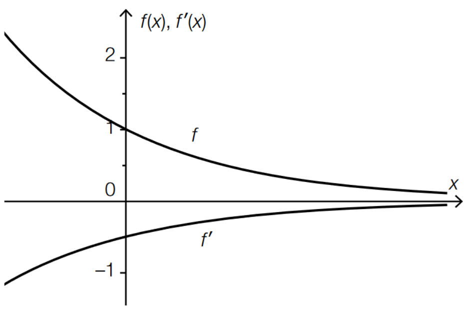
$$f(x) = x^2$$

von links nach rechts. An einer Stelle der Flugkurve kann das Raumschiff einen Laser in Blickrichtung (entlang der Tangente an die Flugkurve) abfeuern.



Berechne die Koordinaten des Punkts $F = (a \mid f(a))$, von dem aus das Alien-Mutterschiff getroffen wird.

3.16



Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = e^{\lambda \cdot x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f'.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Parameters λ an!

$\lambda =$ ____________________

3.17

Der zeitliche Verlauf der Spannung beim Entladen eines Kondensators kann näherungsweise durch eine Funktion u beschrieben werden:

$$u(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

t ... Zeit ab Beginn des Entladevorgangs
$u(t)$ ... Spannung am Kondensator zur Zeit t
U_0 ... Spannung zur Zeit $t = 0$
τ ... Zeitkonstante

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion u an der Stelle $t = 0$.

3.18

Eine Substanz wird aus dem Kühlschrank (Temperatur T_1) genommen und in einen Raum mit der Umgebungstemperatur T_2 gebracht. Der zeitliche Verlauf der Temperatur dieser Substanz kann näherungsweise durch die Funktion T beschrieben werden:

$$T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t \quad \text{mit } T_2 > T_1$$

t ... Zeit seit der Entnahme aus dem Kühlschrank in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C

Die Funktion T kann auch in der folgenden Form angegeben werden:

$$T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

1) Berechnen Sie λ.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die 1. Ableitung von T richtig angibt. [1 aus 5]

$T'(t) = \lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☐
$T'(t) = -\lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☐
$T'(t) = -(T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☐
$T'(t) = -\lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t - 1}$	☐
$T'(t) = \lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t - 1}$	☐

3.19

Über zwei Polynomfunktionen f und g ist bekannt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$g(x) = 3 \cdot f(x) - 2$$

Aufgabenstellung:
Welche der nebenstehenden Aussagen ist jedenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr?
Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

$g'(x) = f'(x)$	☐
$g'(x) = f'(x) - 2$	☐
$g'(x) = 3 \cdot f'(x)$	☐
$g'(x) = 3 \cdot f'(x) - 2$	☐
$g'(x) = 3 \cdot f'(x) - 2 \cdot x$	☐
$g'(x) = -2 \cdot f'(x)$	☐

3.20

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Gegeben sind die zwei differenzierbaren Funktionen $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jeden Fall zutreffen. [2 aus 5]

Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) - h(x)$ gilt: $f'(x) = g'(x) - h'(x)$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = h(k \cdot x)$ gilt: $f'(x) = h'(k \cdot x)$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = k \cdot g(x)$ gilt: $f'(x) = k \cdot g'(x)$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) + k$ gilt: $f'(x) = g'(x) + k \cdot x$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) + h(x)$ gilt: $f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$	☐

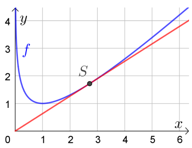
3.1 **a)** $f'(x) = 10 \cdot x - \frac{3}{x^2} + \frac{8}{3 \cdot x^3}$ **b)** $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{4} \cdot \sqrt[4]{x}$ **c)** $h'(x) = e \cdot x^{e-1} + e^x$

3.2 **a)** $f'(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} (= \frac{1}{\cos^2(x)})$ **b)** $g'(x) = \frac{-4 \cdot x}{(x^2-1)^2}$ **c)** $h'(x) = \frac{-126 \cdot x^2}{(1+x^3)^2}$ **d)** $i'(x) = \frac{\cos(x)-\sin(x)}{e^x}$

3.3 **a)** $f'(x) = 8 \cdot \cos(2 \cdot x + 5)$ **b)** $g'(x) = 4 \cdot e^{0,5 \cdot x}$ **c)** $h'(x) = -x \cdot e^{-x^2}$ **d)** $i'(x) = \frac{-2 \cdot x}{1-x^2}$

3.4 **a)** $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-x} - \frac{x}{3} \cdot e^{-x}$ **b)** $g'(x) = -0{,}42 \cdot e^{-x} \cdot \sin(4 \cdot x - 2) + 1{,}68 \cdot e^{-x} \cdot \cos(4 \cdot x - 2)$ **c)** $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(2 \cdot x - 5) + \frac{2}{x \cdot (2 \cdot x - 5)}$

3.5 **a)** $k = \frac{2}{3}$ **b)** $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} \implies f'(1) = \frac{2}{3}$ **c)** $y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3}$

3.6 **a)** 

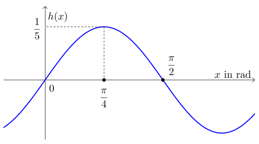
b) $k = 1 - \frac{1}{e} = 0{,}632...$ **c)** $B = (e \mid e - 1) = (2{,}718... \mid 1{,}718...)$

3.7 $x = \ln(2) = 0{,}693...$

3.8 **a)** $(1{,}223... \mid -0{,}2713...)$ **b)** $(3{,}040... \mid 11{,}74...)$

3.9 $45°$

3.10 $y = 16 \cdot x + 37$ $\alpha \approx 86{,}42...°$

3.11 **a)** 

b) Schnittwinkel bei $x = 0$ und $x = \pi/2$: $\alpha = 21{,}80...°$

3.12 **a)** $B_0 = (\frac{\pi}{2} \mid e^{-0,1 \cdot \frac{\pi}{2}})$

b) $f'(x) = \cos(x) \cdot e^{-0,1 \cdot x} + \sin(x) \cdot e^{-0,1 \cdot x} \cdot (-0{,}1) \implies f'(\frac{\pi}{2}) = -0{,}085... \neq 0$

c) $g'(x) = e^{-0,1 \cdot x} \cdot (-0{,}1)$ $g'(\frac{\pi}{2}) = e^{-0,1 \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot (-0{,}1) = f'(\frac{\pi}{2})$ ✓

3.13 $\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ ✓

3.14 $f'(x) = x^x \cdot (1 + \ln(x))$

3.15 $F = (-2 \mid 4)$

3.16 $\lambda = -0{,}5$

3.17 $g(t) = -\frac{U_0}{\tau} \cdot t + U_0$

3.18 **1)** $\lambda = 0{,}0618...$ **2)** 1. Antwort von oben

3.19 3. Antwort von oben

3.20 1. Antwort und 3. Antwort von oben

4. Kurvenuntersuchungen I

MmF-Materialien

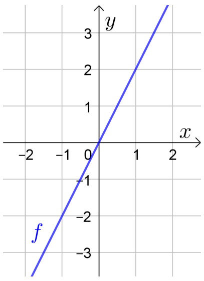
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

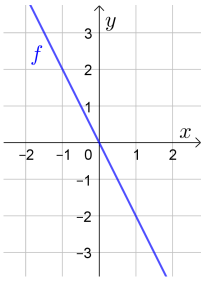
✓ Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen I

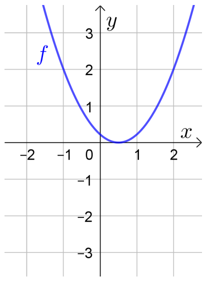
In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 11. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

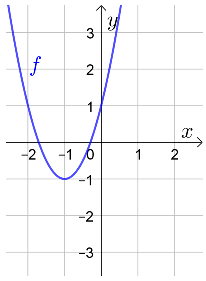
4.1

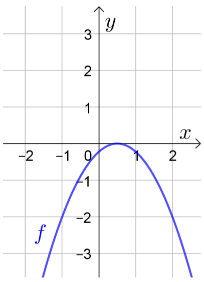
Ordne jedem Funktionsgraphen **1)** – **8)** den Graphen seiner Ableitungsfunktion zu.

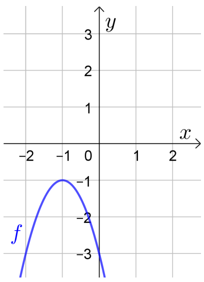
a)


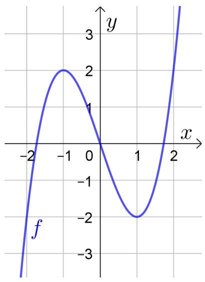
b)


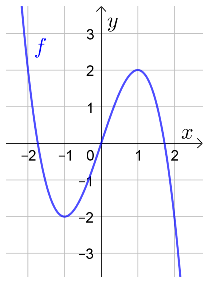
c)


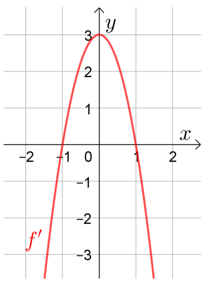
d)


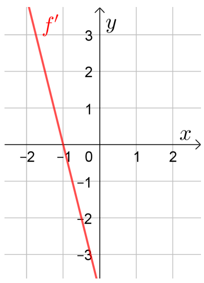
a)


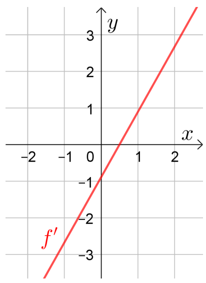
b)


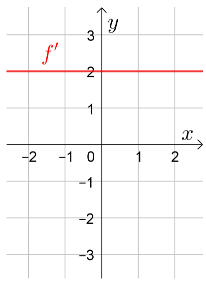
c)


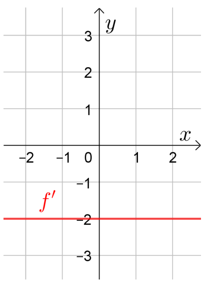
d)


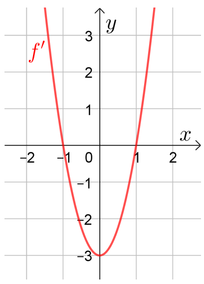
☐


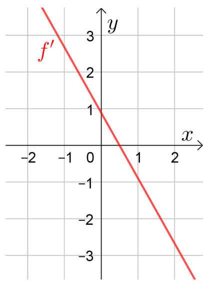
☐


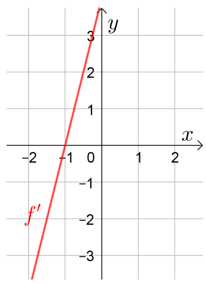
☐


☐


☐


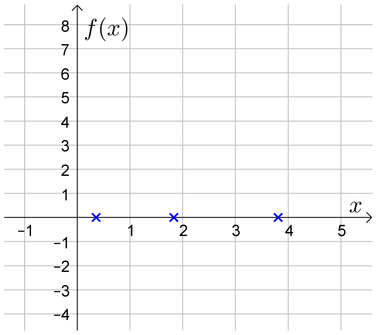
☐


☐


☐


4.2

MmF



Für die kubische Funktion f gilt: $f(x) = -2 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 5$

a) Berechne die Extrempunkte von f.
Ermittle das Monotonieverhalten von f.

b) Die Nullstellen von f sind links eingezeichnet.
Skizziere den Funktionsgraphen von f.
Achte beim Skizzieren darauf, dass die Extrempunkte und die Schnittpunkte mit den Achsen richtig eingezeichnet sind.

4.3

MmF

Für die erste Ableitung einer Funktion f gilt: $f'(x) = 2^x \cdot (x+3) \cdot x^2 \cdot (x-4)$

a) An welchen Stellen hat f eine waagrechte Tangente?

b) Kreuze die zutreffenden Eigenschaften von f' und f an.

	$f'(x)$	f
$x < -3$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ ↗ ☐ ↘
$x = -3$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Hochpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Sattelpunkt
$-3 < x < 0$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ ↗ ☐ ↘
$x = 0$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Hochpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Sattelpunkt
$0 < x < 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ ↗ ☐ ↘
$x = 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Hochpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Sattelpunkt
$x > 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ ↗ ☐ ↘

4.4

MmF

Warum sind die folgenden Aussagen *nicht* allgemeingültig?
Skizziere dazu jeweils einen Funktionsgraphen, der die Aussage widerlegt. („Gegenbeispiel“)

a) Wenn f an der Stelle u eine Nullstelle hat, dann hat auch f' an der Stelle u eine Nullstelle:

$$f(u) = 0 \implies f'(u) = 0$$

b) Wenn f' an der Stelle u eine Nullstelle hat, dann hat auch f an der Stelle u eine Nullstelle:

$$f'(u) = 0 \implies f(u) = 0$$

c) Wenn f an der Stelle u positiv ist, dann ist auch f' an der Stelle u positiv:

$$f(u) > 0 \implies f'(u) > 0$$

d) Wenn f' an der Stelle u positiv ist, dann ist auch f an der Stelle u positiv:

$$f'(u) > 0 \implies f(u) > 0$$

e) Wenn f' an der Stelle u eine Nullstelle hat, dann ist u eine Extremstelle von f.

4.5

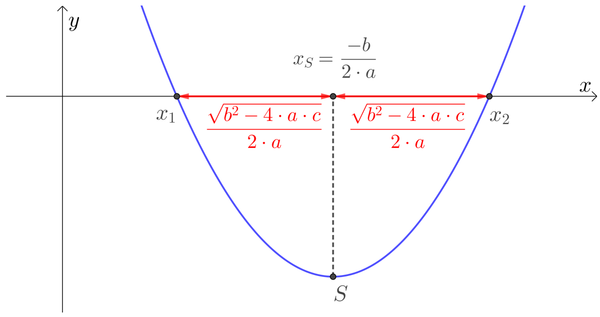
Erinnere dich an die *Große Lösungsformel* für quadratische Gleichungen $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-b}{2 \cdot a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Die Lösungen der Gleichung sind die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Weise mithilfe der Differentialrechnung nach, dass die Scheitelstelle von f tatsächlich bei $x_S = \frac{-b}{2 \cdot a}$ liegt.



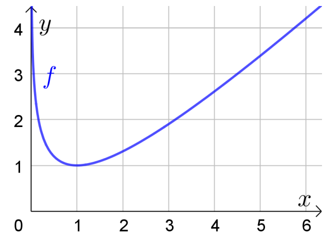
4.6

Im Bild rechts ist der Funktionsgraph von $f(x) = x - \ln(x)$ dargestellt.

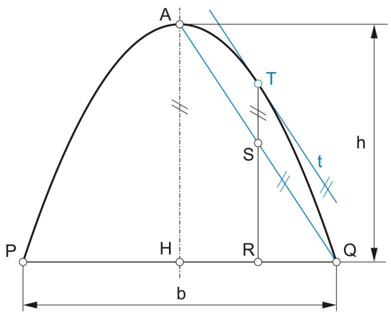
a) Zeichne rechts jene Tangente ein, die man vom Ursprung ausgehend an den Funktionsgraphen legen kann.

b) Berechne die Steigung dieser Tangente.

c) Berechne den Berührpunkt dieser Tangente mit dem Graphen.



4.7



Links im Bild ist ein symmetrischer Parabelbogen (Breite b, Höhe h, Symmetrieachse AH) dargestellt.

Die Tangente t ist parallel zur Sehne AQ.

a) Untersuche, ob der Punkt S die Sehne AQ halbiert.

b) Untersuche, in welchem Verhältnis der Punkt S die Strecke RT teilt.

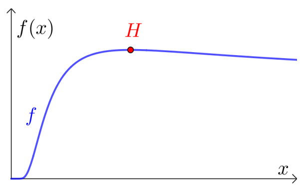
4.8

Ist π^e größer als e^π oder umgekehrt? Begründe ohne Taschenrechner.

Hinweis: Ermittle die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x)}$ auf $]0; \infty[$.

Rechts ist der Graph von f dargestellt. Im Punkt H nimmt f den größten Funktionswert an.

Berechne die Koordinaten von H.



4.9

Ein Skatepark ist ein speziell für Skater/innen eingerichteter Bereich mit Startrampen und verschiedenen Hindernissen, die befahren werden können. Der Verlauf einer Rampe im Querschnitt kann näherungsweise durch folgende quadratische Funktion f modelliert werden:

$$f(x) = \frac{1}{320} \cdot x^2 \qquad \text{mit } 0 \leq x \leq 160$$

$x \ldots$ horizontale Koordinate in Zentimetern (cm)
$f(x) \ldots$ Höhe an der Stelle x in cm

1) Berechnen Sie, in welcher Höhe diese Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat.

4.10

Der Wasserstand in einem Behälter kann in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden durch folgende Polynomfunktion h annähernd beschrieben werden:

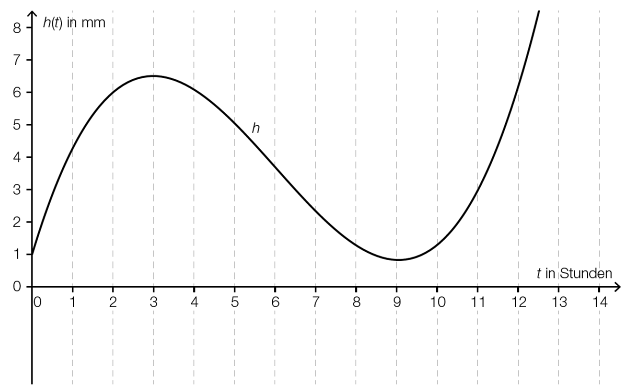


Abbildung 1

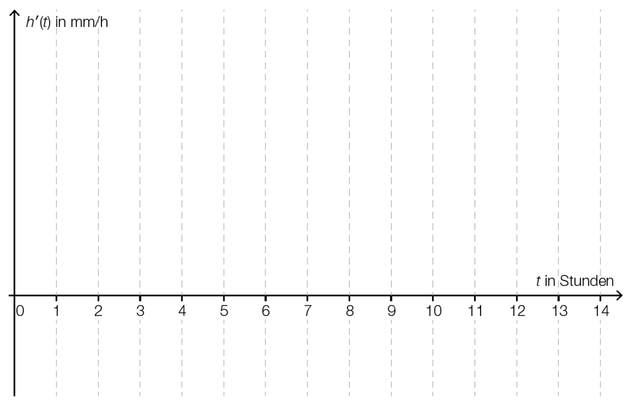


Abbildung 2

1) Skizzieren Sie in der Abbildung 2 den Graphen der 1. Ableitung der Funktion h.

2) Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 1 die mittlere Änderungsrate des Wasserstandes in den ersten 2 Stunden.

3) Beschreiben Sie, wie man mithilfe von Abbildung 1 die momentane Änderungsrate des Wasserstandes zum Zeitpunkt $t = 2$ Stunden bestimmen kann.

4) Argumentieren Sie, welchen Grad die in Abbildung 1 dargestellte Polynomfunktion mindestens haben muss.

4.11

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot e^x$.

Aufgabenstellung:
Die nebenstehenden Aussagen beziehen sich auf Eigenschaften der Funktion f bzw. deren Ableitungsfunktion f'.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es gibt eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2$.	☐
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) > f'(x + 1)$.	☐
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) = 3 \cdot f(x)$.	☐
Es gibt eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.	☐
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) \geq 0$.	☐

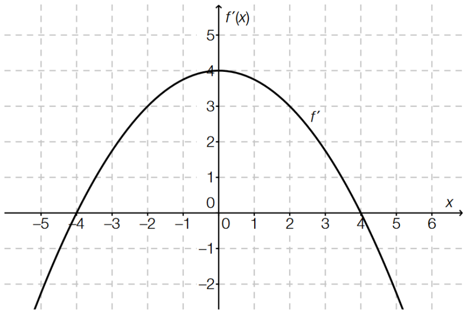
4.12

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f dargestellt.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktion f im Intervall $]-5; 5[$ jedenfalls lokale Extrema hat!

Die für die Bestimmung relevanten Punkte mit ganzzahligen Koordinaten können der Abbildung entnommen werden.



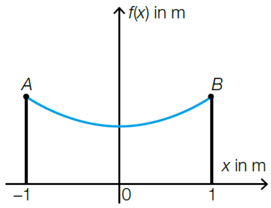
4.13

Eine durchhängende Kette zwischen 2 Masten gleicher Höhe, die 2 m voneinander entfernt sind, kann mit der Funktion f beschrieben werden.

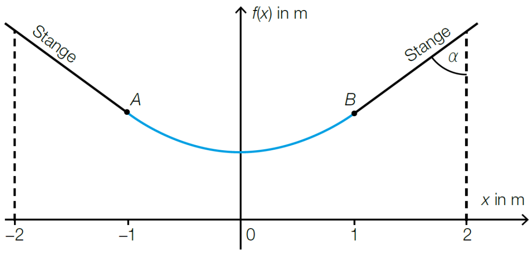
$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$|x| \ldots$ Abstand von der vertikalen Achse in m

$f(x) \ldots$ Höhe der Kette über dem Boden in m



Die Kette soll an den Punkten A und B an 2 Stangen befestigt werden, die an den 2 Punkten die gleichen Steigungswinkel wie die Kette haben.



1) Berechnen Sie denjenigen Winkel α, den die Stangen mit der Senkrechten einschließen.

4.14

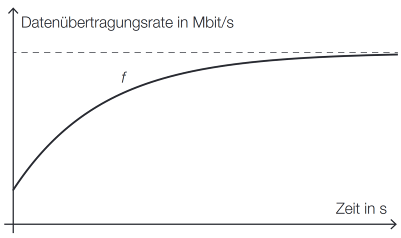
In der nachstehenden Abbildung ist die Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Zeit bei einem bestimmten Downloadvorgang dargestellt.

Dabei gilt:

$$f(t) = 15 - 12 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t} \quad \text{mit } t \geq 0$$

$t \ldots$ Zeit in s

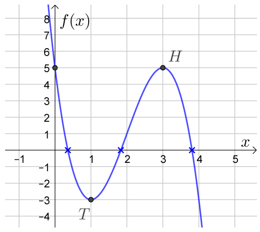
$f(t) \ldots$ Datenübertragungsrate zur Zeit t in Mbit/s



1) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion f monoton steigend ist.

4.1 1.Reihe: **8)**, **6)**, **3)**, **1)** 2.Reihe: **2)**, **7)**, **5)**, **4)**

4.2 **a)** Tiefpunkt $T = (1 \mid -3)$ Hochpunkt $H = (3 \mid 5)$ MV: $]-\infty; 1[\ \searrow$ $]1; 3[\ \nearrow$ $]3; \infty[\ \searrow$ **b)**

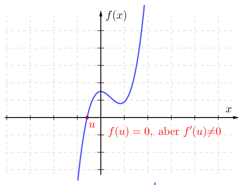


4.3 **a)** An den Stellen -3, 0 und 4 hat f eine waagrechte Tangente.

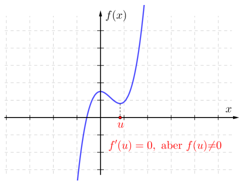
b)

	$f'(x)$			f		
$x < -3$	☐ $= 0$	☒ > 0	☐ < 0		☒ ↗	☐ ↘
$x = -3$	☒ $= 0$	☐ > 0	☐ < 0	☒ Hochpunkt	☐ Tiefpunkt	☐ Sattelpunkt
$-3 < x < 0$	☐ $= 0$	☐ > 0	☒ < 0		☐ ↗	☒ ↘
$x = 0$	☒ $= 0$	☐ > 0	☐ < 0	☐ Hochpunkt	☐ Tiefpunkt	☒ Sattelpunkt
$0 < x < 4$	☐ $= 0$	☐ > 0	☒ < 0		☐ ↗	☒ ↘
$x = 4$	☒ $= 0$	☐ > 0	☐ < 0	☐ Hochpunkt	☒ Tiefpunkt	☐ Sattelpunkt
$x > 4$	☐ $= 0$	☒ > 0	☐ < 0		☒ ↗	☐ ↘

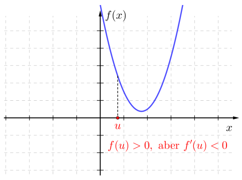
4.4 **a)**



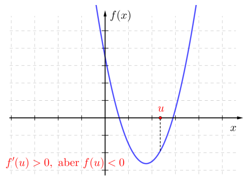
b)



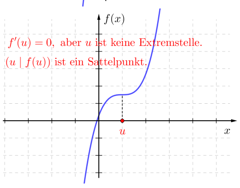
c)



d)

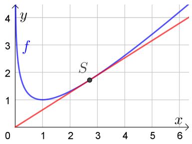


e)



4.5 $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ $f'(x) = 0 \implies 2 \cdot a \cdot x + b = 0 \implies x = \frac{-b}{2 \cdot a}$

4.6 **a)**



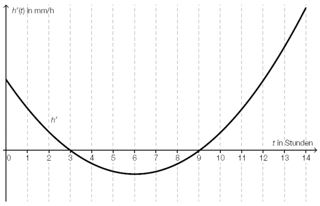
b) $k = 1 - \frac{1}{e} = 0{,}632\ldots$ **c)** $S = (e \mid e - 1) = (2{,}718\ldots \mid 1{,}718\ldots)$

4.7 **a)** S halbiert AQ **b)** $RS : ST = 2 : 1$

4.8 $H = \left(e \mid e^{\frac{1}{e}}\right) \implies e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}} \implies e^{\pi} > \pi^{e}$

4.9 26,66… cm

4.10



Mittlere Änderungsrate: 2,5 mm/h
Die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 2$ ist die Steigung der Tangente im Punkt $(2 \mid h(2))$.
h' hat mindestens 2 Nullstellen (Hoch- und Tiefpunkt von h), also hat h' mindestens Grad 2. Die Funktion h hat damit mindestens Grad 3.

4.11 Richtig sind die 1. Antwort und die 5. Antwort von oben.

4.12 An den Stellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$ hat f lokale Extrema.

4.13 $\alpha = 23{,}04\ldots^{\circ}$

4.14 $f'(t) = 3{,}6 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$
Für alle $t \geq 0$ gilt $e^{-0{,}3 \cdot t} > 0$ und damit $f'(t) > 0$.
Die Funktion f ist also überall streng monoton steigend.

5. KURVENUNTERSUCHUNGEN II

MmF-Materialien

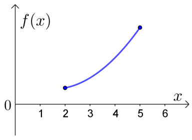
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen II

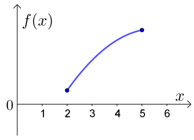
In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 11. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

5.1

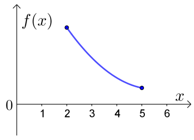
Der Graph einer Funktion f ist im Intervall $[2; 5]$ dargestellt.
Das Vorzeichen von f, f' und f'' ändert sich dort jeweils *nicht*.
Trage jeweils passend $<$ oder $>$ in die Kästchen ein.

a)


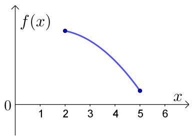
$f(x) \; \square \; 0$
$f'(x) \; \square \; 0$
$f''(x) \; \square \; 0$

b)


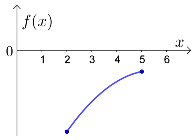
$f(x) \; \square \; 0$
$f'(x) \; \square \; 0$
$f''(x) \; \square \; 0$

c)


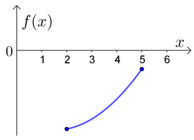
$f(x) \; \square \; 0$
$f'(x) \; \square \; 0$
$f''(x) \; \square \; 0$

d)


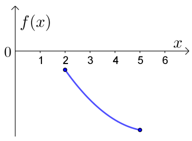
$f(x) \; \square \; 0$
$f'(x) \; \square \; 0$
$f''(x) \; \square \; 0$

e)


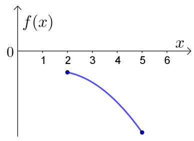
$f(x) \; \square \; 0$
$f'(x) \; \square \; 0$
$f''(x) \; \square \; 0$

f)


$f(x) \; \square \; 0$
$f'(x) \; \square \; 0$
$f''(x) \; \square \; 0$

g)


$f(x) \; \square \; 0$
$f'(x) \; \square \; 0$
$f''(x) \; \square \; 0$

h)


$f(x) \; \square \; 0$
$f'(x) \; \square \; 0$
$f''(x) \; \square \; 0$

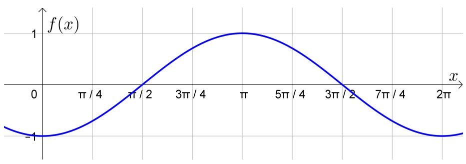
Aus dem Vorzeichen von f bzw. f' bzw. f'' kann man also *nicht* auf die jeweils anderen Vorzeichen schließen.

5.2

Rechts ist der Graph der Funktion f mit

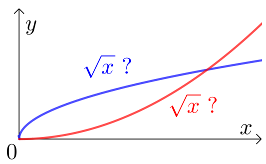
$$f(x) = -\cos(x)$$

dargestellt. Trage jeweils $>$, $<$ oder $=$ richtig in die Kästchen ein.



$f(0) \; \square \; 0$	$f(\pi/2) \; \square \; 0$	$f(\pi) \; \square \; 0$	$f(3\cdot\pi/2) \; \square \; 0$	$f(2\cdot\pi) \; \square \; 0$
$f'(0) \; \square \; 0$	$f'(\pi/2) \; \square \; 0$	$f'(\pi) \; \square \; 0$	$f'(3\cdot\pi/2) \; \square \; 0$	$f'(2\cdot\pi) \; \square \; 0$
$f''(0) \; \square \; 0$	$f''(\pi/2) \; \square \; 0$	$f''(\pi) \; \square \; 0$	$f''(3\cdot\pi/2) \; \square \; 0$	$f''(2\cdot\pi) \; \square \; 0$

5.3



Die Wurzelfunktion w mit $w(x) = \sqrt{x}$ ist für alle $x \geq 0$ streng monoton wachsend.
Ist ihr Funktionsgraph negativ gekrümmt oder positiv gekrümmt?
Begründe mithilfe von w''.

5.4

Die Gleichung der 2. Ableitungsfunktion f'' einer Funktion f ist gegeben.
Ermittle das Krümmungsverhalten von f. Hinweis: An welchen Stellen gilt $f''(x) = 0$? Wechselt f'' dort das Vorzeichen?

a) $f''(x) = -3 \cdot x \cdot (x - 4)$

	f''	f
$x < 0$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ (+) ☐ (−)
$x = 0$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Wendepunkt ☐ kein Wendepunkt
$0 < x < 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ (+) ☐ (−)
$x = 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Wendepunkt ☐ kein Wendepunkt
$x > 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ (+) ☐ (−)

b) $f''(x) = (x + 3) \cdot (x - 1)^2$

	f''	f
$x < -3$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ (+) ☐ (−)
$x = -3$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Wendepunkt ☐ kein Wendepunkt
$-3 < x < 1$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ (+) ☐ (−)
$x = 1$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Wendepunkt ☐ kein Wendepunkt
$x > 1$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ (+) ☐ (−)

5.5

Das qualitative Verhalten der Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^3 + \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{9}{4} \cdot x - \frac{5}{2}$$

soll untersucht werden.

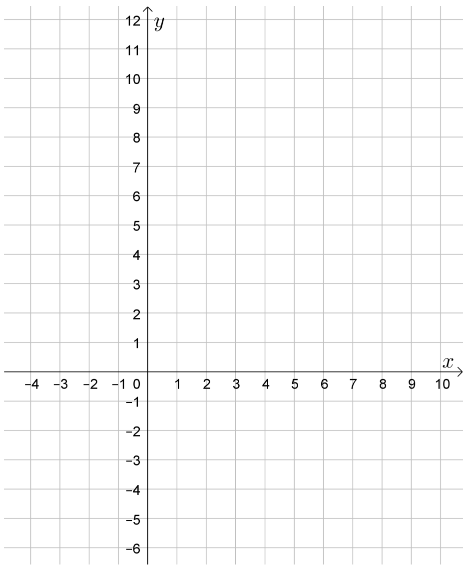
a) Ermittle die Ableitungsfunktionen f', f'' und f'''.

b) Berechne alle Nullstellen von f'.
Entscheide jeweils mithilfe der 2. Ableitung, ob f dort ein lokales Minimum oder Maximum hat.
Ermittle das Monotonieverhalten von f.

c) Berechne die Nullstelle von f''.
Entscheide mithilfe der 3. Ableitung, ob f' dort ein lokales Minimum oder Maximum hat.
Ermittle das Krümmungserhalten von f.
Stelle eine Gleichung der Wendetangente auf.

d) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f.

Zeichne zuerst ein: Hochpunkt, Tiefpunkt, Wendepunkt, Wendetangente



5.6

- Jede lineare Funktion f mit $f(x) = a_1 \cdot x^{\mathbf{1}} + a_0$ und $a_1 \neq 0$ ist eine Polynomfunktion vom Grad **1**.
  Sie hat höchstens **1** reelle Nullstelle. (Tatsächlich genau eine Nullstelle, weil die Steigung nicht 0 ist.)
- Jede quadratische Funktion f mit $f(x) = a_2 \cdot x^{\mathbf{2}} + a_1 \cdot x + a_0$ und $a_2 \neq 0$ ist eine Polynomfunktion vom Grad **2**. Sie hat höchstens **2** reelle Nullstellen.
- Jede kubische Funktion f mit $f(x) = a_3 \cdot x^{\mathbf{3}} + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ und $a_3 \neq 0$ ist eine Polynomfunktion vom Grad **3**. Sie hat höchstens **3** reelle Nullstellen.
- Allgemein folgt aus dem sogenannten Fundamentalsatz der Algebra:
  Jede Polynomfunktion f vom Grad $\boldsymbol{n}$ hat höchstens $\boldsymbol{n}$ reelle Nullstellen.

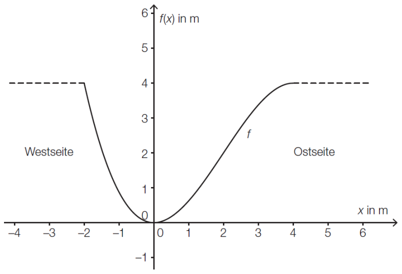
a) Wie viele Extrempunkte kann eine Polynomfunktion f vom Grad 4 also höchstens haben?

b) Wie viele Hochpunkte kann eine Polynomfunktion f vom Grad 4 also höchstens haben?

c) Wie viele Wendepunkte kann eine Polynomfunktion f vom Grad 4 also höchstens haben?

5.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung



Das Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes kann annähernd durch den Graphen der Polynomfunktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \quad \text{mit } -2 \leq x \leq 4$$

x, $f(x)\ldots$ Koordinaten in Metern (m)

Der Graph dieser Funktion ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

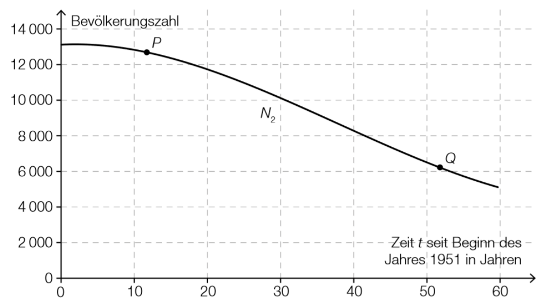
1) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten ansteigt.

5.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In manchen Orten Österreichs, z. B. in der steirischen Gemeinde Eisenerz, nimmt die Bevölkerungszahl ab. Zur mathematischen Beschreibung dieser Entwicklung können verschiedene Modelle verwendet werden.

Im Diagramm wird die Entwicklung der Bevölkerungszahl von Eisenerz im Zeitraum von 1951 bis 2011 näherungsweise durch den Graphen der Polynomfunktion N_2 dargestellt.



1) Ordnen Sie den Punkten P und Q jeweils die an der entsprechenden Stelle zutreffende Aussage aus A bis D zu.

[2 zu 4]

P	
Q	

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

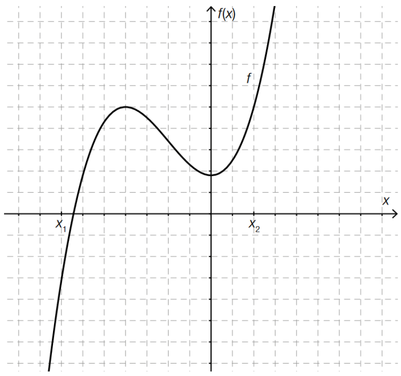
5.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der gegebenen Grafik den Graphen der Ableitungsfunktion f' im Intervall $[x_1; x_2]$ und markieren Sie gegebenenfalls die Nullstellen!



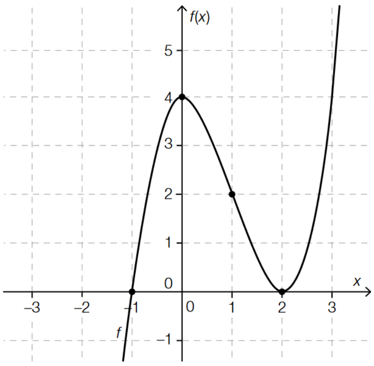
5.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Ableitungsfunktion f' der Funktion f zu?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!



Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall (0; 2) negativ.	☐
Die Funktion f' ist im Intervall (–1; 0) streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 2$ eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.	☐

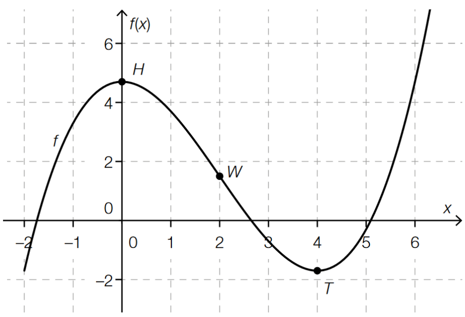
5.11

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades.
Die eingezeichneten Punkte sind der Hochpunkt $H = (0 \mid f(0))$, der Wendepunkt $W = (2 \mid f(2))$ und der Tiefpunkt $T = (4 \mid f(4))$ des Graphen.

Aufgabenstellung:

Nachstehend sind fünf Aussagen über die zweite Ableitung von f gegeben.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

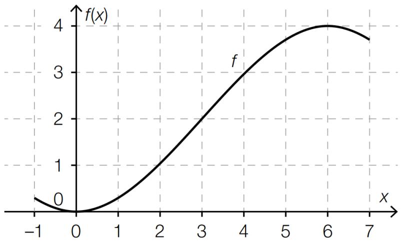


Für alle x aus dem Intervall [–1; 1] gilt: $f''(x) < 0$.	☐
Für alle x aus dem Intervall [1; 3] gilt: $f''(x) < 0$.	☐
Für alle x aus dem Intervall [3; 5] gilt: $f''(x) < 0$.	☐
$f''(0) = f''(4)$	☐
$f''(2) = 0$	☐

5.12

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad 3 im Intervall $[-1; 7]$ dargestellt. Alle lokalen Extremstellen sowie die Wendestelle von f im Intervall $[-1; 7]$ sind ganzzahlig und können aus der Abbildung abgelesen werden.



Aufgabenstellung:

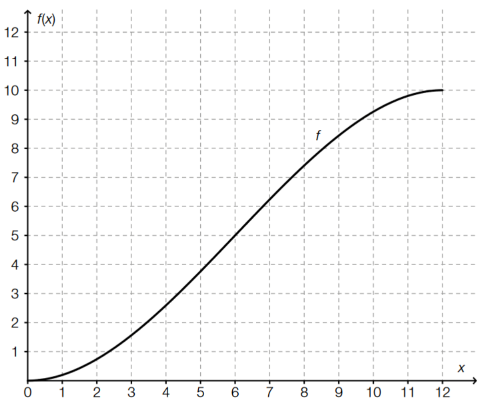
Kreuzen Sie die beiden auf die Funktion f zutreffenden Aussagen an!

$f''(3) = 0$	☐
$f'(1) > f'(3)$	☐
$f''(1) = f''(5)$	☐
$f''(1) > f''(4)$	☐
$f'(3) = 0$	☐

5.13

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die nachstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Graphen einer Polynomfunktion f.
Die Tangentensteigung an der Stelle $x = 6$ ist maximal.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für die gegebene Funktion f zutreffenden Aussagen an!

$f''(6) = 0$	☐
$f''(11) < 0$	☐
$f''(2) < f''(10)$	☐
$f'(6) = 0$	☐
$f'(7) < f'(10)$	☐

5.1 **a)** $>, >, >$ **b)** $>, >, <$ **c)** $>, <, >$ **d)** $>, <, <$ **e)** $<, >, <$ **f)** $<, >, >$ **g)** $<, <, >$ **h)** $<, <, <$

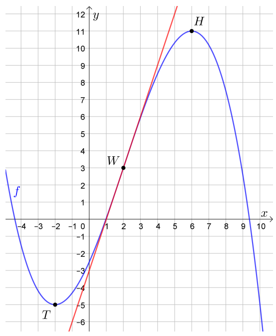
5.2

$f(0) < 0$	$f(\pi/2) = 0$	$f(\pi) > 0$	$f(3\pi/2) = 0$	$f(2\pi) < 0$
$f'(0) = 0$	$f'(\pi/2) > 0$	$f'(\pi) = 0$	$f'(3\pi/2) < 0$	$f'(2\pi) = 0$
$f''(0) > 0$	$f''(\pi/2) = 0$	$f''(\pi) < 0$	$f''(3\pi/2) = 0$	$f''(2\pi) > 0$

5.3 $w''(x) = -\dfrac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \underbrace{-\dfrac{1}{4}}_{<0} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}}_{>0} < 0$ Die Wurzelfunktion also für alle $x \geq 0$ negativ gekrümmt.

5.4 **a)** $]-\infty; 0[\ \frown\,-$ $]0; 4[\ \smile\,+$ $]4; \infty[\ \frown\,-$ (zwei Wendestellen $x = 0$ und $x = 4$)

b) $]-\infty; -3[\ \frown\,-$ $]-3; \infty[\ \smile\,+$ (eine Wendestelle $x = -3$)



5.5 **a)** $f'(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{4}$ $f''(x) = -\frac{3}{8} \cdot x + \frac{3}{4}$ $f'''(x) = -\frac{3}{8}$

b) $f'(-2) = 0$, $f''(-2) > 0 \implies f$ hat ein lokales Minimum an der Stelle $x = -2$.
$f'(6) = 0$, $f''(6) < 0 \implies f$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x = 6$.
Monotonieverhalten: $]-\infty; -2[\ \searrow$ $]-2; 6[\ \nearrow$ $]6; \infty[\ \searrow$

c) $f''(2) = 0$, $f'''(2) < 0 \implies f'$ hat ein lokales Maximum an der Stelle 2.
Krümmungsverhalten: $]-\infty; 2[\ \smile$ $]2; \infty[\ \frown$
Wendetangente: $y = 3 \cdot x - 3$

d) $T = (-2 \mid -5)$, $H = (6 \mid 11)$, $W = (2 \mid 3)$

5.6 **a)** Bei jeder Extremstelle gilt $f'(x) = 0$ (Tangente waagrecht). f' ist eine Polynomfunktion vom Grad 3. Sie hat also höchstens 3 Nullstellen. f kann also höchstens 3 Extrempunkte haben.

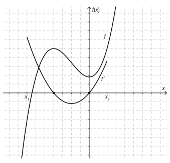
b) f hat höchstens 3 Extremstellen (siehe **a)**). Benachbarte Extrempunkte können bei einer Polynomfunktion vom Grad ≥ 1 nicht beide Hochpunkte sein. f hat also höchstens 2 Hochpunkte. (Hochpunkt-Tiefpunkt-Hochpunkt)

c) Bei einer Wendestelle ändert sich das Krümmungsverhalten. Es gilt dort $f''(x) = 0$. f'' ist eine Polynomfunktion vom Grad 2. f kann also höchstens 2 Wendepunkte haben.

5.7 $x = 2$

5.8 $P \rightsquigarrow C$, $Q \rightsquigarrow B$

5.9



5.10 Richtig sind die 1. Antwort und die 5. Antwort von oben.

5.11 Richtig sind die 1. Antwort und die 5. Antwort von oben.

5.12 Richtig sind die 1. Antwort und die 4. Antwort von oben.

5.13 Richtig sind die 1. Antwort und die 2. Antwort von oben.

6. Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 11. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

6.1

Eine Polynomfunktion 2. Grades hat an der Stelle $x = 3$ die Steigung $k = 4$ und bei $E = (2 \mid -3)$ einen Extrempunkt. Ermittle die Funktionsgleichung.

6.2

Die kubische Polynomfunktion f mit Gleichung

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x - 25$$

hat im Punkt $S = (3 \mid 2)$ einen Sattelpunkt. Berechne die Koeffizienten a, b und c.

6.3

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat ein lokales Maximum im Punkt $M = (-1 \mid 2)$, verläuft durch den Punkt $P = (-3 \mid -4)$ und hat an der Stelle $x = 3$ den Steigungswinkel $45°$. Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, aus dem die Koeffizienten der Polynomfunktion berechnet werden können.

6.4

Gesucht ist die Gleichung einer Polynomfunktion 3. Grades. Der Punkt $(-1 \mid 1)$ liegt auf dem Graphen. Die Tangente an den Graphen in diesem Punkt ist horizontal. Die Gleichung der Tangente in jenem Punkt, in dem der Graph die y-Achse schneidet, lautet $y + 6 \cdot x + 3 = 0$.

6.5

Gesucht ist die Gleichung einer Polynomfunktion 3. Grades. An der Stelle $x = -1$ hat die Funktion eine Wendestelle mit Wendetangente $y + 3 \cdot x + 5 = 0$ und eine Nullstelle bei $x = -2$.

6.6

Gesucht ist die Gleichung einer Polynomfunktion 3. Grades. Die Funktion hat bei $x = 2$ eine Wendestelle mit Wendetangente $9 \cdot y + 3 \cdot x = 8$. Der Graph verläuft durch den Ursprung.

6.7

Eine Polynomfunktion 3. Grades wird durch $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.

a) Welche Bedeutung hat der Wert von d für den Graphen von f?

b) Berechne $f'(x)$. Welche Bedeutung hat der Wert von c für den Graphen von f?

c) Berechne $f''(x)$. Welche Bedeutung hat das Vorzeichen von a auf die Gestalt des Graphen von f?

d) Angenommen, es gilt $a = b = 1$. Für welche Werte von c und d ist f überall streng monoton wachsend?

e) Es gibt unendlich viele Polynomfunktionen 3. Grades, die den Wendepunkt $(1 \mid 0)$ und die Wendetangente $y = x - 1$ haben. Drücke die Koeffizienten b, c und d dieser Funktionenschar durch a aus.

6.8

Berechne a und b so, dass die stückweise definierte Funktion f überall stetig und differenzierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^3 - x^2 + 3 \cdot x - 4, & \text{falls } x < 2. \\ 2 \cdot x^2 + b \cdot x - 8, & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

Der Übergang an der Stelle $x = 2$ soll also sprungfrei und knickfrei sein.

6.9

Die mittlere Tagestemperatur in Bregenz soll für einen bestimmten Zeitraum durch eine Polynomfunktion 3. Grades T angenähert werden:

$$T(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$

$t \ldots$ Zeit in Tagen
$T(t) \ldots$ mittlere Tagestemperatur zur Zeit t in °C

Es wurden folgende Daten ermittelt:
Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) lag die mittlere Tagestemperatur bei -5 °C.
Zur Zeit $t = 98$ Tage betrug sie 8 °C; zu dieser Zeit lag auch der Wendepunkt des Temperaturverlaufs vor.
Zur Zeit $t = 210$ Tage erreichte die mittlere Tagestemperatur 20 °C.

a) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

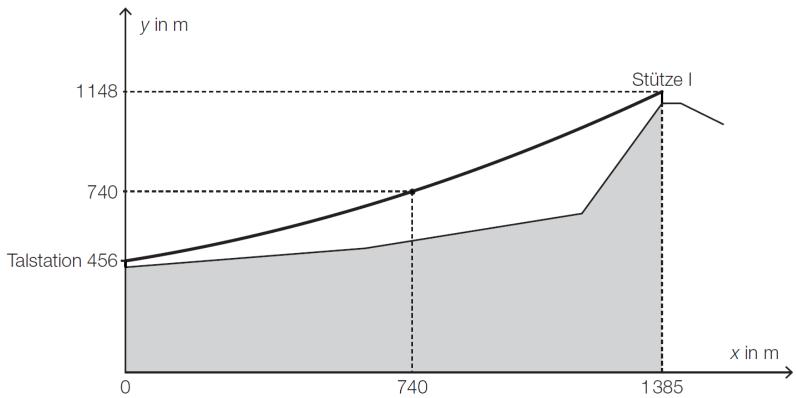
6.10

In nachstehender Abbildung ist der Verlauf des Tragseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.

Aufgrund des Eigengewichts hängt das Tragseil zwischen der Talstation und der Stütze I durch. Sein Verlauf kann näherungsweise als Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

beschrieben werden (siehe nebenstehende Abbildung).



1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b und c ermittelt werden können.

2) Ermitteln Sie a, b und c.

6.11

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Im Computerspiel Angry Birds muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung.
Die Flugbahn des Vogels Matilda kann durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden. Der Funktionsgraph schneidet die vertikale Achse bei 12. Er verläuft durch die Punkte $A = (1 \mid 16)$ und $B = (5 \mid 32)$. A ist ein Hochpunkt des Funktionsgraphen.

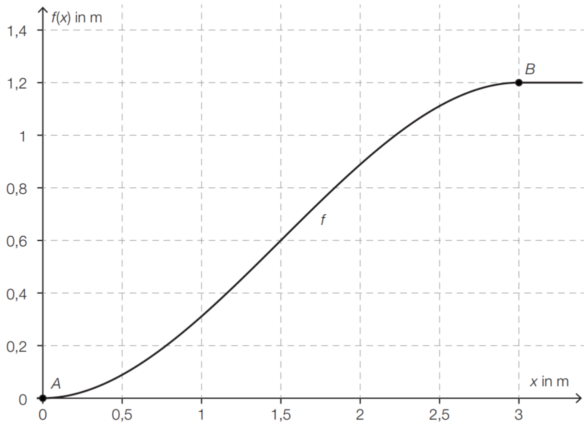
1) Stellen Sie mithilfe der angegebenen Informationen ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

2) Berechnen Sie eine Gleichung der Polynomfunktion.

6.12

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Minigolfball soll von der horizontalen Abschlagfläche auf eine höhergelegene horizontale Plattform gerollt werden. Der Verlauf der Bahn im Querschnitt kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.



Die Bahn soll in den Punkten A und B knickfrei auf die jeweilige Ebene führen (siehe nachstehende Abbildung). Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an diesen Stellen den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

1) Geben Sie an, welche Steigung die Funktion f in den Punkten A und B haben muss.

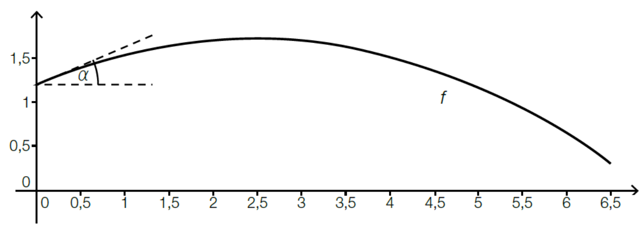
2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion f.

3) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion f.

6.13

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Sprungkurven beim Weitsprung lassen sich näherungsweise durch quadratische Funktionen beschreiben.
Der Körperschwerpunkt eines Weitspringers befindet sich beim Absprung in einer Höhe von 1,2 m. Der Absprungwinkel α beträgt 23°. Die Sprungweite beträgt 6,5 m. An der Stelle der Landung befindet sich der Körperschwerpunkt 30 cm über dem Boden. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Funktion f dargestellt.



$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x … horizontale Entfernung des Körperschwerpunkts von der Absprungstelle in m
$f(x)$ … horizontale Entfernung des Körperschwerpunkts von der Absprungstelle in m

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung des Koeffizienten a, b und c.

6.14

Die Geschwindigkeit eines Autos erreicht nach 25 s ihr Maximum von 15 Metern pro Sekunde (m/s) und nach einer Fahrzeit von 50 s ist sie gleich null. Die Geschwindigkeit kann mithilfe einer quadratischen Funktion

$$v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$$

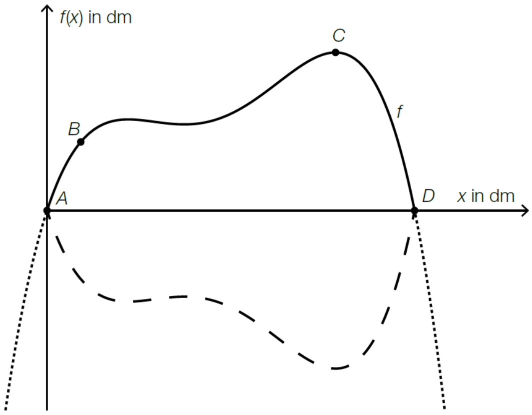
beschrieben werden.

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c auf.

2) Ermitteln Sie diejenige Funktion, die die Geschwindigkeit des Autos in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

6.15

Abrissbirnen sind kugel- oder birnenförmige Werkzeuge zum Abreißen von Gebäuden.
Eine Abrissbirne kann als Körper modelliert werden, der durch Rotation des Graphen der Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ um die x-Achse entsteht.



Dabei gilt:

$A = (0 \mid 0)$, $B = (1{,}1 \mid 2{,}2)$, $C = (9{,}4 \mid 5{,}1)$, $D = (12 \mid 0)$

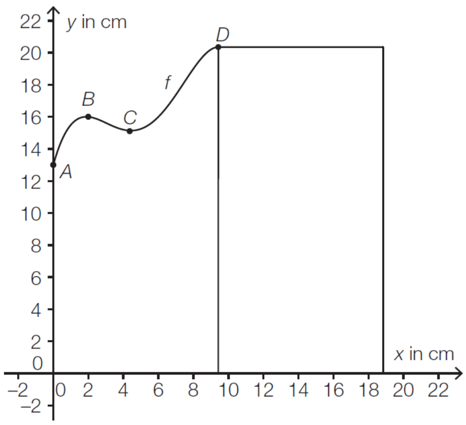
Im Punkt C hat die Abrissbirne den größten Durchmesser.

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu A, B, C und D ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion f.

2) Ermitteln Sie die Koeffizienten von f.

6.16

Die Form einer Grußkarte kann folgendermaßen in einem Koordinatensystem dargestellt werden:



Der gewellte Teil der Begrenzungslinie der Karte kann durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

beschrieben werden und verläuft durch folgende Punkte:

$A = (0 \mid 13)$, $B = (2 \mid 16)$, $C = (4{,}36 \mid 15{,}1)$, $D = (9{,}42 \mid 20{,}35)$

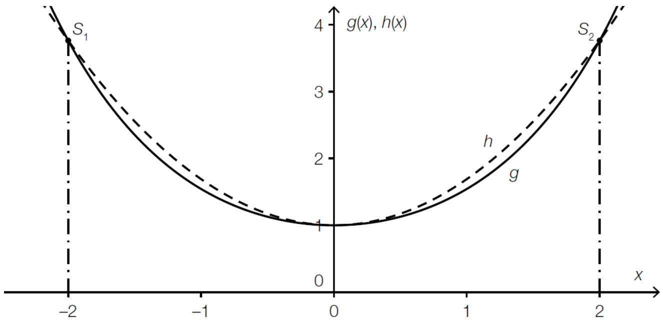
Im Punkt D hat der Graph von f eine waagrechte Tangente.

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

6.17

Der Verlauf eines zwischen zwei Punkten S_1 und S_2 durchhängenden Seils kann durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ dargestellt werden. Näherungsweise kann dieser Seilverlauf durch den Graphen einer quadratischen Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + c$ dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).
Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.



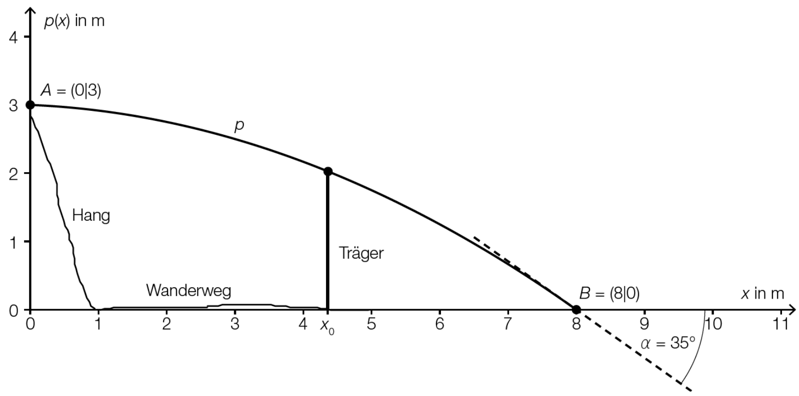
1) Lesen Sie aus der nebenstehenden Abbildung den Parameter c ab.

2) Ermitteln Sie den Parameter a.

3) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Graphen von g und h im Schnittpunkt S_2.

6.18

Die nachstehende Abbildung zeigt die Profillinie einer parabelförmigen Rampe, die für eine Mountainbike-Downhill-Strecke über einem Wanderweg errichtet werden soll.



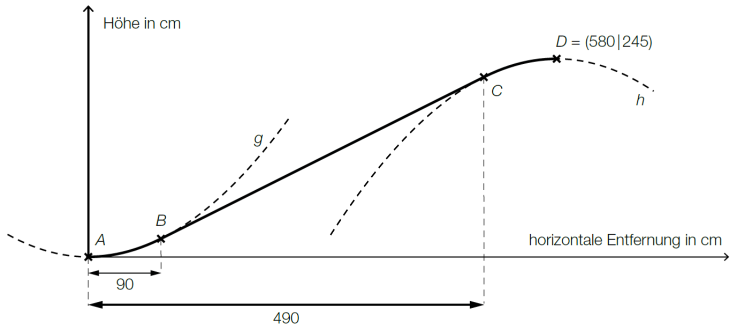
Diese Profillinie kann zwischen den Punkten A und B mithilfe der quadratischen Funktion p mit
$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

1) Erstellen Sie unter Verwendung von A, B und α ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p.

2) Ermitteln Sie diese Koeffizienten.

6.19

Die nachstehende Abbildung zeigt den schematischen Verlauf einer Rolltreppe. Dieser Verlauf setzt sich aus 2 Parabelstücken (Graphen der Funktionen g und h) zwischen den Punkten A und B bzw. C und D sowie einem geradlinig verlaufenden Stück zwischen den Punkten B und C zusammen. Die Übergänge in den Punkten B und C erfolgen knickfrei (das bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben).



Für die Funktion g gilt:

$$g(x) = \frac{1}{360} \cdot x^2$$

$x \ldots$ horizontale Entfernung von der Einstiegsstelle in cm
$g(x) \ldots$ Höhe an der Stelle x in cm

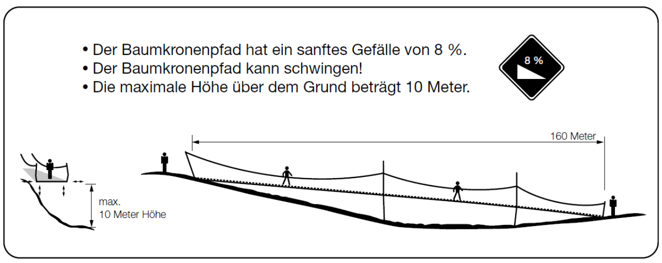
1) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion g im Punkt B eine Steigung von 50 % aufweist.

Bei der Ausstiegsstelle (Punkt D) verläuft die Rolltreppe waagrecht.

2) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ermittelt werden können.

6.20

Der Baumkronenpfad ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Die maximale Höhe über dem Grund beträgt 10 Meter.“ Diese maximale Höhe wird in einer horizontalen Entfernung von 90 m vom Startpunkt erreicht.
In 40 m horizontaler Entfernung vom Startpunkt beträgt die Höhe 8 m.
Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.
Im Anfangspunkt und im Endpunkt ist die Höhe 0 m.
Die Höhe über dem Grund abhängig von der horizontalen Entfernung vom Startpunkt soll näherungsweise mithilfe einer Polynomfunktion 4. Grades h mit $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschrieben werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion berechnet werden können.

6.1 $f(x) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 5$

6.2 $a = 1$, $b = -9$, $c = 27$

6.3 $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \implies f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$f(-1) = 2 \implies \mathrm{I}: -a + b - c + d = 2, \qquad f'(-1) = 0 \implies \mathrm{II}: 3a - 2b + c = 0$
$f(-3) = -4 \implies -27a + 9b - 3c + d = -4, \qquad f'(3) = \tan(45^\circ) = 1 \implies \mathrm{IV}: 27a + 6b + c = 1$

6.4 $f(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x - 3$

6.5 $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 4$

6.6 $f(x) = \frac{1}{9} \cdot x^3 - \frac{2}{3} \cdot x^2 + x$

6.7 **a)** Der Graph schneidet die vertikale Achse auf der Höhe d.
b) c ist die Tangentensteigung im Schnittpunkt mit der vertikalen Achse.
c) Für $a > 0$ wechselt das Krümmungsverhalten an der Stelle $x = -\frac{b}{3 \cdot a}$ von negativ auf positiv.
Für $a < 0$ wechselt das Krümmungsverhalten an der Stelle $x = -\frac{b}{3 \cdot a}$ von positiv auf negativ.
d) $c \geq \frac{1}{3}$, d beliebig
e) $f(x) = a \cdot x^3 - 3 \cdot a \cdot x^2 + (3 \cdot a + 1) \cdot x - (a + 1)$

6.8 $a = 1,\ b = 3$

6.9 **a)** $\mathrm{I}: T(0) = -5,\ \mathrm{II}: T(98) = 8,\ \mathrm{III}: T(210) = 20,\ \mathrm{IV}: T''(98) = 0$

6.10 **1)** $\mathrm{I}:\ 456 = c, \quad \mathrm{II}:\ 740 = a \cdot 740^2 + b \cdot 740 + c, \quad \mathrm{III}:\ 1148 = a \cdot 1385^2 + b \cdot 1385 + c$
2) $a = 0{,}000\,179\,6\ldots,\ b = 0{,}2508\ldots,\ c = 456$

6.11 **1)** $\mathrm{I}:\ f(0) = 12, \quad \mathrm{II}:\ f(1) = 16, \quad \mathrm{III}:\ f(5) = 32, \quad \mathrm{IV}:\ f'(1) = 0$
2) $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 12$

6.12 **1)** f muss an der Stelle $x = 0$ und an der Stelle $x = 3$ Steigung 0 haben.
2) $\mathrm{I}:\ f(0) = 0, \quad \mathrm{II}:\ f'(0) = 0, \quad \mathrm{III}:\ f(3) = 1{,}2, \quad \mathrm{IV}:\ f'(3) = 0$
3) $a = -\frac{4}{45},\ b = \frac{2}{5},\ c = 0,\ d = 0$

6.13 $f(0) = 1{,}2,\ f'(0) = \tan(23^\circ),\ f(6{,}5) = 0{,}3$

6.14 **1)** $\mathrm{I}:\ v'(25) = 0, \quad \mathrm{II}:\ v(25) = 15, \quad \mathrm{III}:\ v(50) = 0$
2) $v(t) = 1{,}2 \cdot t - 0{,}024 \cdot t^2$

6.15 **1)** $f(0) = 0,\ f(1{,}1) = 2{,}2,\ f(9{,}4) = 5{,}1,\ f(12) = 0,\ f'(9{,}4) = 0$
2) $a = -0{,}0066\ldots,\ b = 0{,}1461\ldots,\ c = -1{,}0476\ldots,\ d = 2{,}9843\ldots,\ e = 0$

6.16 **1)** $f(0) = 13,\ f(2) = 16,\ f(4{,}36) = 15{,}1,\ f(9{,}42) = 20{,}35,\ f'(9{,}42) = 0$
2) $a = -0{,}012\ldots,\ b = 0{,}266\ldots,\ c = -1{,}722\ldots,\ d = 3{,}981\ldots,\ e = 13$

6.17 $c = 1,\ a = 0{,}690\ldots,\ \alpha = 4{,}5^\circ$

6.18 **1)** $p(0) = 3,\ p(8) = 0,\ p'(8) = \tan(-35^\circ)$
2) $a = -0{,}040\,65\ldots,\ b = -0{,}049\,79\ldots,\ c = 3$

6.19 **1)** $g'(90) = 0{,}5 = 50\,\%$
2) $h(580) = 245, \quad h'(580) = 0, \quad h'(490) = 0{,}5$

6.20 $h(0) = 0,\ h(40) = 8,\ h(90) = 10,\ h'(90) = 0,\ h(160) = 0$

7. Physikalische Anwendungen der Differentialrechnung

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Physikalische Anwendungen der Differentialrechnung

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 11. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

7.1

Die Funktion s modelliert den von einem Auto zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit:

$$s(t) = -\frac{1}{24} \cdot t^4 + \frac{1}{3} \cdot t^3 + t^2 + 8 \cdot t$$

$t \ldots$ vergangene Zeit in Sekunden, $0 \leq t \leq 3$
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg im Zeitintervall $[0; t]$ in Metern

a) Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Autos im Zeitintervall $[0\,\text{s}; 3\,\text{s}]$.

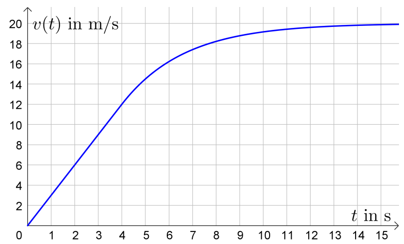
b) Berechne die minimale und maximale Geschwindigkeit des Autos im Zeitintervall $[0\,\text{s}; 3\,\text{s}]$.

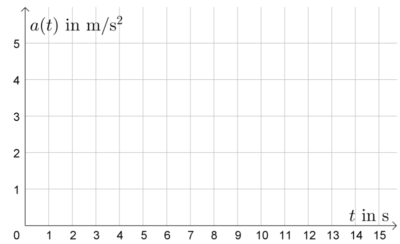
c) Berechne die mittlere Beschleunigung des Autos im Zeitintervall $[0\,\text{s}; 3\,\text{s}]$.

d) Berechne die minimale und maximale Beschleunigung des Autos im Zeitintervall $[0\,\text{s}; 3\,\text{s}]$.

7.2

Die Geschwindigkeit einer U-Bahn wächst in den ersten 4 Fahrsekunden linear und nähert sich danach einer Maximalgeschwindigkeit von $20\,\text{m/s}$ an. Der Funktionsgraph der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist im linken Bild dargestellt. Skizziere rechts den Graphen der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a.





7.3

Die folgende Funktion T beschreibt den Temperaturverlauf für 15 Stunden:

$$T(t) = -0{,}016 \cdot t^3 + 0{,}24 \cdot t^2$$

$t \ldots$ Zeit in Stunden $(0 \leq t \leq 15)$
$T \ldots$ Temperatur in Grad Celsius

a) Untersuche, ob die Temperatur in diesem Zeitraum unter $10\,°\text{C}$ bleibt.

b) Berechne jenen Zeitpunkt t_1, in dem die Temperatur am schnellsten ansteigt.

c) Berechne die Ableitung T' im Zeitpunkt t_1 und interpretiere den Wert im Kontext.

7.4

Wenn ein Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 lotrecht nach oben geschleudert wird, so kann die zum Zeitpunkt t erreichte Höhe h mit der folgenden Formel berechnet werden:

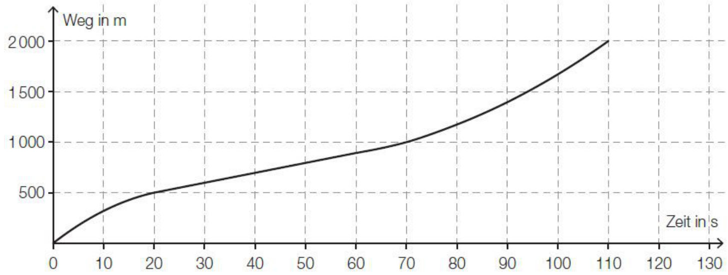
$$h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

a) Stelle eine Formel für die Steigzeit bis zur maximalen Höhe $h_{\max}$ mit und ohne Differentialrechnung auf.

b) Die maximale Höhe $h_{\max}$ soll verdoppelt werden.
Berechne die erforderliche Erhöhung der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

7.5

Section-Control bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.
Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeuges in einem überprüften Bereich dargestellt.



1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.

2) Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

7.6

Eine Taucherin benötigt für einen Notaufstieg 40 Sekunden.
Der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$$s(t) = 0{,}02 \cdot t^2$$

$t \ldots$ Zeit seit Beginn des Notaufstiegs in Sekunden
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in Metern

1) Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit der Taucherin 3 Sekunden, bevor sie die Oberfläche erreicht.

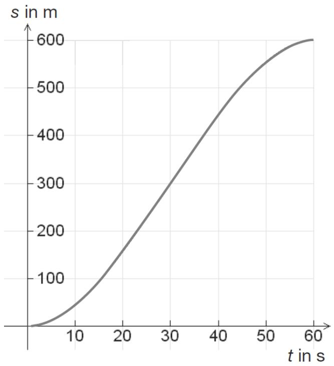
7.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Für die Strecke zwischen der Haltestelle Rathaus und der Haltestelle Volkstheater benötigt ein Zug der U-Bahn-Linie U2 in Wien durchschnittlich 60 Sekunden. Der zurückgelegte Weg des Zugs zwischen diesen beiden Haltestellen lässt sich annähernd durch die Zeit-Weg-Funktion s wie folgt beschreiben:

$$s(t) = -\frac{1}{180} \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot t^2$$

$t \ldots$ Zeit nach der Abfahrt in Sekunden (s), $0 \leq t \leq 60$
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg in Metern zum Zeitpunkt t



a) Berechnen Sie die Strecke s in Metern, die der U-Bahn-Zug zwischen den beiden Haltestellen zurücklegt.

b) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für das Zeitintervall $[30; 45]$.

c) Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für $t = 45\,\text{s}$.

d) Erklären Sie, wie am rechts abgebildeten Zeit-Weg-Diagramm die Momentangeschwindigkeit abgelesen werden kann. Lesen Sie näherungsweise den Zeitpunkt ab, zu dem die Momentangeschwindigkeit maximal ist.

7.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Auto macht eine Vollbremsung, bis es zum Stillstand kommt. Der Weg, den es dabei bis zum Stillstand zurücklegt, lässt sich in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit t durch die Funktion s beschreiben:

$$s(t) = -3{,}25 \cdot t^2 + 26 \cdot t \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 4$$

$t \ldots$ ab Beginn der Vollbremsung vergangene Zeit in Sekunden
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg zur Zeit t in Metern

1) Zeigen Sie, dass das Auto zur Zeit $t = 4$ zum Stillstand kommt.

2) Stellen Sie eine Formel auf, mit der man die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ im Intervall $[t_0; t_1]$ bestimmen kann.

Jemand berechnet: $s''(t) = -6{,}5$

3) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl $-6{,}5$ im gegebenen Sachzusammenhang.

4) Begründen Sie, warum der Graph der angegebenen Funktion s keinen Wendepunkt hat.

7.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Jedes Jahr findet auf der Kitzbüheler Streif das weltberühmte Hahnenkammrennen statt.
Die Geschwindigkeit einer Trainingsfahrt in Abhängigkeit von der Zeit kann für einen Abschnitt durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben werden:

$$v(t) = -0{,}045 \cdot t^2 + 6{,}594 \cdot t - 204{,}571 \quad \text{mit } 60 \leq t \leq 90$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden (s)
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)

1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit in diesem Abschnitt maximal ist.

7.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Geschwindigkeitsverlauf während eines Bremsmanövers eines Autos kann näherungsweise durch die lineare Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = 20 - \frac{3}{2} \cdot t$$

$t \ldots$ Zeit seit dem Beginn des Bremsmanövers in Sekunden (s)
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Steigung der Funktion v im gegebenen Sachzusammenhang.

7.11

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Funktion h, deren Graph in der nebenstehenden Abbildung dargestellt ist, beschreibt näherungsweise die Höhe $h(t)$ eines senkrecht nach oben geschossenen Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden, $h(t)$ in Metern).

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie anhand des Graphen die mittlere Geschwindigkeit des Körpers in Metern pro Sekunde im Zeitintervall $[2\,\text{s}; 4\,\text{s}]$!

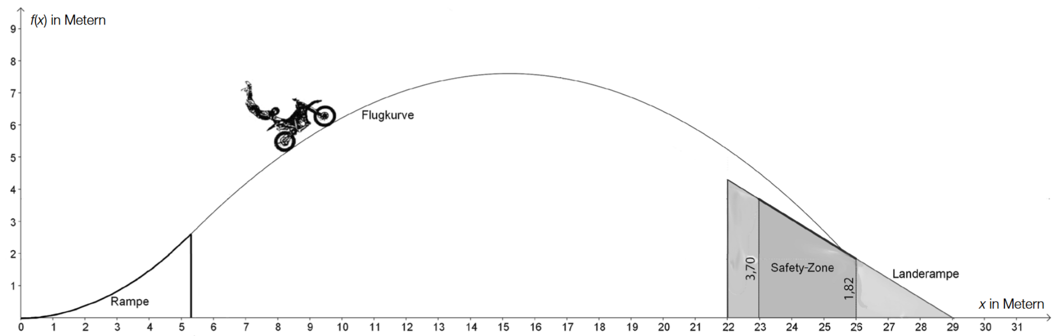
7.12

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Flugkurve eines Motorrads nach dem Absprung von einer Motocross-Rampe kann – unter Vernachlässigung des Luftwiderstands – mit einer quadratischen Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -2{,}7 + x - \frac{10 \cdot (x - 5{,}4)^2}{v_0^2} \qquad \text{mit } x > 5{,}4$$

$x \ldots$ waagrechte Entfernung vom Anfangspunkt der Rampe in Metern (m)
$f(x) \ldots$ Höhe in Abhängigkeit von der waagrechten Entfernung x in Metern (m)
$v_0 \ldots$ Geschwindigkeit beim Absprung in m/s



a) **1)** Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugkurve für eine Geschwindigkeit von $v_0 = 14\,\text{m/s}$.

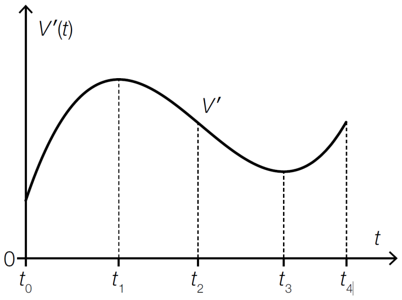
b) Um die Sicherheit der Motocross-Fahrer nicht zu gefährden, wird auf der schrägen Landerampe eine sogenannte Safety-Zone markiert. Der Fahrer soll für eine sichere Landung in diesem Bereich landen.

1) Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit v_0 der Fahrer beim Absprung erreichen muss, damit die Flugkurve in der Mitte dieser Safety-Zone endet.

7.13

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Das in einem Gefäß enthaltene Flüssigkeitsvolumen V ändert sich im Laufe der Zeit t im Zeitintervall $[t_0; t_4]$. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V', die die momentane Änderungsrate des im Gefäß enthaltenen Flüssigkeitsvolumens in diesem Zeitintervall angibt.



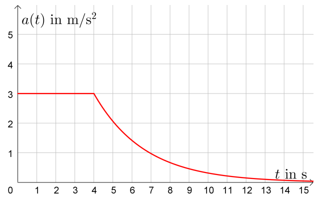
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß nimmt im Zeitintervall $[t_1; t_3]$ ab.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_2 kleiner als zum Zeitpunkt t_3.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß weist zum Zeitpunkt t_3 die niedrigste momentane Änderungsrate auf.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_4 am größten.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zu den Zeitpunkten t_2 und t_4 gleich groß.	☐

7.1 **a)** $\bar{v} = 12{,}875\,\text{m/s}$ **b)** $v_{\text{min}} = 8\,\text{m/s}$, $v_{\text{max}} = 18{,}5\,\text{m/s}$ **c)** $\bar{a} = 3{,}5\,\text{m/s}^2$ **d)** $a_{\text{min}} = 2\,\text{m/s}^2$, $a_{\text{max}} = 4\,\text{m/s}^2$

7.2



7.3 **a)** Ja, es gilt $T \leq 8$. **b)** $t_1 = 5$
c) $T'(5) = 1{,}2$ Zum Zeitpunkt $t = 5\,\text{h}$ gilt: Für kurze Zeitspannen Δt (gemessen in Stunden) ist die Temperaturänderung ca. $1{,}2 \cdot \Delta t$ (gemessen in Grad Celsius). Wählt man also etwa $\Delta t = \frac{1}{6}$, so folgt daraus, dass die Temperatur zum Zeitpunkt $t = 5\,\text{h}$ innerhalb von 10 Minuten um ca. $0{,}2\,°\text{C}$ steigt.

7.4 **a)** h ist eine quadratische Funktion in t mit Scheitelstelle $t = \frac{v_0}{g}$
b) $h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$ daher ist v_0 mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren, also um 41,4 % zu erhöhen.

7.5 $\bar{v} \approx 14{,}29\,\text{m/s}$ auf der ersten Weghälfte. Für die erste Weghälfte wurden 70 Sekunden, für die zweite Hälfte nur 40 Sekunden benötigt. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner.

7.6 1,48 m/s

7.7 **a)** 600 m
b) 13,75 m/s
c) 11,25 m/s
d) Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 ist geometrisch die Steigung des Funktionsgraphen an der Stelle t_0.
Der Graph hat im Wendepunkt bei $t = 30\,\text{s}$ die größte Steigung.

7.8 $v(4) = s'(4) = 0$ $\quad \bar{v} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$
Das Auto hat zu jedem Zeitpunkt die negative Beschleunigung $a = -6{,}5\,\text{m/s}^2$. Es wird also pro Sekunde um 6,5 m/s langsamer. Bei einem Wendepunkt gilt $s''(t) = 0$, aber $s''(t) = -6{,}5$ hat keine Nullstelle.

7.9 Nach 73,26… Sekunden ist die Geschwindigkeit maximal.

7.10 Die Steigung beträgt $k = -\frac{3}{2}$. Es liegt eine konstante negative Beschleunigung (Bremsverzögerung) von $-1{,}5\,\text{m/s}^2$ vor.
Oder: Das Auto wird pro Sekunde um 1,5 m/s langsamer.

7.11 Die mittlere Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall $[2\,\text{s}; 4\,\text{s}]$ beträgt ca. 20 m/s.

7.12 **a)** $H = (15{,}2\,\text{m} \mid 7{,}6\,\text{m})$ **b)** $v_0 \approx 13{,}84\,\text{m}$

7.13 Richtig sind die 2. Antwort und die 4. Antwort von oben.

8. Optimierungsaufgaben

MmF-Materialien

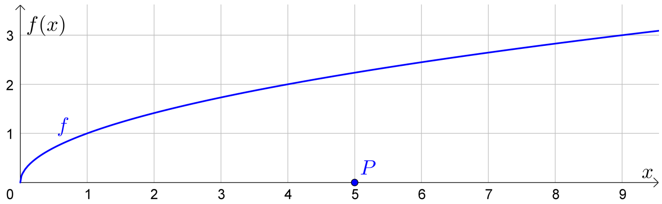
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Optimierungsaufgaben

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 11. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

8.1

Gesucht ist jener Punkt am Funktionsgraphen der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$, der vom Punkt $P = (5 \mid 0)$ minimalen Abstand hat.

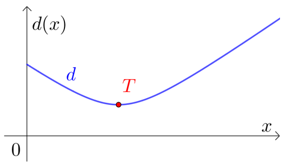


a) Zeichne oben einen Punkt V am Graphen ein, der vermutlich nahe am gesuchten Punkt liegt.

Für den Abstand von V zum Punkt P gilt:

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 9 \cdot x + 25}$$

$x \ldots x$-Koordinate von V
$d(x) \ldots$ Abstand von V zu P in Abhängigkeit von x



Der Graph der Funktion d ist links dargestellt.

b) Berechne die Koordinaten des eingezeichneten Tiefpunkts T.

c) Welche Koordinaten hat also der gesuchte Punkt am Graphen von f?

d) Begründe, warum d tatsächlich die oben angegebene Funktionsgleichung hat.

8.2

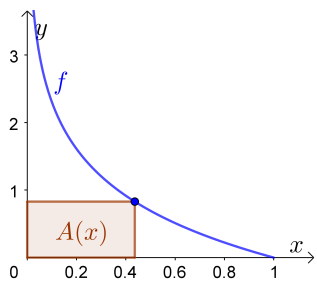
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\ln(x)$ ist rechts unten für $0 < x < 1$ dargestellt.
Gesucht sind die Abmessungen eines Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt und folgenden Eigenschaften:

- Ein Eckpunkt liegt am Funktionsgraphen von f.
- Eine Seite liegt auf der x-Achse. Eine Seite liegt auf der y-Achse.

Für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt:

$$A(x) = -x \cdot \ln(x)$$

$x \ldots x$-Koordinate des Eckpunkts am Funktionsgraphen
$A(x) \ldots$ Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks

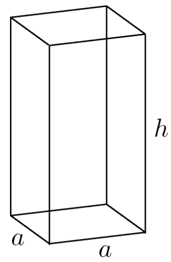


a) Für welches x ist $A(x)$ maximal? Wie groß ist dieser maximale Flächeninhalt?

b) Begründe, warum A tatsächlich die oben angegebene Funktionsgleichung hat.

8.3

Eine quaderförmige Schachtel mit quadratischer Grundfläche und Deckel soll produziert werden.
Für deren Oberfläche stehen $600\,\text{cm}^2$ Material zur Verfügung.

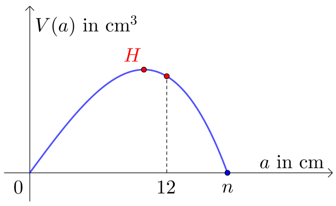


Der Hersteller möchte, dass das Volumen der Schachtel so groß wie möglich ist.
Für das Volumen der Schachtel gilt:

$$V(a) = \frac{300 \cdot a - a^3}{2}$$

$a \ldots$ Kantenlänge der Grundfläche in cm
$V(a) \ldots$ Volumen der Schachtel in cm^3

Die Kantenlänge der Grundfläche soll aus Stabilitätsgründen mindestens $a_{\min} = 12\,\text{cm}$ betragen.



Der Graph der Funktion V ist links dargestellt.

a) Berechne die positive Nullstelle n der Funktion V.

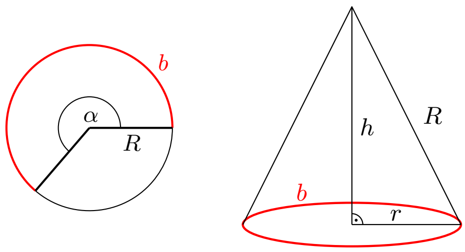
b) Berechne die Koordinaten des eingezeichneten Hochpunkts H.

c) Welche Abmessungen und welches Volumen hat also jene Schachtel, die alle Anforderungen erfüllt?

d) Begründe, warum V tatsächlich die oben angegebene Funktionsgleichung hat.

8.4

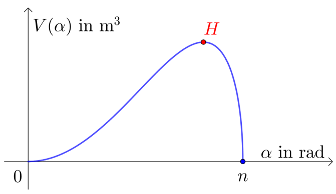
Von einem Kreis mit Radius $R = 1\,\text{m}$ wird ein Kreissektor mit Zentriwinkel α ausgeschnitten.
Der Kreissektor kann dann zu einem Drehkegel gefaltet werden.
Gesucht ist jener Zentriwinkel α, für den das Volumen des zugehörigen Drehkegels so groß wie möglich ist.



Für das Volumen des Drehkegels gilt:

$$V(\alpha) = \frac{\alpha^2}{12 \cdot \pi} \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

$\alpha \ldots$ Zentriwinkel in rad
$V(\alpha) \ldots$ Volumen des Drehkegels in m^3



Der Graph der Funktion V ist links dargestellt.

a) Berechne die positive Nullstelle n der Funktion V.

b) Berechne die Koordinaten des eingezeichneten Hochpunkts H.

c) Wie groß ist also der optimale Zentriwinkel in Grad?

d) Begründe, warum V tatsächlich die oben angegebene Funktionsgleichung hat.

8.5

Die Oberfläche eines zylinderförmigen Behälters mit einem Volumen von 16 000 Kubikmetern (m^3) soll minimal sein. Die Oberfläche, abhängig vom Radius r, kann mit der Funktion O beschrieben werden:

$$O(r) = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{32\,000}{r} \quad \text{mit } r > 0$$

r ... Radius des zylinderförmigen Behälters in Metern (m)
$O(r)$ ... Oberfläche des zylinderförmigen Behälters bei einem Radius r in Quadratmetern (m^2)

1) Berechnen Sie die Nullstelle der 1. Ableitung der Funktion O.

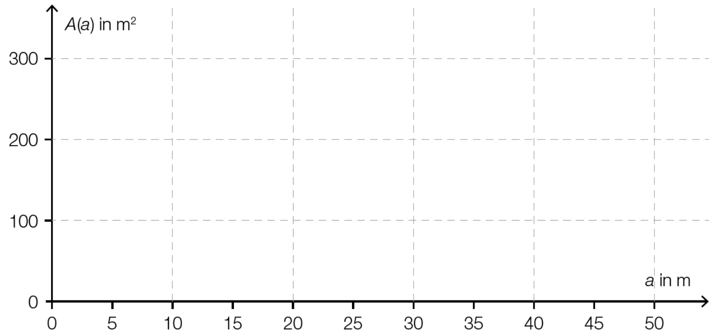
2) Zeigen Sie mithilfe der 2. Ableitung, dass bei dem so ermittelten Radius die Oberfläche minimal wird.

8.6

Ein rechteckiger Garten soll angelegt werden. Er soll mit einer Seite a an ein Bauernhaus angrenzen und an den restlichen drei Seiten durch einen Zaun begrenzt werden. Es stehen insgesamt 50 m Zaun zur Verfügung.
Die Funktion A beschreibt den Flächeninhalt des rechteckigen Gartens in Abhängigkeit von der Länge der Seite a.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion A.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Funktion A.



3) Zeigen Sie, dass bei einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = x \cdot (a - x)$ die Stelle $x = \frac{a}{2}$ eine Extremstelle ist.

8.1 **a)** **b)** $T = (4{,}5 \mid 2{,}179...)$ **c)** $(4{,}5 \mid 2{,}121...)$ **d)** Hinweis: Pythagoras

8.2 **a)** $x = e^{-1} = 0{,}367...$ $A(e^{-1}) = e^{-1} = 0{,}367...$
(Die Funktion A hat für $x > 0$ nur diese eine Stelle mit waagrechter Tangente und keine Sprungstellen. Die Funktion A'' ist für $x > 0$ stets negativ. Dieses lokale Maximum von A muss also auch das globale Maximum sein.)

b) Hinweis: Seitenlängen des Rechtecks

8.3 **a)** $n = \sqrt{300} = 17{,}32...\,\text{cm}$ **b)** $H = (10 \mid 1000)$ **c)** $a = 12\,\text{cm},\ h = 6{,}5\,\text{cm},\ V = 936\,\text{cm}^3$ **d)** Hinweis: Quader-Oberfläche

8.4 **a)** $n = 2 \cdot \pi\,\text{rad}$

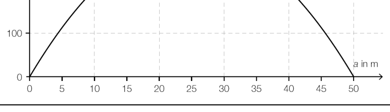
b) $H = (5{,}130...\,\text{rad} \mid 0{,}4030...\,\text{m}^3)$

c) $293{,}93...^\circ$

d) Hinweis: Zeige, dass $r = \frac{\alpha}{2 \cdot \pi}$ und $h = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4 \cdot \pi^2}}$ gilt.

8.5 **1)** $r = 13{,}65...\,\text{m}$ **2)** $O''(r) = 4 \cdot \pi + \frac{64000}{r^3} \implies O''(13{,}65...) = 37{,}6... > 0 \implies$ Tiefpunkt
(Die Funktion O hat für $x > 0$ nur diese eine Stelle mit waagrechter Tangente und keine Sprungstellen. Die Funktion O'' ist für $x > 0$ stets positiv. Dieses lokale Minimum von O muss also auch das globale Minimum sein.)

8.6 $A(a) = a \cdot \dfrac{50 - a}{2}$



Die Nullstellen der Funktion f sind $x_1 = 0$ und $x_2 = a$. Da die Extremstelle x_S einer quadratischen Funktion genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen liegt, gilt: $x_S = \frac{a}{2}$. Oder: $f'(x) = 0$ lösen.

9. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

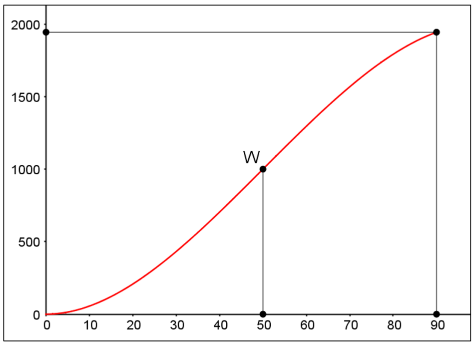
✓ Arbeitsblatt – Mittelwertsatz der Differentialrechnung

9.1

Der Graph zeigt das Zeit-Weg-Diagramm der ersten 90 Sekunden einer Autofahrt (Zeit in s, Weg in m).

a) Untersuche, ob die verstrichene Zeit und der zurückgelegte Weg direkt proportional sind.

b) Untersuche, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.



	richtig	falsch
Die mittlere Geschwindigkeit ist kleiner als 50 km/h.		
Die Endgeschwindigkeit ist größer als die mittlere Geschwindigkeit.		
Die Endgeschwindigkeit ist kleiner als die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 20.		
Zum Zeitpunkt 50 ist die Geschwindigkeit maximal.		
Zum Zeitpunkt 50 ist die Beschleunigung maximal.		

9.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Fahrt eines Radfahrers kann für einen bestimmten Streckenabschnitt und einen begrenzten Zeitraum durch die Funktion s beschrieben werden.

$$s(t) = 0{,}75 \cdot t^2 + 1{,}25 \cdot t$$

$t \ldots$ Fahrzeit in Sekunden (s)
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg zur Zeit t in Metern (m)

1) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Radfahrers im Zeitintervall $[0; 5]$.

2) Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit des Radfahrers zur Zeit $t = 5$.

3) Veranschaulichen Sie mithilfe des zugehörigen Weg-Zeit-Diagramms, dass die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t = 5$ größer ist als die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0; 5]$.

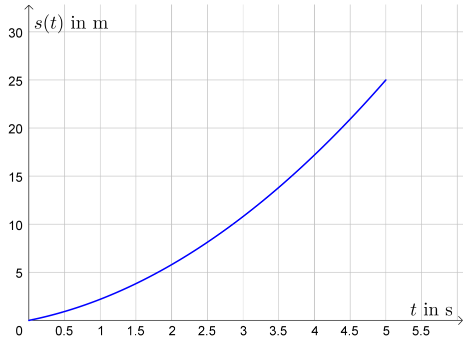
4) Zeigen Sie, dass für diese Fahrt die Beschleunigung konstant ist.

9.3

Die Fahrt eines Skifahrers wird für die ersten 5 Sekunden eines bestimmten Streckenabschnitts durch die folgende Funktion s beschrieben:

$$s(t) = 0{,}7 \cdot t^2 + 1{,}5 \cdot t \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 5$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden (s)
$s(t) \ldots$ bis zum Zeitpunkt t zurückgelegter Weg in Metern (m)



a) Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit des Skifahrers zum Zeitpunkt $t = 4$ Sekunden.

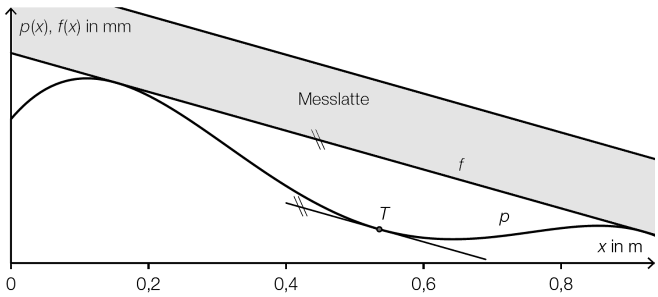
b) Veranschaulichen Sie anhand der Grafik, dass die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 4$ Sekunden größer als die mittlere Geschwindigkeit während der ersten 5 Fahrsekunden ist.

9.4

Um Unebenheiten eines Bodens festzustellen, wird eine Messlatte verwendet.
Um die Unebenheit des dargestellten Bodens zu ermitteln, soll der Punkt T bestimmt werden.
Im Punkt T ist die Tangente an den Graphen von p parallel zur Geraden f (siehe nachstehende Skizze).

Es gilt:
$p(x) = -70 \cdot x^4 + 150 \cdot x^3 - 100 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 3$
$f(x) = -4{,}046 \cdot x + 4{,}378$

$x \ldots$ horizontale Koordinate in m
$p(x)$, $f(x) \ldots$ vertikale Koordinate in mm



1) Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die x-Koordinate des Punktes T berechnet werden kann.

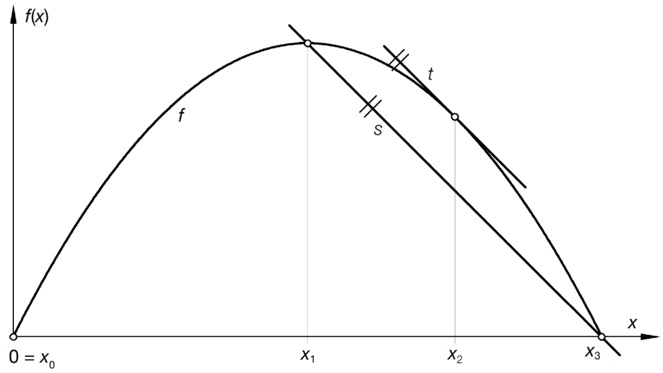
2) Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes T. (Anmerkung: mit CAS)

9.5

Gegeben ist eine Polynomfunktion f zweiten Grades. In der nachstehenden Abbildung sind der Graph dieser Funktion im Intervall $[0; x_3]$ sowie eine Sekante s und eine Tangente t dargestellt. Die Stellen x_0 und x_3 sind Nullstellen, x_1 ist eine lokale Extremstelle von f. Weiters ist die Tangente t im Punkt $(x_2 \mid f(x_2))$ parallel zur eingezeichneten Sekante s.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen sind für die in der Abbildung dargestellte Funktion f richtig?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!



$f'(x_0) = f'(x_3)$	☐
$f'(x_1) = 0$	☐
$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_2)$	☐
$f'(x_0) = 0$	☐
$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} > 0$	☐

9.6

Gegeben ist eine Polynomfunktion f dritten Grades. Die mittlere Änderungsrate von f hat im Intervall $[x_1; x_2]$ den Wert 5.

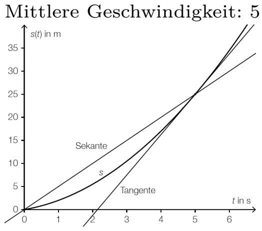
Aufgabenstellung:

Welche der nebenstehenden Aussagen können über die Funktion f sicher getroffen werden?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es mindestens eine Stelle x mit $f(x) = 5$.	☐
$f(x_2) > f(x_1)$	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[x_1; x_2]$ monoton steigend.	☐
$f'(x) = 5$ für alle $x \in [x_1; x_2]$	☐
$f(x_2) - f(x_1) = 5 \cdot (x_2 - x_1)$	☐

9.1 **a)** Graph gekrümmt, daher nicht direkt proportional
b) falsch, falsch, richtig, richtig, falsch

9.2 Mittlere Geschwindigkeit: 5 m/s Momentangeschwindigkeit: 8,75 m/s



Die Tangentensteigung der Funktion s an der Stelle $t = 5$ ist größer als die Steigung der Sekante durch die Punkte $(0 \mid 0)$ und $(5 \mid 25)$.
$a(t) = s''(t) = 1{,}5\,\text{m/s}^2$ ist konstant.

9.3 **a)** 7,1 m/s
b) Die Steigung der Geraden durch $(0 \mid 0)$ und $(5 \mid 25)$ ist kleiner als die Steigung der Tangente im Punkt $(4 \mid 17{,}2)$.

9.4 $p'(x) = f'(x) \implies -280 \cdot x^3 + 450 \cdot x^2 - 200 \cdot x + 17 = -4{,}046 \implies (x_1 = 0{,}1527\ldots),\ x_2 = 0{,}5357\ldots, (x_3 = 0{,}9187\ldots)$

9.5 Richtig sind die 2. Antwort und die 3. Antwort von oben.

9.6 Richtig sind die 2. Antwort und die 5. Antwort von oben.

10. Näherungsverfahren

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Newtonsches Näherungsverfahren

10.1

Die Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 46 \cdot x^2 + 173 \cdot x - 210$$

hat zwei komplexe Nullstellen und eine reelle Nullstelle.
Berechne die reelle Nullstelle näherungsweise. (Newton-Startwert: $x_1 = 50$)

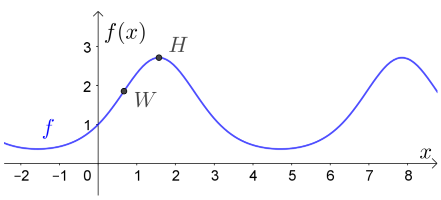
10.2

Die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad g(x) = x^3$$

schneiden einander in genau einem Punkt.
Berechne den Schnittpunkt S näherungsweise. (Newton-Startwert: $x_1 = 1$)

10.3



Der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{\sin(x)}$ ist links dargestellt.

a) Berechne die Koordinaten des eingezeichneten Hochpunkts.

Hinweis: $e^{☺} > 0$ für alle ☺.

b) Berechne die Koordinaten des eingezeichneten Wendepunkts näherungsweise. (Newton-Startwert: $x_1 = 1$)

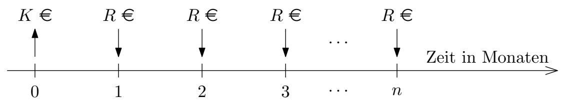
10.4

Die Funktion f mit $f(x) = x^{42} - 42$ hat eine positive Nullstelle.
Berechne diese Nullstelle näherungsweise. (Newton-Startwert: $x_1 = 1{,}5$)

Welche Zahl auf der Zahlengerade ist das?

10.5

Ein Kredit von $K = 100\,000$ € soll mit nachschüssigen monatlichen Raten $R = 1000$ € zurückgezahlt werden.



Wie groß darf der effektive Jahreszinssatz maximal sein, damit der Kredit in $n = 120$ Monaten abbezahlt ist?
Hinweis: Der zugehörige monatliche Aufzinsungsfaktor q ist eine Lösung der folgenden Gleichung:

$$K \cdot q^n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

1) Stelle eine Funktion f auf, die q als Nullstelle hat.

2) Berechne die gesuchte Nullstelle q näherungsweise. (Newton-Startwert: $q_1 = 1{,}1$)

3) Berechne den zugehörigen effektiven Jahreszinssatz.

10.6

Für die Funktion f gilt: $f(x) = \cos(2 \cdot x) - x$

a) Berechne die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = -1$ näherungsweise als Sekantensteigung zwischen den Stellen -1 und $-0{,}999$.

b) Berechne die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = -1$ mit den Formeln der Differentialrechnung.

10.7

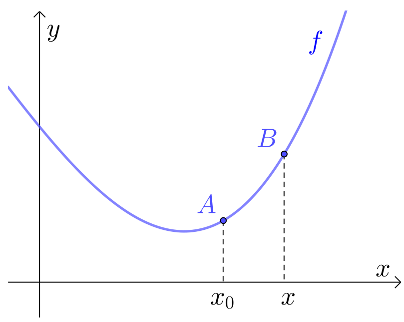
Für die Funktion f gilt: $f(x) = 0{,}1 \cdot x^4$

a) Erstelle eine Gleichung der Tangente im Punkt $A = (2 \mid f(2))$.

b) Der Punkt $(2{,}01 \mid y_T)$ liegt auf der Tangente. Berechne y_T und $f(2{,}01)$.
Um wie viel Prozent ist y_T kleiner als $f(2{,}01)$?

10.8

Der Graph einer differenzierbaren Funktion f ist rechts dargestellt.
Der Punkt $A = (x_0 \mid f(x_0))$ ist fix. Der Punkt $B = (x \mid f(x))$ ist beweglich am Graphen.



a) Lukas behauptet, dass die Annäherung

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

gilt, wenn x nahe bei x_0 ist.
Veranschauliche diese Behauptung im Bild rechts.
Beschreibe die Behauptung aus geometrischer Sicht.

b) Leite daraus die folgende Formel für die *lineare Approximation* einer Funktion f an einer Stelle x_0 her:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

c) Ermittle die lineare Approximation für $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 25$.

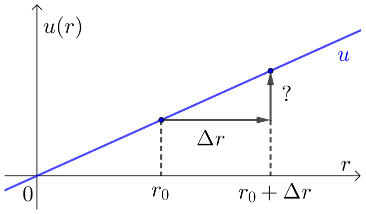
d) Berechne $\sqrt{26}$ mithilfe der linearen Approximation. Vergleiche das Ergebnis mit dem Taschenrechner.

10.9

Der Umfang u bzw. der Flächeninhalt A vom Kreis hängen von seinem Radius r ab:

$$u(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \text{und} \quad A(r) = \pi \cdot r^2$$

a) Der Radius eines Kreises mit Radius $r_0 = 10\,\text{cm}$ wird um $\Delta r = 5\,\text{mm}$ vergrößert.

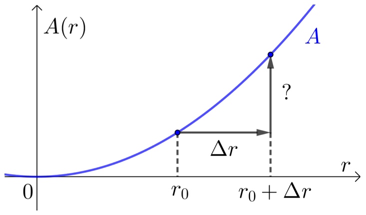


1) Berechne den Umfang des größeren Kreises.

2) Berechne den Umfang des größeren Kreises mit der Näherungsformel $u(r_0 + \Delta r) \approx u(r_0) + u'(r_0) \cdot \Delta r$.

Warum gilt hier nicht nur $\approx$ sondern sogar $=$?

b) Der Radius eines Kreises mit Radius $r_0 = 10\,\text{cm}$ wird um $\Delta r = 5\,\text{mm}$ vergrößert.



1) Berechne den Flächeninhalt des größeren Kreises.

2) Berechne den Flächeninhalt des größeren Kreises mit der Näherungsformel $A(r_0 + \Delta r) \approx A(r_0) + A'(r_0) \cdot \Delta r$.

3) Berechne den absoluten Fehler und den relativen Fehler.

10.10

Für die Ableitungsfunktion der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

a) Schätze mithilfe der Näherungsformel $f(9 + \Delta x) \approx f(9) + f'(9) \cdot \Delta x$ den Wert von $f(11) = \sqrt{11}$ ab.

b) Berechne den absoluten Fehler und den relativen Fehler.

10.11

Finde mit Hand eine gute Näherung für den numerischen Wert von $\sqrt[5]{1{,}02}$. Ermittle dann mit dem Taschenrechner den absoluten und den relativen Fehler deiner Näherung vom tatsächlichen Wert.

10.1 $x = 42$

10.2 $S = (0{,}865... \mid 0{,}648...)$

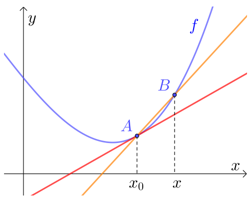
10.3 **a)** $H = (1{,}570... \mid 2{,}718...)$ **b)** $W = (0{,}6662... \mid 1{,}855...)$

10.4 $x = 1{,}093\,07...$ $(= \sqrt[42]{42})$

10.5 **a)** Zum Beispiel: $f(q) = K \cdot q^{n+1} - K \cdot q^n - R \cdot q^n + R$ **b)** $q = 1{,}003\,11...$ **c)** $i = 3{,}80...\,\%$

10.6 **a)** 0,8194... (Umstellung auf Bogenmaß nicht vergessen) **b)** 0,8185...

10.7 **a)** $y = 3{,}2 \cdot x - 4{,}8$ **b)** $y_T = 1{,}632$, $f(2{,}01) = 1{,}632\,24...$, y_T ist um $0{,}0147...\,\%$ kleiner als $f(2{,}01)$.

10.8 **a)** 

Die Steigung der Tangente in A ist ungefähr so groß wie die Steigung der Sekante durch A und B.

b) $f'(x_0) \cdot (x - x_0) \approx f(x) - f(x_0) \implies f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

c) $\sqrt{x} \approx 0{,}1 \cdot x + 2{,}5$

d) $\sqrt{26} \approx 5{,}1$ TR: $\sqrt{26} = 5{,}0990...$

10.9 **a)** **1)** 65,97... cm **2)** $2 \cdot \pi \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 0{,}5 = 2 \cdot \pi \cdot 10{,}5 = 65{,}97...$ cm
Es gilt Gleichheit, weil u eine lineare Funktion ist und damit $u'(r_0) = \frac{u(r_0+\Delta r)-u(r_0)}{\Delta r}$.

b) **1)** $346{,}3...\,\text{cm}^2$ **2)** $345{,}5...\,\text{cm}^2$ **3)** Absoluter Fehler: $0{,}78...\,\text{cm}^2$ Relativer Fehler: $0{,}226...\,\%$

10.10 **a)** Näherungswert: $\sqrt{11} \approx 3{,}333...$ **b)** Absoluter Fehler: 0,0167... Relativer Fehler: 0,503... %

10.11 Lineare Approximation an der Stelle $x_0 = 1$: $\sqrt[5]{x} \approx 0{,}2 \cdot x + 0{,}8 \implies \sqrt[5]{1{,}02} \approx 1{,}004$
Absoluter Fehler: 0,000 031 6... Relativer Fehler: 0,0031... %

11. Funktionen in mehreren Variablen

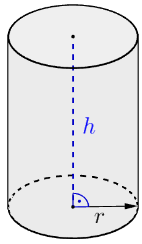
MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Funktionen in mehreren Variablen

11.1

Das Volumen V eines Zylinders hängt von seinem Radius r und seiner Höhe h ab:



$$V(h;r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

a) Ermittle die partielle Ableitung von V nach h und die partielle Ableitung nach r:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \qquad \qquad \frac{\partial V}{\partial r} =$$

Welche geometrische Bedeutung haben diese beiden partiellen Ableitungen?

b) Der Radius eines Zylinders mit Höhe $h = 8\,\text{cm}$ und Radius $r = 3\,\text{cm}$ wird um $\Delta r = 7\,\text{mm}$ vergrößert.

i) Berechne das neue Volumen mit der Volumsformel.

ii) Berechne das neue Volumen mit der Näherungsformel: $V(8; 3 + \Delta r) \approx V(8;3) + \frac{\partial V}{\partial r}(8;3) \cdot \Delta r$

c) Die Höhe und der Radius eines Zylinders mit Höhe $h = 8\,\text{cm}$ und Radius $r = 3\,\text{cm}$ werden gleichzeitig um $\Delta h = 5\,\text{mm}$ bzw. $\Delta r = 7\,\text{mm}$ vergrößert.

i) Berechne das neue Volumen mit der Volumsformel.

Die Näherungsformel lässt sich auf natürliche Weise auf mehrere Variablen erweitern:

$$V(8 + \Delta h; 3 + \Delta r) \approx V(8;3) + \frac{\partial V}{\partial h}(8;3) \cdot \Delta h + \frac{\partial V}{\partial r}(8;3) \cdot \Delta r$$

ii) Berechne das neue Volumen mit der Näherungsformel.

iii) Berechne den absoluten Fehler und den relativen Fehler.

11.2

Ermittle die angegebenen partiellen Ableitungen.

a) $p(a;b) = a^2 \cdot b^2 - \frac{5}{b}$ $\qquad \frac{\partial p}{\partial a}, \frac{\partial p}{\partial b}$

b) $f(x;y;z) = \frac{\sin(x) \cdot e^{2\cdot y}}{7} + 42 \cdot \sqrt{z} - 3$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

c) $g(\alpha;\beta) = \ln(\alpha) \cdot \alpha^2 \cdot \beta - \frac{\alpha}{\beta}$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial \alpha}, \frac{\partial g}{\partial \beta}$

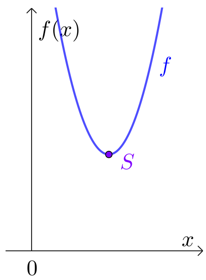
d) $h(x;y) = 5 \cdot \cos(x^2 - 3 \cdot x) \cdot y^7$ $\qquad \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$

e) $Q(z;n) = \frac{z^{1,8} \cdot e^n}{n^2} \cdot \ln(z)$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial n}$

f) $P(w;x) = x^3 \cdot w - \ln(x) \cdot e^w$ $\qquad \dfrac{\partial^2 P}{\partial w\,\partial x}, \dfrac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial w}$

11.3

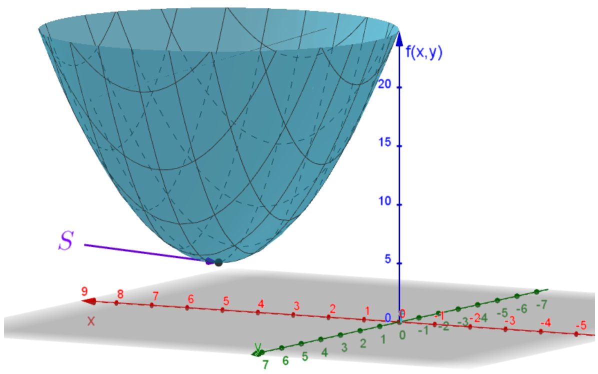
a) Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = x^2 - 8 \cdot x + 21$
Ihr Funktionsgraph ist die rechts dargestellte **Parabel**.
Berechne ihren Scheitelpunkt S.



b) Für die quadratische Funktion f in 2 Variablen gilt:

$$f(x;y) = x^2 + y^2 - 8 \cdot x - 4 \cdot y + 25$$

Ihr Funktionsgraph ist das unten dargestellte **Paraboloid**.



Ermittle die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Gesucht sind die Koordinaten des links dargestellten Scheitelpunkts $S = (x_S \mid y_S \mid z_S)$.

So wie bei **a)** muss in diesem Fall gelten:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_S;y_S) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_S;y_S) = 0$$

Berechne damit den Scheitelpunkt S.

11.1 a) $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi \cdot r^2$ gibt an, wie stark sich das Volumen ändert, wenn sich die Höhe des Zylinders verändert.
(Geometrisch: Deckfläche des Zylinders)
$\frac{\partial V}{\partial r} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ gibt an, wie stark sich das Volumen ändert, wenn sich der Radius des Zylinders verändert.
(Geometrisch: Mantelfläche des Zylinders)

b) **i)** $344{,}0\ldots\,\text{cm}^3$ **ii)** $331{,}7\ldots\,\text{cm}^3$

c) **i)** $365{,}5\ldots\,\text{cm}^3$ **ii)** $345{,}8\ldots\,\text{cm}^3$ **iii)** Absoluter Fehler: $19{,}68\ldots\,\text{cm}^3$ Relativer Fehler: $5{,}38\ldots\,\%$

11.2 a) $\dfrac{\partial p}{\partial a} = 2 \cdot a \cdot b^2 \qquad \dfrac{\partial p}{\partial b} = 2 \cdot a^2 \cdot b + \dfrac{5}{b^2}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\cos(x) \cdot e^{2\cdot y}}{7} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\sin(x) \cdot e^{2\cdot y} \cdot 2}{7} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{21}{\sqrt{z}}$

c) $\dfrac{\partial g}{\partial \alpha} = \alpha \cdot \beta + 2 \cdot \ln(\alpha) \cdot \alpha \cdot \beta - \dfrac{1}{\beta} \qquad \dfrac{\partial g}{\partial \beta} = \ln(\alpha) \cdot \alpha^2 + \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

d) $\dfrac{\partial h}{\partial x} = -5 \cdot \sin\left(x^2 - 3 \cdot x\right) \cdot y^7 \cdot (2 \cdot x - 3) \qquad \dfrac{\partial h}{\partial y} = 35 \cdot \cos(x^2 - 3 \cdot x) \cdot y^6$

e) $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{1{,}8 \cdot z^{0{,}8} \cdot e^n}{n^2} \cdot \ln(z) + \dfrac{z^{0{,}8} \cdot e^n}{n^2} \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial n} = \dfrac{z^{1{,}8} \cdot e^n \cdot n^2 - z^{1{,}8} \cdot e^n \cdot 2 \cdot n}{n^4} \cdot \ln(z)$

f) $\dfrac{\partial^2 P}{\partial w\,\partial x} = 3 \cdot x^2 - \dfrac{e^w}{x} \qquad \dfrac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial w} = 3 \cdot x^2 - \dfrac{e^w}{x}$

11.3 a) $S = (4 \mid 5)$ **b)** $S = (4 \mid 2 \mid 5)$