MATHEMATIK AUF AUGENHÖHE – 10. SCHULSTUFE

Inhaltsverzeichnis

Mathematik auf Augenhöhe MmF

- Die Aufgaben dieser Sammlung haben eine wesentliche Gemeinsamkeit:
  Für die Bearbeitung reichen Stift, Papier, Geodreieck und eventuell eine Formelsammlung.
- Die mit ☆ markierten Aufgaben sind anspruchsvoller.
- Zu Beginn jedes Abschnitts ist ein QR-Code, der zum ersten passenden MmF-Arbeitsblatt verlinkt ist.
- Jedes Kamera-Symbol ist mit einem passenden Video auf dem MmF-YouTube-Kanal verlinkt.
-
- Wir bedanken uns bei allen Kolleg*innen, die mit ihren zahlreichen Ideen und Rückmeldungen zur Weiterentwicklung dieser Aufgabensammlungen beigetragen haben.
  Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

Datum: 13. März 2024

1. Vorzeichentabellen & Ungleichungen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Linearfaktorform
- ✓ Arbeitsblatt – Ungleichungen

1.1

Die Terme $(x+2)$, $(x-4)$ bzw. $(x+2)\cdot(x-4)$ werden an verschiedenen Stellen ausgewertet.
Trage in jede Zelle ein, ob der Wert des Terms dort positiv $(+)$, negativ $(-)$ oder Null (0) ist.

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<4$	$x=4$	$x>4$
$x+2$					
$x-4$					
$(x+2)\cdot(x-4)$					

1.2

Die Terme $(x+3)$, $(x-1)^2$ bzw. $(x+3)\cdot(x-1)^2$ werden an verschiedenen Stellen ausgewertet.
Trage in jede Zelle ein, ob der Wert des Terms dort positiv $(+)$, negativ $(-)$ oder Null (0) ist.

	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<1$	$x=1$	$x>1$
$x+3$					
$(x-1)^2$					
$(x+3)\cdot(x-1)^2$					

1.3

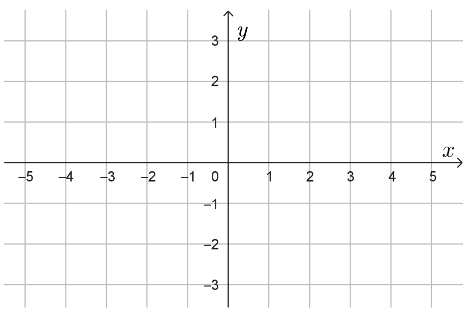
Das Vorzeichen von $f(x) = -2\cdot(x-3)\cdot(x-5)$ hängt von x ab.

a) Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $f(x)=0$?

b) Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $f(x)>0$?

c) Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $f(x)<0$?

d) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f.



1.4

Das Vorzeichen von $h(x) = x^2+2\cdot x-15$ hängt von x ab.

a) Ermittle die Linearfaktorform von h.

b) Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $h(x)=0$?

c) Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $h(x)>0$?

d) Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $h(x)<0$?

1.5

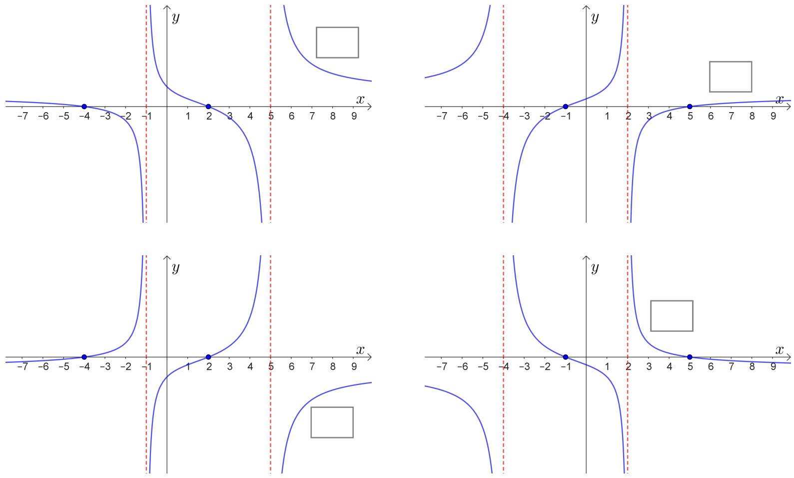
Für die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 gilt:

$$f_1(x) = \frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-5)}$$

$$f_2(x) = -\frac{(x+1)\cdot(x-5)}{(x+4)\cdot(x-2)}$$

$$f_3(x) = -\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-5)}$$

$$f_4(x) = \frac{(x+1)\cdot(x-5)}{(x+4)\cdot(x-2)}$$



Die Graphen der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 sind rechts oben dargestellt.
Trage den jeweiligen Funktionsnamen richtig in das Kästchen ein.

1.6

Löse die Ungleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengerade dar.

a) $4\cdot x+7>-1$ **b)** $-2\cdot x+5\geq 9$ **c)** $\dfrac{8-2\cdot x}{5}<4$ **d)** $\dfrac{5\cdot x-1}{-3}\leq 2$

1.7

Löse die Ungleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengerade dar.

a) $x^2\leq 9$ **b)** $x^2>16$ **c)** $\dfrac{42-x^2}{3}>2$ **d)** $-2\cdot x^2\geq -8$ **e)** ☆ $(x+2)^2>9$

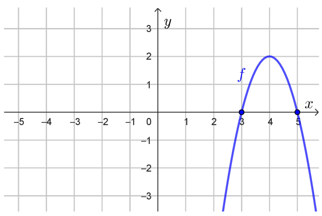
1.1

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x + 2) \cdot (x - 4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

1.2

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$(x + 3) \cdot (x - 1)^2$	$-$	0	$+$	0	$+$

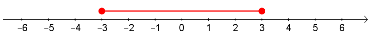
1.3 **a)** $x = 3$ und $x = 5$ **b)** $3 < x < 5$ **c)** $x < 3$ und $x > 5$ **d)**

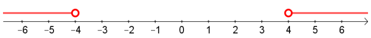


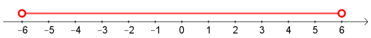
1.4 **a)** $h(x) = (x + 5) \cdot (x - 3)$ **b)** $x = -5$ und $x = 3$ **c)** $x < -5$ und $x > 3$ **d)** $-5 < x < 3$

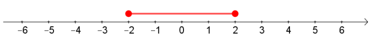
1.5 Links oben: f_1 Rechts oben: f_4 Links unten: f_3 Rechts unten: f_2

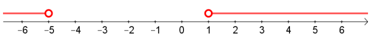
1.6 **a)** $x > -2$ **b)** $x \leq -2$ **c)** $x > -6$ **d)** $x \geq -1$

1.7 **a)** $-3 \leq x \leq 3$ 

b) $x > 4$ oder $x < -4$ 

c) $-6 < x < 6$ 

d) $-2 \leq x \leq 2$ 

e) $x > 1$ oder $x < -5$ 

2. Funktionen & Umkehrfunktionen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Änderungsmaße von Funktionen

✓ Arbeitsblatt – Verschiebung und Skalierung von Funktionsgraphen

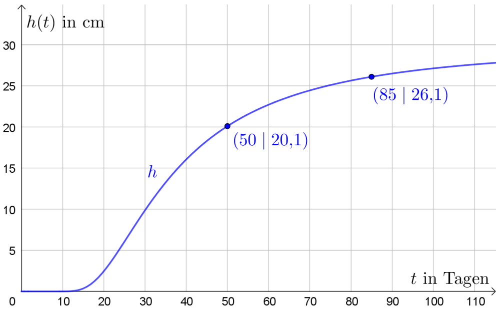
✓ Arbeitsblatt – Umkehrfunktionen

2.1

Das Wachstum einer Pflanze nach der Keimung wird aufgezeichnet.

- 50 Tage nach der Keimung ist die Pflanze 20,1 cm hoch.
- 85 Tage nach der Keimung ist die Pflanze 26,1 cm hoch.

Die Funktion h ordnet jedem Zeitpunkt t (in Tagen nach der Keimung) die entsprechende Pflanzenhöhe $h(t)$ (in cm) zu.



a) Berechne die absolute Änderung von h im Zeitintervall $[50; 85]$.
Interpretiere den Wert dieser absoluten Änderung im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Wie groß ist die relative Änderung von h im Zeitintervall $[50; 85]$ ungefähr?
Führe eine Überschlagsrechnung durch, und kreuze an:

☐ $\approx 6\,\%$ ☐ $\approx 20\,\%$ ☐ $\approx 25\,\%$ ☐ $\approx 30\,\%$ ☐ $\approx 35\,\%$

Interpretiere den Wert dieser relativen Änderung im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Sabine berechnet die mittlere Änderungsrate von h im Zeitintervall $[50; 85]$:

$$\frac{26{,}1 - 20{,}1}{85 - 50} \approx 0{,}17 \quad \boxed{}$$

Trage die richtige Einheit in das Kästchen oben ein.
Interpretiere den Wert dieser mittleren Änderungsrate im gegebenen Sachzusammenhang.

2.2

Der Graph der linearen Funktion f enthält den Punkt $(4 \mid 2)$.
Ermittle die Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot x + d$ der Funktion f mit der angegebenen Eigenschaft.

a) Die absolute Änderung von f im Intervall $[4; 7]$ beträgt 6.

b) Die relative Änderung von f im Intervall $[4; 7]$ beträgt $50\,\%$.

c) Die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[4; 7]$ beträgt -3.

Funktionsgleichung

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ordnet jeder reellen Zahl x eine reelle Zahl $f(x)$ zu.
Diese Zuordnung kann durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden. Zum Beispiel:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 20$$

Um den Funktionswert $f(☺)$ zu ermitteln, setzen wir auf der rechten Seite der Funktionsgleichung statt jedem x den Ausdruck ☺ (in Klammern) ein. Zum Beispiel:

- $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 20 = 12 + 10 + 20 = 42$
- $f(x+1) = 3 \cdot (x+1)^2 - 5 \cdot (x+1) + 20$
- $f(2 \cdot x) = 3 \cdot (2 \cdot x)^2 - 5 \cdot (2 \cdot x) + 20$

2.3

Für die lineare Funktion f gilt: $f(x) = -4 \cdot x + 2$
Mithilfe von f wird eine lineare Funktion g gebildet:

a) $g(x) = f(2 \cdot x)$ **b)** $g(x) = 2 \cdot f(x)$ **c)** $g(x) = f(0{,}5 \cdot x)$ **d)** $g(x) = 0{,}5 \cdot f(x)$ **e)** $g(x) = f(-x)$
f) $g(x) = -f(x)$ **g)** $g(x) = f(x+2)$ **h)** $g(x) = f(x) + 2$ **i)** $g(x) = f(x-2)$ **j)** $g(x) = f(x) - 2$

1) Welche Steigung hat die lineare Funktion g?

2) In welchem Punkt schneidet der Graph von g die senkrechte Achse?

2.4

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = x^2 - 4$
Ordne jeweils den passenden Funktionsterm aus A bis D zu.

$f(-x) =$	
$-f(x) =$	

A	$-x^2 + 4$
B	$-x^2 - 4$
C	$x^2 + 4$
D	$x^2 - 4$

2.5

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = x^2 - 4$
Ordne jeweils den passenden Funktionsterm aus A bis D zu.

$f(3 \cdot x) =$	
$3 \cdot f(x) =$	

A	$9 \cdot x^2 - 12$
B	$9 \cdot x^2 - 4$
C	$3 \cdot x^2 - 12$
D	$3 \cdot x^2 - 4$

2.6

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = x^2 - 4$
Ordne jeweils den passenden Funktionsterm aus A bis D zu.

$f(x) + 3 =$	
$f(x+3) =$	

A	$x^2 - 1$
B	$x^2 + 5$
C	$x^2 + 6 \cdot x + 5$
D	$x^2 + 3 \cdot x - 1$

2.7

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 4$

Mithilfe von f wird eine quadratische Funktion h gebildet:

a) $h(x) = f(2 \cdot x)$ **b)** $h(x) = 2 \cdot f(x)$ **c)** $h(x) = f(0{,}5 \cdot x)$ **d)** $h(x) = 0{,}5 \cdot f(x)$ **e)** $h(x) = f(-x)$

f) $h(x) = -f(x)$ **g)** $h(x) = f(x + 2)$ **h)** $h(x) = f(x) + 2$ **i)** $h(x) = f(x - 2)$ **j)** $h(x) = f(x) - 2$

1) Ermittle die Polynomform $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ der Funktion h.

2) In welchem Punkt schneidet der Graph von h die senkrechte Achse?

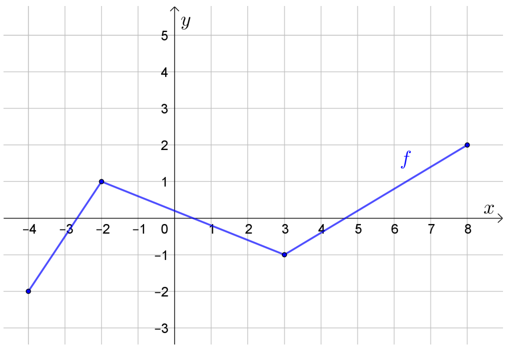
2.8

Der Graph einer stückweise linearen Funktion f mit Definitionsmenge $[-4; 8]$ ist dargestellt.

Mithilfe von f wird eine Funktion g definiert:

$$g(x) = f(x) + 3$$

Zeichne rechts den Graphen der Funktion g im Intervall $[-4; 8]$ ein.



2.9

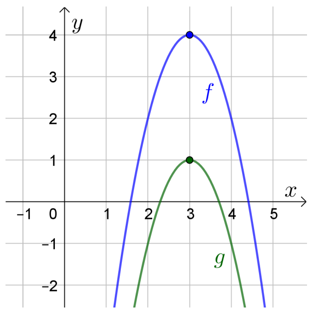
Für die rechts dargestellte quadratische Funktion f gilt:

$$f(x) = -2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 14$$

Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Funktionsgraphen von f in vertikaler Richtung.

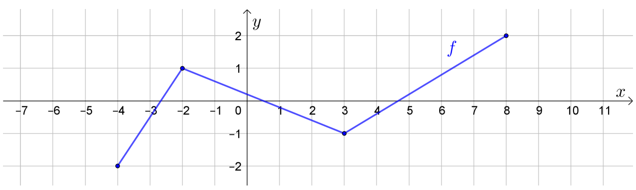
Ermittle die Koeffizienten a, b und c in der Polynomform von g:

$$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$



2.10

Der Graph einer stückweise linearen Funktion f mit Definitionsmenge $[-4; 8]$ ist dargestellt.



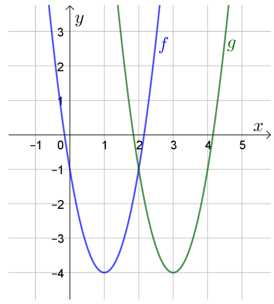
Mithilfe von f wird eine Funktion g definiert:

$$g(x) = f(x + 3)$$

Zeichne links den Graphen der Funktion g im Intervall $[-7; 5]$ ein.

2.11

Für die dargestellte quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 1$
Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Funktionsgraphen von f um 2 Einheiten nach rechts.



a) Kreuze die zutreffende Gleichung an.

☐ $g(x) = f(x) + 2$ ☐ $g(x) = f(x + 2)$ ☐ $g(x) = f(x - 2)$ ☐ $g(x) = f(x) - 2$

b) Ermittle die Koeffizienten a, b und c in der Polynomform von g:

$$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

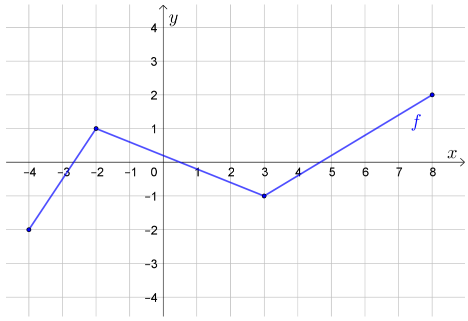
2.12

Der Graph einer stückweise linearen Funktion f mit Definitionsmenge $[-4; 8]$ ist dargestellt.

Mithilfe von f wird eine Funktion g definiert:

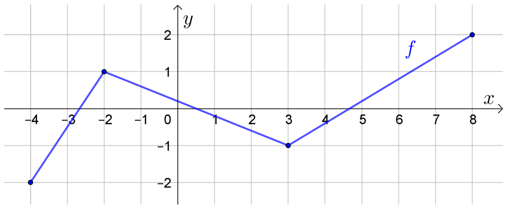
$$g(x) = 2 \cdot f(x)$$

Zeichne rechts den Graphen der Funktion g im Intervall $[-4; 8]$ ein.



2.13

Der Graph einer stückweise linearen Funktion f mit Definitionsmenge $[-4; 8]$ ist dargestellt.

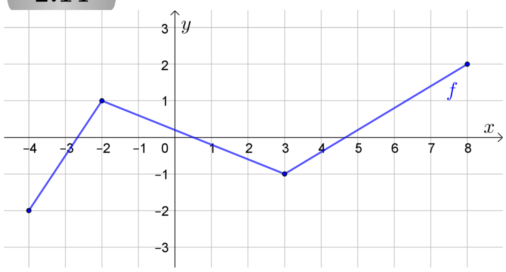


Mithilfe von f wird eine Funktion g definiert:

$$g(x) = f(2 \cdot x)$$

Zeichne links den Graphen der Funktion g im Intervall $[-2; 4]$ ein.

2.14



Der Graph einer stückweise linearen Funktion f mit Definitionsmenge $[-4; 8]$ ist dargestellt.

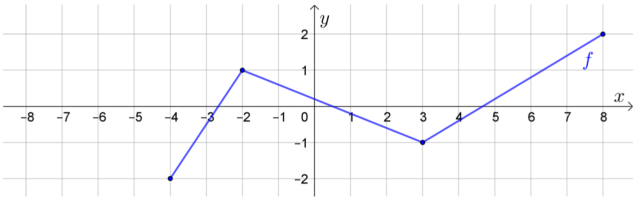
Mithilfe von f wird eine Funktion g definiert:

$$g(x) = -f(x)$$

Zeichne links den Graphen der Funktion g im Intervall $[-4; 8]$ ein.

2.15

Der Graph einer stückweise linearen Funktion f mit Definitionsmenge $[-4; 8]$ ist dargestellt.



Mithilfe von f wird eine Funktion g definiert:

$$g(x) = f(-x)$$

Zeichne links den Graphen der Funktion g im Intervall $[-8; 4]$ ein.

2.16

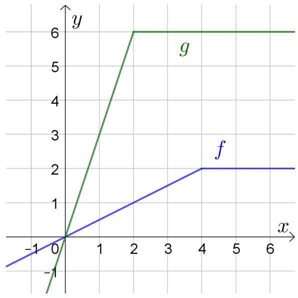
Der Graph einer stückweise linearen Funktion f ist dargestellt.

Der Funktionsgraph von g entsteht durch Skalierung des Funktionsgraphen von f in horizontaler Richtung und in vertikaler Richtung.

Es gibt also Zahlen a und b mit:

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$$

Ermittle a und b aus der Abbildung: $a =$ ☐ bzw. $b =$ ☐



2.17

Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nur für $x \geq 0$ dargestellt.

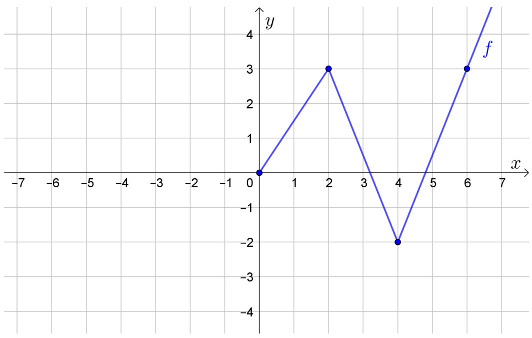
Der Graph von f ist symmetrisch zur senkrechten Achse.

„f ist eine gerade Funktion."

a) Vervollständige die Wertetabelle.

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$f(x)$							

b) Zeichne den Funktionsgraphen für $x < 0$ rechts ein.



2.18

Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nur für $x \geq 0$ dargestellt.

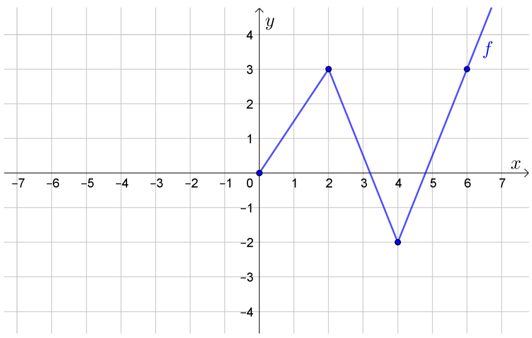
Der Graph von f ist symmetrisch zum Punkt $(0 \mid 0)$.

„f ist eine ungerade Funktion."

a) Vervollständige die Wertetabelle.

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$f(x)$							

b) Zeichne den Funktionsgraphen für $x < 0$ rechts ein.



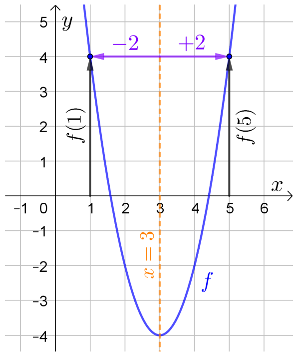
Symmetrie zu einer senkrechten Gerade

Rechts ist der Graph der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 14$$

dargestellt.
Ihr Funktionsgraph ist symmetrisch zur senkrechten Gerade $x = 3$.
Zum Beispiel gilt $f(3 - 2) = f(3 + 2)$ und allgemein:

$$f(3 - x) = f(3 + x)$$



Wir rechnen nach, dass tatsächlich $f(3 - x) = f(3 + x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(3-x) &= 2 \cdot (3-x)^2 - 12 \cdot (3-x) + 14 \\ &= 2 \cdot (9 - 6 \cdot x + x^2) - 36 + 12 \cdot x + 14 \\ &= 18 - 12 \cdot x + 2 \cdot x^2 - 22 + 12 \cdot x \\ &= 2 \cdot x^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3+x) &= 2 \cdot (3+x)^2 - 12 \cdot (3+x) + 14 \\ &= 2 \cdot (9 + 6 \cdot x + x^2) - 36 - 12 \cdot x + 14 \\ &= 18 + 12 \cdot x + 2 \cdot x^2 - 22 - 12 \cdot x \\ &= 2 \cdot x^2 - 4 \checkmark \end{aligned}$$

2.19

Der Graph der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 42$$

ist symmetrisch zu einer senkrechten Gerade. Für die quadratische Funktion g gilt:

$$g(x) = 3 \cdot x^2 - 30 \cdot x$$

a) Kreuze die zutreffende Aussage an.

- ☐ Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen von f in horizontaler Richtung.
- ☐ Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen von f in vertikaler Richtung.
- ☐ Der Graph der Funktion g entsteht durch Skalierung des Graphen von f in horizontaler Richtung.
- ☐ Der Graph der Funktion g entsteht durch Skalierung des Graphen von f in vertikaler Richtung.

b) Berechne die Nullstellen der Funktion g.

c) Trage jeweils die richtige Zahl in die Kästchen ein:

Der Graph der quadratischen Funktion g ist also symmetrisch zur senkrechten Gerade $x =$ ☐.

Der Graph der quadratischen Funktion f ist also symmetrisch zur senkrechten Gerade $x =$ ☐.

2.20

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = -4 \cdot x^2 + 2$
Rechne nach, dass $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Der Graph von f ist also symmetrisch zur senkrechten Achse.

2.21

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 5$

Rechne nach, dass $f(-2+x) = f(-2-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Der Graph von f ist also symmetrisch zur senkrechten Gerade $x = -2$.

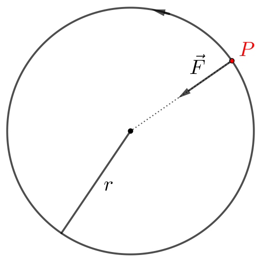
2.22

Für die kubische Funktion f gilt: $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 8$

Rechne nach, dass $f(2+x) = -f(2-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Der Graph von f ist also symmetrisch zum Punkt $(2 \mid 0)$.

2.23

Ein Punkt P mit Masse m bewegt sich entlang einer Kreisbahn mit Radius r.



Der Punkt hat entlang der Kreisbahn die konstante Geschwindigkeit v.
Dann wirkt auf den Punkt die sogenannte *Zentripetalkraft* $\vec{F}$,
die ausgehend von P in Richtung des Kreismittelpunkts zeigt.
Für den Betrag der Zentripetalkraft gilt:

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

F ... Betrag der Zentripetalkraft in N
m ... Masse des Punkts in kg
v ... Geschwindigkeit in m/s
r ... Kreisradius in m

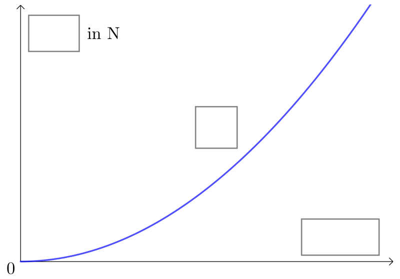
- Sind v und r konstant, dann ordnet die Funktion f jeder Masse die entsprechende Zentripetalkraft zu:
  $$f(m) = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \text{(in N)}$$
- Sind m und r konstant, dann ordnet die Funktion g jeder Geschwindigkeit die entsprechende Zentripetalkraft zu:
  $$g(v) = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \text{(in N)}$$
- Sind m und v konstant, dann ordnet die Funktion h jedem Radius die entsprechende Zentripetalkraft zu:
  $$h(r) = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \text{(in N)}$$

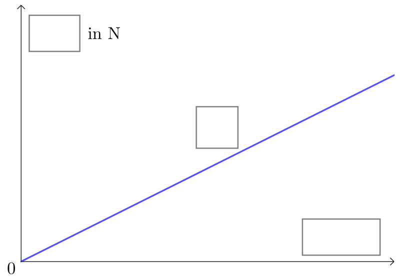
Die Graphen der Funktionen f, g und h sind unten dargestellt.

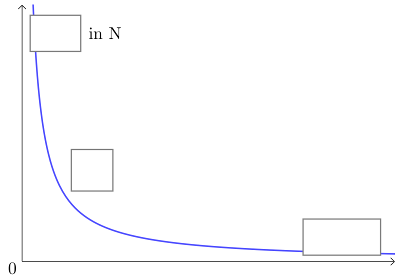
a) Ordne den Funktionsgraphen jeweils die richtige Beschriftung f, g bzw. h zu.

b) Ordne den vertikalen Achsen jeweils die richtige Beschriftung $f(m)$, $g(v)$ bzw. $h(r)$ zu.

c) Ordne den horizontalen Achsen jeweils die richtige Beschriftung m in kg, v in m/s bzw. r in m zu.



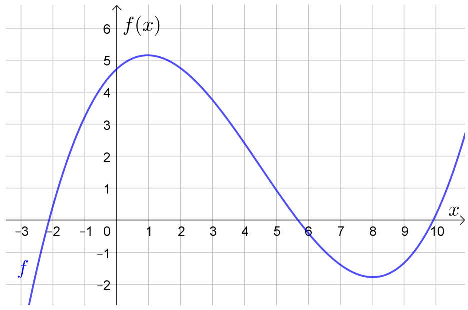




2.24

In der untenstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dargestellt.
Auf welchen der folgenden Intervalle hat die Funktion f eine Umkehrfunktion?
Kreuze die beiden zutreffenden Intervalle an.

$[-2; 2]$	☐
$[2; 6]$	☐
$[6; 9]$	☐
$[0; 4]$	☐
$[-2; 0]$	☐



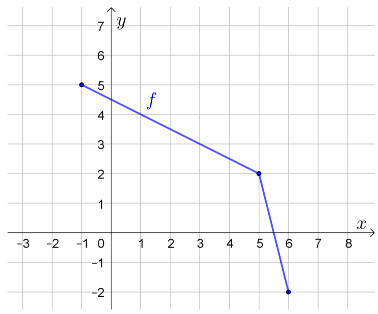
2.25

Der Graph einer stückweise linearen Funktion f
mit Definitionsmenge $[-1; 6]$ ist dargestellt.

a) Begründe, warum f eine Umkehrfunktion hat.

b) Ermittle die größtmögliche Definitionsmenge ihrer Umkehrfunktion.

c) Zeichne rechts den Graphen der Umkehrfunktion ein.



2.26

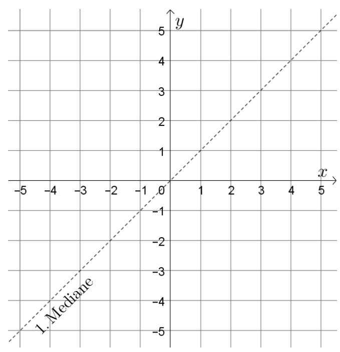
Für die lineare Funktion f gilt: $f(x) = 2 \cdot x - 1$

Rechts ist ein Ausschnitt der Zahlenebene dargestellt.

a) Zeichne den Funktionsgraphen von f rechts ein.

b) Zeichne den Graphen der Umkehrfunktion rechts ein.

c) Ermittle eine Gleichung der Umkehrfunktion von f.
Welche Steigung hat sie?



2.27

Rechts ist der Graph der quadratischen Funktion f
mit $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$ dargestellt.

Am Funktionsgraphen von f sind 4 Gitterpunkte markiert.

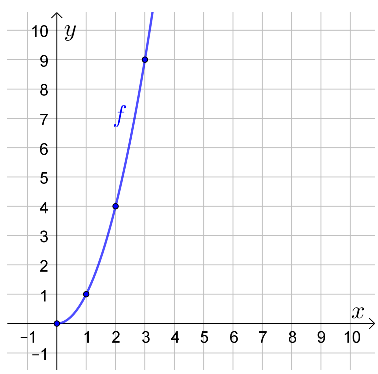
Die Umkehrfunktion von f ist die Wurzelfunktion g mit

$$g(x) = \sqrt[2]{x}\,,$$

deren Graph im rechts dargestellten Bereich auch 4 Gitterpunkte enthält.

a) Markiere diese 4 Gitterpunkte in der Abbildung rechts mit einem ×.

b) Skizziere den Graphen der Wurzelfunktion g.



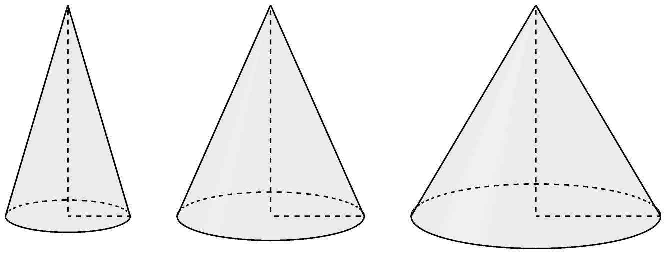
2.28

Die dargestellten Drehkegel haben alle die gleiche Höhe $h = 7\,\text{cm}$, aber verschiedene Radien.

Das Volumen V jedes Drehkegels hängt von seinem Radius r ab:

$$V(r) = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 7}{3}$$

$r \ldots$ Radius in cm
$V(r) \ldots$ Volumen in cm^3



a) Der mittlere Drehkegel hat den Radius $r = 3\,\text{cm}$.
Wie viel Milliliter Wasser passen ungefähr in diesen Drehkegel?
Führe eine Überschlagsrechnung durch und kreuze an.

☐ $\approx 2\,\text{ml}$ ☐ $\approx 6{,}5\,\text{ml}$ ☐ $\approx 20\,\text{ml}$ ☐ $\approx 65\,\text{ml}$ ☐ $\approx 200\,\text{ml}$ ☐ $\approx 650\,\text{ml}$

b) Umgekehrt hängt der Radius r jedes Drehkegels mit Höhe $h = 7\,\text{cm}$ von seinem Volumen V ab:

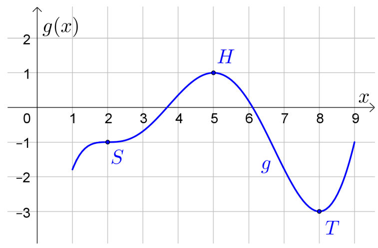
$r(V) =$ ☐

Trage den Funktionsterm dieser Umkehrfunktion in das Kästchen oben ein (V in cm^3, $r(V)$ in cm).

2.29

Die rechts dargestellte Funktion g hat die Definitionsmenge $[1; 9]$.
In genau 3 Punkten hat der Funktionsgraph die Steigung Null:

- Der Punkt $H = (5 \mid 1)$ ist ein **Hochpunkt / lokales Maximum** von g.
- Der Punkt $T = (8 \mid -3)$ ist ein **Tiefpunkt / lokales Minimum** von g.
- Der Punkt $S = (2 \mid -1)$ ist ein **Sattelpunkt** von g.



a) Begründe, warum g auf dem Intervall $[1; 9]$ *keine* Umkehrfunktion hat.

b) Gib ein *möglichst breites* Intervall an, auf dem g eine Umkehrfunktion hat.

2.1 **a)** Absolute Änderung: 6 cm
Die Pflanze ist im Zeitintervall [50; 85] insgesamt um 6 cm gewachsen.

b) Relative Änderung: $\approx 30\,\%$
Die Pflanze ist im Zeitintervall [50; 85] insgesamt um rund 30 % gewachsen.

c) Mittlere Änderungsrate: $\approx 0{,}17$ cm/Tag
Die Pflanze ist im Zeitintervall [50; 85] pro Tag durchschnittlich um rund 0,17 cm gewachsen.

2.2 **a)** $f(x) = 2 \cdot x - 6$ **b)** $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3}$ **c)** $f(x) = -3 \cdot x + 14$

2.3 **a)** $k = -8,\ (0 \mid 2)$ **b)** $k = -8,\ (0 \mid 4)$ **c)** $k = -2,\ (0 \mid 2)$ **d)** $k = -2,\ (0 \mid 1)$ **e)** $k = 4,\ (0 \mid 2)$ **f)** $k = 4,\ (0 \mid -2)$ **g)** $k = -4,\ (0 \mid -6)$ **h)** $k = -4,\ (0 \mid 4)$ **i)** $k = -4,\ (0 \mid 10)$ **j)** $k = -4,\ (0 \mid 0)$

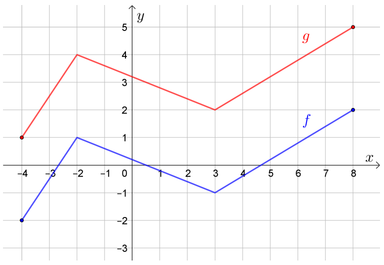
2.4 Oben: D Unten: A

2.5 Oben: B Unten: C

2.6 Oben: A Unten: C

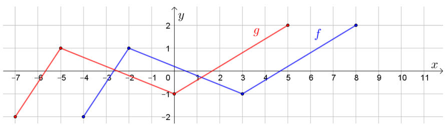
2.7 **a)** $h(x) = 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 4,\ (0 \mid 4)$ **b)** $h(x) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 8,\ (0 \mid 8)$ **c)** $h(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4,\ (0 \mid 4)$ **d)** $h(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2,\ (0 \mid 2)$ **e)** $h(x) = x^2 + 4 \cdot x + 4,\ (0 \mid 4)$ **f)** $h(x) = -x^2 + 4 \cdot x - 4,\ (0 \mid -4)$ **g)** $h(x) = x^2,\ (0 \mid 0)$ **h)** $h(x) = x^2 - 4 \cdot x + 6,\ (0 \mid 6)$ **i)** $h(x) = x^2 - 8 \cdot x + 16,\ (0 \mid 16)$ **j)** $h(x) = x^2 - 4 \cdot x + 2,\ (0 \mid 2)$

2.8



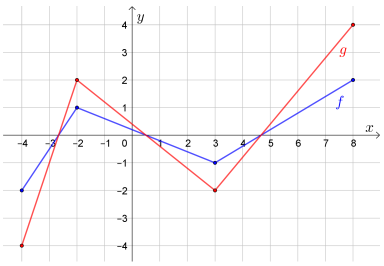
2.9 $g(x) = -2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 17$

2.10

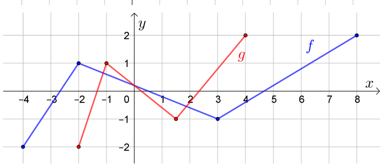


2.11 **a)** $g(x) = f(x - 2)$ **b)** $g(x) = 3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 23$

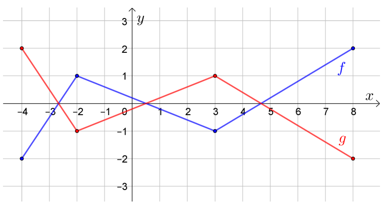
2.12



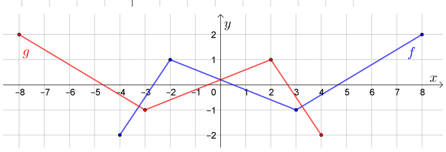
2.13



2.14



2.15

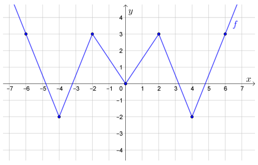


2.16 $a = 3,\ b = 2$

2.17 **a)**

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$f(x)$	3	-2	3	0	3	-2	3

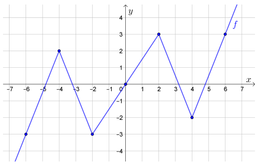
b)



2.18 **a)**

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$f(x)$	-3	2	-3	0	3	-2	3

b)



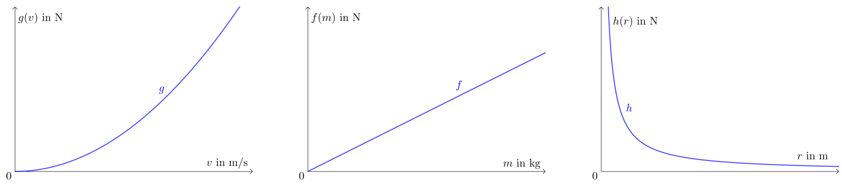
2.19 **a)** Verschiebung in vertikaler Richtung **b)** $x_1 = 0,\ x_2 = 10$ **c)** $x = 5,\ x = 5$

2.20 $f(-x) = -4 \cdot (-x)^2 + 2 = -4 \cdot x^2 + 2 = f(x)$
$\implies f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

2.21 $f(-2+x) = 3 \cdot (-2+x)^2 + 12 \cdot (-2+x) + 5 = \dots = 3 \cdot x^2 - 7$
$f(-2-x) = 3 \cdot (-2-x)^2 + 12 \cdot (-2-x) + 5 = \dots = 3 \cdot x^2 - 7$
$\implies f(-2+x) = f(-2-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

2.22 $f(2+x) = (2+x)^3 - 6 \cdot (2+x)^2 + 12 \cdot (2+x) - 8 = \dots = x^3$
$f(2-x) = (2-x)^3 - 6 \cdot (2-x)^2 + 12 \cdot (2-x) - 8 = \dots = -x^3$
$\implies f(2+x) = -f(2-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

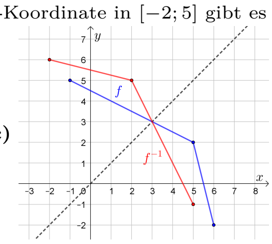
2.23



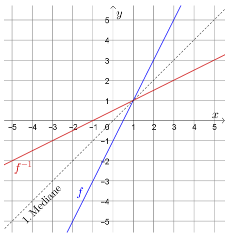
2.24 $[2; 6]$ und $[-2; 0]$

2.25 **a)** Zu jeder y-Koordinate in $[-2; 5]$ gibt es genau einen zugehörigen Punkt am Graphen von f.

b) $[-2; 5]$ **c)**

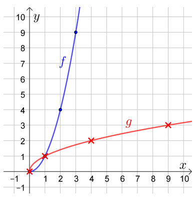


2.26 **a)** **b)**



c) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$ hat die Steigung $\frac{1}{2}$.

2.27



2.28 **a)** $\approx 65\,\text{ml}$ **b)** $r(V) = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{7 \cdot \pi}}$

2.29 **a)** An *verschiedenen* Stellen in $[1; 9]$ wird der *gleiche* Funktionswert angenommen, z.B. $g(2) = g(6{,}5\ldots) = -1$. **b)** $[1; 5]$

3. Potenzen, Wurzeln & Polynomfunktionen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Potenzen und Wurzeln
- ✓ Arbeitsblatt – Polynomfunktionen

3.1

Es gilt $a, b, c > 0$. Trage den richtigen Exponenten in das jeweilige Kästchen ein.

a) $a^2 \cdot b^3 \cdot a^3 \cdot b^{-4} = a^{\square} \cdot b^{\square}$

b) $a^4 \cdot b^{-2} \cdot \left(c^2\right)^4 \cdot a^2 \cdot b^5 \cdot \left(c^{-2}\right)^{-5} = a^{\square} \cdot b^{\square} \cdot c^{\square}$

c) $\dfrac{\left(a^2 \cdot b\right)^3 \cdot c^2}{a^2 \cdot b \cdot c^4} = a^{\square} \cdot b^{\square} \cdot c^{\square}$

3.2

Es gilt $a, b, c > 0$. Ziehe die Wurzel.

a) $\sqrt{a^8}$ **b)** $\sqrt{25 \cdot a^2}$ **c)** $\sqrt{a^4 \cdot b^6}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^4}}$ **e)** $\sqrt[3]{a^9 \cdot b^{15} \cdot c^6}$ **f)** $\sqrt{25 \cdot a^2 - 16 \cdot a^2}$ **g)** $\sqrt{9 \cdot a^2 + 16 \cdot a^2}$

3.3

Es gilt $a > 0$. Welche der folgenden Terme sind zum Term $\sqrt{3 \cdot a^2}$ äquivalent? Kreuze alle an.

☐ $3 \cdot a$ ☐ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2}$ ☐ $a \cdot \sqrt{3}$ ☐ $\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a}$

3.4

Es gilt $a > 0$. Welche der folgenden Terme sind zum Term $\sqrt{9 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2}$ äquivalent? Kreuze alle an.

☐ $a \cdot \sqrt{5}$ ☐ a ☐ $\sqrt{9 \cdot a^2} - \sqrt{4 \cdot a^2}$ ☐ $5 \cdot a$ ☐ $\sqrt{5 \cdot a^2}$

3.5

Es gilt $a > 0$. Welche der folgenden Terme sind zum Term $\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ äquivalent? Kreuze alle an.

☐ $\dfrac{a}{2}$ ☐ $a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{4}}$ ☐ $a - \dfrac{a}{2}$ ☐ $a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3.6

Es gilt $x, y > 0$. Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

a) $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ **b)** $\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)$

3.7

Schreibe die Potenz als Wurzel, und berechne das Ergebnis.

a) $16^{\frac{1}{2}}$ **b)** $64^{\frac{1}{3}}$ **c)** $16^{\frac{1}{4}}$ **d)** $25^{-\frac{1}{2}}$ **e)** $8^{-\frac{1}{3}}$

3.8

Es gilt $a > 0$. Vereinfache so weit wie möglich, und stelle das Ergebnis in der Form $\sqrt[n]{a^m}$ mit $m, n \in \mathbb{N}^*$ dar.

a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$ **c)** $\left(a^{\frac{3}{10}}\right)^6$

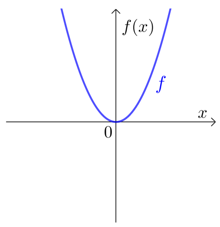
3.9

Es gilt $a > 0$. Vereinfache so weit wie möglich, und stelle das Ergebnis in der Form $\sqrt[n]{a^m}$ mit $m, n \in \mathbb{N}^*$ dar.

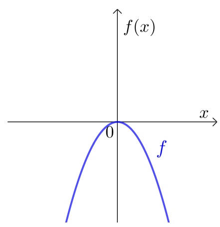
a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$

3.10

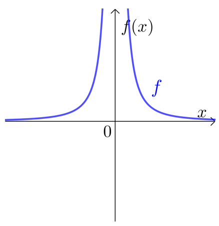
Der Graph einer Potenzfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^m$ ist dargestellt ($a \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}^*$).
Ist m positiv oder negativ? Ist m gerade oder ungerade? Ist a positiv oder negativ? Kreuze jeweils an.

a) 

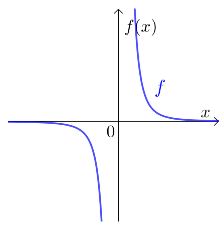
☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ m gerade ☐ m ungerade
☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$

b) 

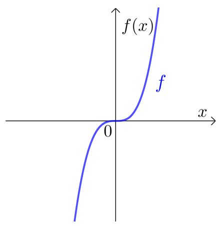
☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ m gerade ☐ m ungerade
☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$

c) 

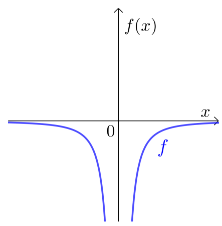
☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ m gerade ☐ m ungerade
☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$

d) 

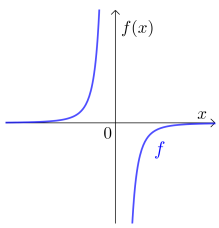
☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ m gerade ☐ m ungerade
☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$

e) 

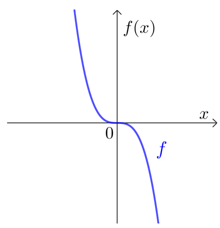
☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ m gerade ☐ m ungerade
☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$

f) 

☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ m gerade ☐ m ungerade
☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$

g) 

☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ m gerade ☐ m ungerade
☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$

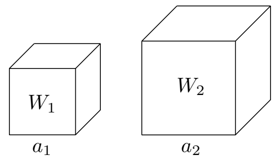
h) 

☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ m gerade ☐ m ungerade
☐ $a > 0$ ☐ $a < 0$

3.11

Der Oberflächeninhalt des dargestellten Würfels W_2 ist doppelt so groß wie jener von Würfel W_1.

a) Für die Seitenlängen der Würfel gilt dann: $a_2 : a_1 = c : 1$
Wie groß ist c? Kreuze an.



☐ $c = \sqrt[3]{2}$ ☐ $c = \sqrt{2}$ ☐ $c = \left(\sqrt{2}\right)^3$ ☐ $c = 2^2$ ☐ $c = 2^3$

b) Das Volumen von Würfel W_1 wird mit V_1 abgekürzt. Das Volumen von Würfel W_2 wird mit V_2 abgekürzt.
Für die Volumina der Würfel gilt dann: $V_2 : V_1 = d : 1$
Wie groß ist d? Kreuze an.

☐ $d = \sqrt[3]{2}$ ☐ $d = \sqrt{2}$ ☐ $d = \left(\sqrt{2}\right)^3$ ☐ $d = 2^2$ ☐ $d = 2^3$

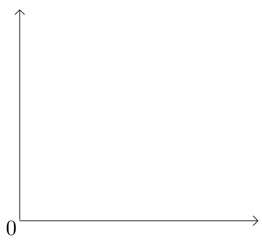
3.12

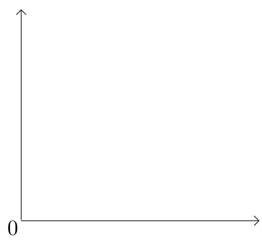
Für die elektrische Spannung U, die Stromstärke I und den elektrischen Widerstand R gilt das *Ohmsche Gesetz*:

$$I = \frac{U}{R}$$

a) Der Widerstand R ist konstant und positiv.
Skizziere links unten einen möglichen Graphen der Funktion $U \mapsto I(U) = \frac{U}{R}$. Beschrifte die Achsen.

b) Die Spannung U ist konstant und positiv.
Skizziere rechts unten einen möglichen Graphen der Funktion $R \mapsto I(R) = \frac{U}{R}$. Beschrifte die Achsen.





3.13

Gegeben ist eine Polynomfunktion f.

a) Ermittle den Grad von f.

b) Ermittle die Nullstellen von f über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 2 \cdot (x-3) \cdot (x+5)$

b) $f(x) = -3 \cdot (x^2-4) \cdot (x+1)$

c) $f(x) = 5 \cdot (x^2-9) \cdot (x^2+9)$

d) $f(x) = x \cdot (2 \cdot x + 4) \cdot (2 \cdot x^2 + 4)$

e) $f(x) = x \cdot (2 \cdot x + 14) \cdot (x^2 + 8 \cdot x + 15)$

f) $f(x) = (x^3-8) \cdot (x+1) \cdot (x^2-9)$

3.14

Berechne die Nullstellen der Polynomfunktion f über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^2 - 4 \cdot x$

b) $f(x) = x^3 - 4 \cdot x$

c) $f(x) = x^3 + 4 \cdot x$

d) $f(x) = x^3 + 4 \cdot x^2$

e) $f(x) = x^4 - 4 \cdot x^2$

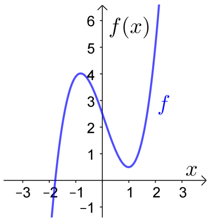
f) $f(x) = x^4 + 4 \cdot x^2$

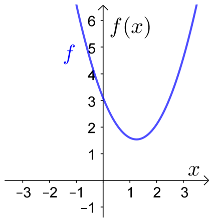
3.15

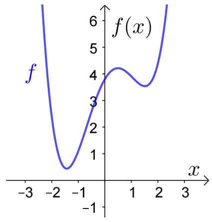
Der Graph einer Polynomfunktion f ist dargestellt.
Trage die größte natürliche Zahl in das Kästchen ein, für die die Aussage jedenfalls stimmt.

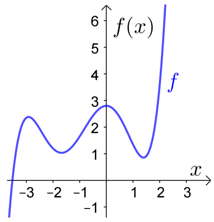
Die dargestellte Polynomfunktion f hat mindestens …

a) … den Grad ☐. **b)** … den Grad ☐. **c)** … den Grad ☐. **d)** … den Grad ☐.









3.16

Der Graph einer Polynomfunktion f vom Grad 3 ist rechts dargestellt.

a) Ermittle die Linearfaktorform von f.
Gesucht sind also Zahlen a, x_1, x_2 und x_3, sodass

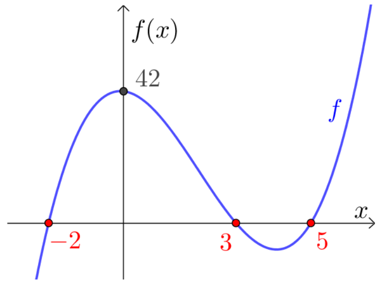
$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Ermittle die Polynomform von f.
Gesucht sind also Zahlen a, b, c und d, sodass

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.



3.1 a) $a^5 \cdot b^{-1}$ **b)** $a^6 \cdot b^3 \cdot c^{18}$ **c)** $a^4 \cdot b^2 \cdot c^{-2}$

3.2 a) a^4 **b)** $5 \cdot a$ **c)** $a^2 \cdot b^3$ **d)** $\frac{a}{b^2}$ **e)** $a^3 \cdot b^5 \cdot c^2$ **f)** $3 \cdot a$ **g)** $5 \cdot a$

3.3 $\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2}$ und $a \cdot \sqrt{3}$

3.4 $a \cdot \sqrt{5}$ und $\sqrt{5 \cdot a^2}$

3.5 $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$

3.6 a) $x - y$ **b)** 1

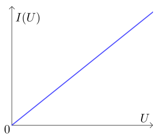
3.7 a) $\sqrt{16} = 4$ **b)** $\sqrt[3]{64} = 4$ **c)** $\sqrt[4]{16} = 2$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$ **e)** $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

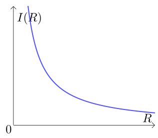
3.8 a) $\sqrt[6]{a^5}$ **b)** $\sqrt[6]{a}$ **c)** $\sqrt[5]{a^9}$

3.9 a) $\sqrt[6]{a^5}$ **b)** $\sqrt[4]{a}$ **c)** $\sqrt[6]{a}$

3.10 a) $m > 0$, m gerade, $a > 0$ **b)** $m > 0$, m gerade, $a < 0$ **c)** $m < 0$, m gerade, $a > 0$ **d)** $m < 0$, m ungerade, $a > 0$ **e)** $m > 0$, m ungerade, $a > 0$ **f)** $m < 0$, m gerade, $a < 0$ **g)** $m < 0$, m ungerade, $a < 0$ **h)** $m > 0$, m ungerade, $a < 0$

3.11 a) $c = \sqrt{2}$ **b)** $d = (\sqrt{2})^3$

3.12 a) 

b) 

3.13 a) Grad 2 mit Nullstellen 3 und −5 **b)** Grad 3 mit Nullstellen −2, 2 und −1 **c)** Grad 4 mit Nullstellen −3 und 3 **d)** Grad 4 mit Nullstellen 0 und −2 **e)** Grad 4 mit Nullstellen 0, −7, −3 und −5 **f)** Grad 6 mit Nullstellen 2, −1, −3 und 3

3.14 a) $\{0, 4\}$ **b)** $\{-2, 0, 2\}$ **c)** $\{0\}$ **d)** $\{-4, 0\}$ **e)** $\{-2, 0, 2\}$ **f)** $\{0\}$

3.15 a) Grad 3 (z.B. $f(x) = 2$ hat 3 Lösungen) **b)** Grad 2 (z.B. $f(x) = 4$ hat 2 Lösungen) **c)** Grad 4 (z.B. $f(x) = 4$ hat 4 Lösungen) **d)** Grad 5 (z.B. $f(x) = 2$ hat 5 Lösungen)

3.16 a) $f(x) = \frac{7}{5} \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)$ **b)** $f(x) = \frac{7}{5} \cdot x^3 - \frac{42}{5} \cdot x^2 - \frac{7}{5} \cdot x + 42$

4. Exponentialfunktionen & Logarithmusfunktionen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Exponentialfunktionen
- ✓ Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen

4.1

Für die Exponentialfunktion f gilt: $f(x) = c \cdot 1{,}2^x$

Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein.

a) $f(1)$ ist um $\boxed{}$ % größer als $f(0)$. **b)** $f(2)$ ist um $\boxed{}$ % größer als $f(1)$.

c) $f(x+1)$ ist um $\boxed{}$ % größer als $f(x)$. **d)** $f(2)$ ist um $\boxed{}$ % größer als $f(0)$.

4.2

Für die Exponentialfunktion g gilt: $g(x) = c \cdot 0{,}8^x$

Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein.

a) $g(1)$ ist um $\boxed{}$ % kleiner als $g(0)$. **b)** $g(2)$ ist um $\boxed{}$ % kleiner als $g(1)$.

c) $g(x+1)$ ist um $\boxed{}$ % kleiner als $g(x)$. **d)** $g(2)$ ist um $\boxed{}$ % kleiner als $g(0)$.

4.3

Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.

a) Das Kapital auf einem Sparbuch wächst exponentiell.
Zu Beginn $(n = 0)$ befinden sich 420 € auf dem Sparbuch.
Pro Jahr wächst das Kapital um 1,2 %.
$K(n)$ ist das Kapital nach n Jahren.

$$K(n) = \boxed{} \cdot \boxed{}^{\,n}$$

b) Die im Blut vorhandene Wirkstoffmenge eines bestimmten Medikaments nimmt exponentiell ab.
Zu Beginn $(t = 0)$ befinden sich 42 mg des Wirkstoffs im Blut.
Pro Stunde nimmt die im Blut vorhandene Wirkstoffmenge um 15 % ab.
$N(t)$ ist die im Blut vorhandene Wirkstoffmenge nach t Stunden.

$$N(t) = \boxed{} \cdot \boxed{}^{\,t}$$

4.4

Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.

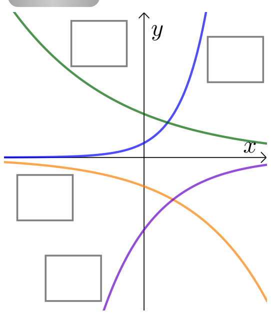
a) Die Bakterienanzahl in einer Petrischale nimmt exponentiell zu.
Zu Beginn ($t = 0$) befinden sich 30 Bakterien in einer Petrischale.
Nach 3 Stunden ist die Bakterienanzahl in dieser Petrischale um 28 % größer als zu Beginn.
$B(t)$ ist die Bakterienanzahl nach t Stunden.

$$B(t) = \square \cdot \square^{\square \cdot t}$$

b) Beim Tauchen nimmt die Lichtintensität mit zunehmender Tiefe exponentiell ab.
I_0 ist die Lichtintensität an der Wasseroberfläche.
In 30 cm Tauchtiefe ist die Lichtintensität um 7 % kleiner als an der Wasseroberfläche.
$I(x)$ ist die Lichtintensität in x cm Tauchtiefe.

$$I(x) = I_0 \cdot \square^{\square \cdot x}$$

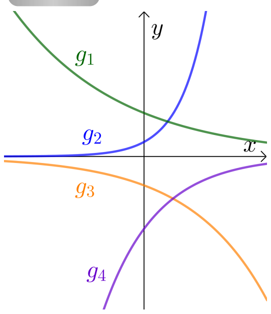
4.5



Die Graphen von 4 Exponentialfunktionen sind dargestellt.
Beschrifte links die Funktionsgraphen.

- $f_1(x) = 1{,}2 \cdot 0{,}6^x$
- $f_3(x) = -0{,}8 \cdot 2^x$
- $f_2(x) = 0{,}4 \cdot 7{,}4^x$
- $f_4(x) = -2 \cdot 0{,}4^x$

4.6



Die Graphen von 4 Exponentialfunktionen sind dargestellt.
Das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion g mit

$$g(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$$

hängt von den Vorzeichen von c und k ab.
Trage passend zu den Graphen $>$ bzw. $<$ in die Kästchen ein.

- g_1: $c \square 0$ und $k \square 0$
- g_3: $c \square 0$ und $k \square 0$
- g_2: $c \square 0$ und $k \square 0$
- g_4: $c \square 0$ und $k \square 0$

4.7

Welche der folgenden Terme sind zum Term $10^x \cdot 10^x$ äquivalent? Kreuze alle an.

☐ $2 \cdot 10^x$ ☐ $10^{2 \cdot x}$ ☐ 100^x ☐ $100^{2 \cdot x}$ ☐ $10^{(x^2)}$

4.8

Für die Exponentialfunktion f gilt: $f(x) = 4 \cdot e^x$

Welche der folgenden Terme sind zum Term $f(2 \cdot x)$ äquivalent? Kreuze alle an.

☐ $8 \cdot e^x$ ☐ $4 \cdot e^{2 \cdot x}$ ☐ $(4 \cdot e^x)^2$ ☐ $4 \cdot (e^x)^2$ ☐ $(2 \cdot e^x)^2$

4.9

Rechts ist der Graph der Exponentialfunktion f mit $f(x) = 2^x$ dargestellt.

Am Funktionsgraphen von f sind 4 Gitterpunkte markiert.

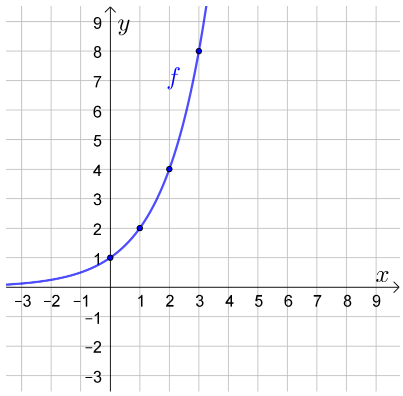
Die Umkehrfunktion von f ist die Logarithmusfunktion g mit

$$g(x) = \log_2(x)\,,$$

deren Graph im rechts dargestellten Bereich auch 4 Gitterpunkte enthält.

a) Markiere diese 4 Gitterpunkte in der Abbildung rechts mit einem ×.

b) Skizziere den Graphen der Logarithmusfunktion g.



Logarithmus

Zum Lösen der folgenden Aufgaben stehen dir folgende Informationen zur Verfügung: $b, m, n > 0,\ b \neq 1$

1) Definition des Logarithmus: $\log_b(m) = x \iff b^x = m$

Insbesondere gilt: $\log_b(b^n) = n$

2) Rechenregeln für Logarithmen:

i) $\log_b(m \cdot n) = \log_b(m) + \log_b(n)$ **ii)** $\log_b(\frac{m}{n}) = \log_b(m) - \log_b(n)$ **iii)** $\log_b(m^r) = r \cdot \log_b(m)$

4.10

Berechne das Ergebnis.

a) $\log_2(16) =$ ☐ **b)** $\log_3(9) =$ ☐ **c)** $\log_{42}(1) =$ ☐ **d)** $\lg(1000) =$ ☐ **e)** $\ln(e^5) =$ ☐

4.11

Kreuze alle Rechnungen an, die das gleiche Ergebnis wie $\ln(3 \cdot 5^2)$ liefern.

☐ $\ln(3) \cdot \ln(5^2)$ ☐ $\ln(3) + 2 \cdot \ln(5)$ ☐ $2 \cdot \ln(3) + 2 \cdot \ln(5)$ ☐ $3 \cdot \ln(5^2)$ ☐ $2 \cdot \ln(3 \cdot 5)$ ☐ $\ln(5^2) + \ln(3)$

4.12

Kreuze die *nicht* zutreffende Aussage an.

☐ $\lg(4) = 2 \cdot \lg(2)$ ☐ $\lg(6) = \lg(2) + \lg(3)$ ☐ $\lg(\frac{2}{3}) = \lg(2) - \lg(3)$

☐ $\lg(30) = 1 + \lg(3)$ ☐ $\lg(0{,}03) = 2 - \lg(3)$

4.13

Kreuze die *nicht* zutreffende Aussage an.

☐ $\lg(32) = 5 \cdot \lg(2)$ ☐ $\lg(36) = 2 \cdot [\lg(2) + \lg(3)]$ ☐ $\lg(40) = 2 \cdot [1 + \lg(2)]$ ☐ $\lg(60) = 1 + \lg(2) + \lg(3)$

4.14

Zwischen welchen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen liegt die angegebene Zahl?

a) $\lg(9)$ **b)** $\lg(10)$ **c)** $\lg(11)$ **d)** $\lg(99)$ **e)** $\lg(100)$ **f)** $\lg(101)$ **g)** ☆ $\lg(142) + \lg(421)$

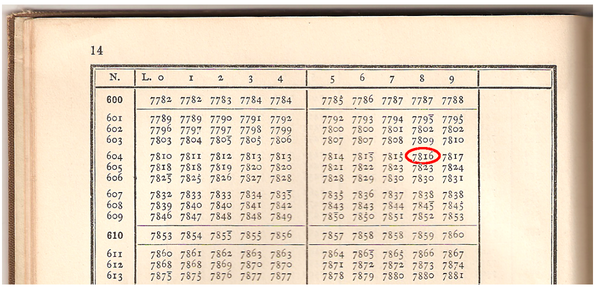
4.15

Die ersten 4 Nachkommastellen von $\lg(604{,}8)$ sind 7816.

a) Trage die richtige Ziffer in das Kästchen ein:

$$\lg(604{,}8) = \boxed{}{,}7816\ldots$$

b) Ermittle die ersten 4 Nachkommastellen von $\lg(60{,}48)$.


14

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	7782	7782	7783	7784	7784	7785	7786	7787	7787	7788
601	7789	7789	7790	7791	7792	7792	7793	7794	7795	7795
602	7796	7797	7797	7798	7799	7800	7800	7801	7802	7802
603	7803	7804	7805	7805	7806	7807	7807	7808	7809	7810
604	7810	7811	7812	7813	7813	7814	7815	7815	7816	7817
605	7818	7818	7819	7820	7820	7821	7822	7823	7823	7824
606	7825	7825	7826	7827	7828	7828	7829	7830	7830	7831
607	7832	7833	7833	7834	7835	7835	7836	7837	7838	7838
608	7839	7840	7840	7841	7842	7843	7843	7844	7845	7845
609	7846	7847	7848	7848	7849	7850	7850	7851	7852	7853
610	7853	7854	7855	7855	7856	7857	7858	7858	7859	7860
611	7860	7861	7862	7863	7863	7864	7865	7865	7866	7867
612	7868	7868	7869	7870	7870	7871	7872	7872	7873	7874
613	7875	7875	7876	7877	7877	7878	7879	7880	7880	7881

4.16

Im Dezimalsystem besteht ein Zusammenhang zwischen der Ziffernanzahl jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ und $\lg(n)$.

a) Vervollständige die folgende Tabelle.

n	1	10	100	1000	10000
Ziffernanzahl					
$\lg(n)$					

Allgemein kann man die Ziffernanzahl jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ folgendermaßen berechnen:

i) Berechne $\lg(n)$. **ii)** Runde das Ergebnis ab. **iii)** Addiere 1 zum Ergebnis.

b) ☆ Wie viele Ziffern hat die natürliche Zahl $n = 2024^{2024}$ in ausgeschriebener Form?
Führe eine Überschlagsrechnung durch und kreuze das Intervall an, in dem die Ziffernanzahl liegt.

☐ $[0; 2000)$ ☐ $[2000; 4000)$ ☐ $[4000; 6000)$ ☐ $[6000; 8000)$ ☐ $[8000; 10000)$

4.17

Die Gleichung $4 \cdot 3^x = 20$ hat genau eine Lösung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Kreuze diese Lösung rechts an.

$\frac{\ln(5)}{3}$	☐
$\frac{\ln(20)}{\ln(12)}$	☐
$\ln\left(\frac{5}{3}\right)$	☐
$\frac{\ln(5)}{\ln(3)}$	☐
$\frac{\ln(20)}{12}$	☐

4.18

Die Gleichung $6 \cdot e^{-2 \cdot x} = 1$ hat genau eine Lösung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Kreuze diese Lösung rechts an.

$-\ln(\frac{1}{3})$	☐
$\ln(\frac{1}{3})$	☐
$\frac{\ln(\frac{1}{6})}{-2}$	☐
$-\frac{\ln(\frac{1}{6})}{\ln(2)}$	☐
$-\frac{\ln(6)}{12}$	☐

4.19

Die Gleichung $3 \cdot \lg(x+2) = 9$ hat genau eine Lösung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Kreuze diese Lösung rechts an.

1	☐
$\frac{10^9-2}{3}$	☐
$\frac{10^9}{3} - 2$	☐
998	☐
$\frac{10^9-6}{3}$	☐

4.20

Die Gleichung $\ln(3 \cdot x - 4) = 8$ hat genau eine Lösung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Kreuze diese Lösung rechts an.

$\frac{4+10^8}{3}$	☐
4	☐
$\frac{e^{12}}{3}$	☐
$\frac{e^8+4}{3}$	☐
e^4	☐

4.21

Die Funktion f mit $f(x) = \lg\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \lg\left(\frac{x}{4}\right)$ ist für alle $x > 0$ definiert.

a) Für welche Zahlen x gilt $f(x) = 0$?

b) Für welche Zahlen x gilt $f(x) < 0$?

c) Für welche Zahlen x gilt $f(x) > 0$?

Vervollständige dafür die folgende Vorzeichentabelle:

	$0 < x <$ ☐	$x =$ ☐	☐ $< x <$ ☐	$x =$ ☐	$x >$ ☐
$\lg(\frac{x}{3})$		0			
$\lg(\frac{x}{4})$				0	
$\lg(\frac{x}{3}) \cdot \lg(\frac{x}{4})$					

4.22

Berechne die Nullstelle(n) der Funktion f.

a) $f(x) = 2^x \cdot (x+3)$ **b)** $f(x) = e^x \cdot (x-5) \cdot (x+4)$ **c)** $f(x) = e^{-x} \cdot (x^2-9)$ **d)** $f(x) = e^{-2\cdot x} \cdot (x^2 - 6\cdot x + 8)$

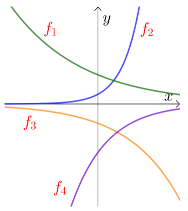
4.1 **a)** 20 % **b)** 20 % **c)** 20 % **d)** 44 %

4.2 **a)** 20 % **b)** 20 % **c)** 20 % **d)** 36 %

4.3 **a)** $K(n) = 420 \cdot 1{,}012^n$ **b)** $N(t) = 42 \cdot 0{,}85^t$

4.4 **a)** $B(t) = 30 \cdot 1{,}28^{\frac{1}{3}\cdot t}$ **b)** $I(x) = I_0 \cdot 0{,}93^{\frac{1}{30}\cdot x}$

4.5

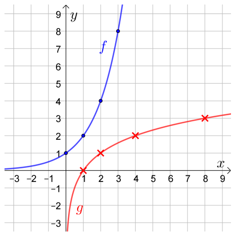


4.6 g_1: $c > 0$ und $k < 0$ g_2: $c > 0$ und $k > 0$ g_3: $c < 0$ und $k > 0$ g_4: $c < 0$ und $k < 0$

4.7 $10^{2\cdot x}$ und 100^x

4.8 $4 \cdot e^{2\cdot x}$, $4 \cdot (e^x)^2$ und $(2 \cdot e^x)^2$

4.9



4.10 **a)** 4 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 3 **e)** 5

4.11 $\ln(3) + 2 \cdot \ln(5)$ und $\ln(5^2) + \ln(3)$

4.12 $\lg(0{,}03) = 2 - \lg(3)$

4.13 $\lg(40) = 2 \cdot [1 + \lg(2)]$

4.14 **a)** 0 **b)** 1 **c)** 1 **d)** 1 **e)** 2 **f)** 2 **g)** 4

4.15 **a)** 2 **b)** 7816

4.16 **a)**

n	1	10	100	1000	10000
Ziffernanzahl	1	2	3	4	5
$\lg(n)$	0	1	2	3	4

b) $[6000; 8000)$

4.17 $\frac{\ln(5)}{\ln(3)}$

4.18 $\frac{\ln(\frac{1}{6})}{-2}$

4.19 998

4.20 $\frac{e^8+4}{3}$

4.21 **a)** $x = 3$ und $x = 4$ **b)** $3 < x < 4$ **c)** $0 < x < 3$ und $x > 4$

	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$\lg(\frac{x}{3})$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\lg(\frac{x}{4})$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\lg(\frac{x}{3}) \cdot \lg(\frac{x}{4})$	$+$	0	$-$	0	$+$

4.22 **a)** -3 **b)** 5 und -4 **c)** -3 und 3 **d)** 2 und 4

5. Winkelfunktionen

MmF-Materialien

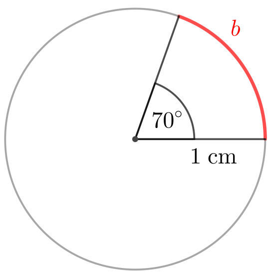
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Winkelmessung
- ✓ Arbeitsblatt – Winkelfunktionen am Einheitskreis
- ✓ Arbeitsblatt – Graphen der Winkelfunktionen

5.1

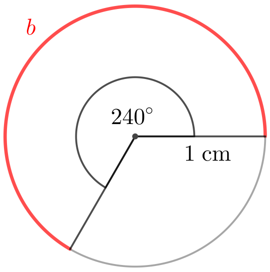
Ein Kreissektor mit Bogenlänge b und Zentriwinkel α ist dargestellt.
Trage in die Kästchen jeweils richtige Zahlen so ein, dass die Brüche vollständig gekürzt sind.

a)



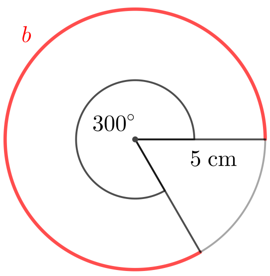
$b = \frac{\square}{\square} \cdot \pi$ cm $\alpha = \frac{\square}{\square} \cdot \pi$ rad

b)



$b = \frac{\square}{\square} \cdot \pi$ cm $\alpha = \frac{\square}{\square} \cdot \pi$ rad

c)



$b = \frac{\square}{\square} \cdot \pi$ cm $\alpha = \frac{\square}{\square} \cdot \pi$ rad

5.2

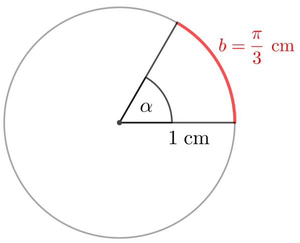
Ein 4 m langes Seil wird so am Boden platziert, dass ein Kreissektor mit Radius 1 m und Zentriwinkel α entsteht.
Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein.

$\alpha = \square$ rad

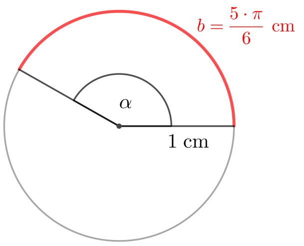
5.3

Ein Kreissektor mit Bogenlänge b und Zentriwinkel α ist dargestellt.

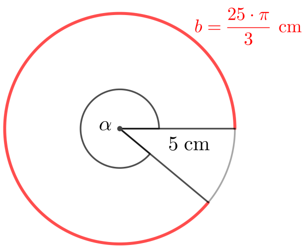
Trage in die Kästchen jeweils richtige Zahlen so ein, dass die Brüche vollständig gekürzt sind.

a) 

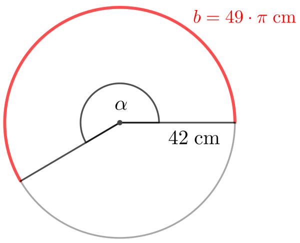
$\alpha = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \cdot \pi$ rad $\qquad \alpha = \boxed{}\,^\circ$

b) 

$\alpha = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \cdot \pi$ rad $\qquad \alpha = \boxed{}\,^\circ$

c) 

$\alpha = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \cdot \pi$ rad $\qquad \alpha = \boxed{}\,^\circ$

d) 

$\alpha = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \cdot \pi$ rad $\qquad \alpha = \boxed{}\,^\circ$

5.4

Die dargestellten Kreise haben beide den Mittelpunkt $(0 \mid 0)$.

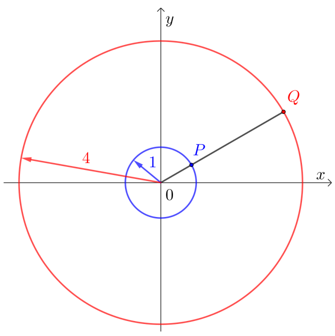
Für den Punkt P am Einheitskreis gilt: $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$

Der Punkt Q liegt auf dem Kreis mit Radius 4.

Die Punkte $(0 \mid 0)$, P und Q liegen auf der eingezeichneten Strecke.

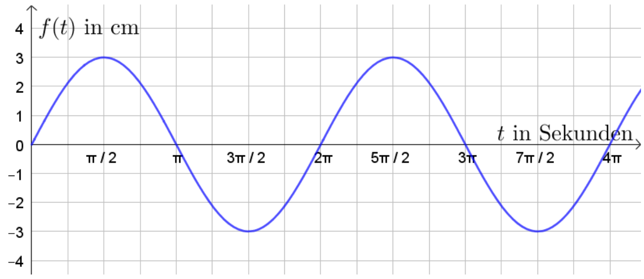
Welche Koordinaten hat der Punkt Q? Kreuze an.

☐ $Q = (\sqrt{3} \mid 1)$ ☐ $Q = (2 \cdot \sqrt{3} \mid 2)$ ☐ $Q = (4 \cdot \sqrt{3} \mid 4)$ ☐ $Q = (\frac{3}{4} \mid \frac{1}{4})$

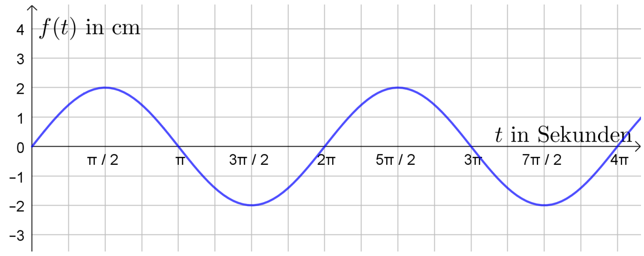


5.5

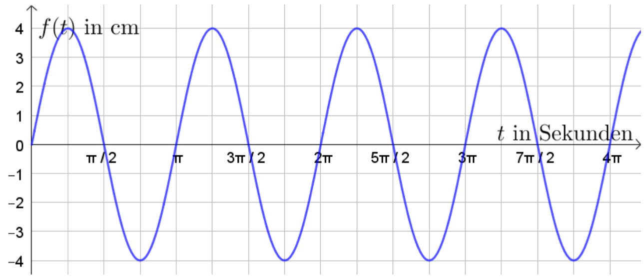
Der Graph einer Funktion f mit $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ ist dargestellt (t in Sekunden, $f(t)$ in cm).
Trage in die Kästchen jeweils die richtige Zahl ein.

a) 

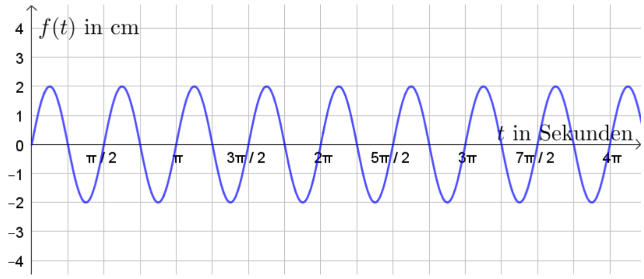
$a =$ ☐ cm $b =$ ☐ rad/s

b) 

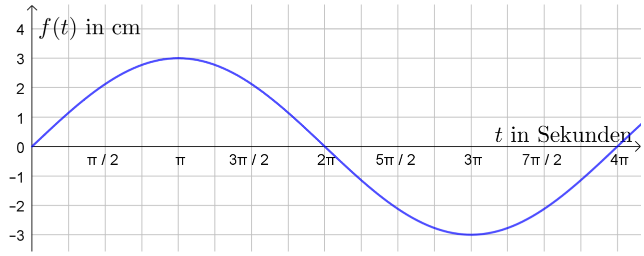
$a =$ ☐ cm $b =$ ☐ rad/s

c) 

$a =$ ☐ cm $b =$ ☐ rad/s

d) 

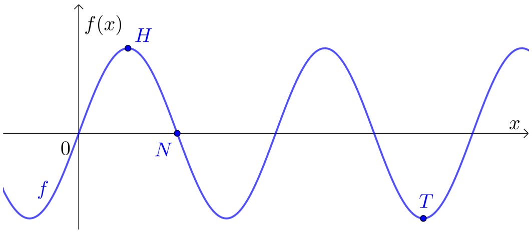
$a =$ ☐ cm $b =$ ☐ rad/s

e) 

$a =$ ☐ cm $b =$ ☐ rad/s

5.6

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$ ist dargestellt.



- Der Punkt H ist ein Hochpunkt von f.
- Im Punkt N schneidet der Graph die waagrechte Achse.
- Der Punkt T ist ein Tiefpunkt von f.

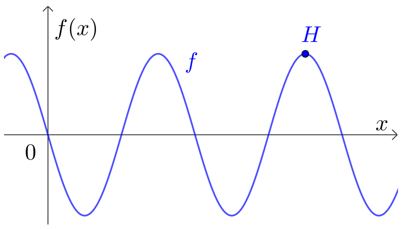
Ermittle die Koordinaten dieser 3 Punkte.

5.7

Für die dargestellte Funktion f gilt: $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $b > 0$

Die Funktion hat den rechts eingezeichneten Hochpunkt $H = (\frac{7 \cdot \pi}{8} \mid 3)$.

Ermittle a und b.



5.8

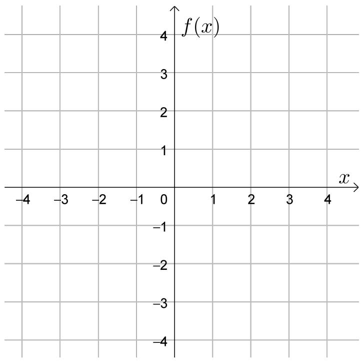
Für die Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot x)$ mit $-4 \leq x \leq 4$

a) Zeichne rechts alle Nullstellen von f ein.

b) Zeichne rechts alle Hochpunkte von f ein.

c) Zeichne rechts alle Tiefpunkte von f ein.

d) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f im Intervall $[-4; 4]$.



5.1 **a)** $b = \frac{7}{18} \cdot \pi$ cm, $\alpha = \frac{7}{18} \cdot \pi$ rad **b)** $b = \frac{4}{3} \cdot \pi$ cm, $\alpha = \frac{4}{3} \cdot \pi$ rad **c)** $b = \frac{25}{3} \cdot \pi$ cm, $\alpha = \frac{5}{3} \cdot \pi$ rad

5.2 $\alpha = 2$ rad

5.3 **a)** $\alpha = \frac{1}{3} \cdot \pi \text{ rad} = 60°$ **b)** $\alpha = \frac{5}{6} \cdot \pi \text{ rad} = 150°$ **c)** $\alpha = \frac{5}{3} \cdot \pi \text{ rad} = 300°$ **d)** $\alpha = \frac{7}{6} \cdot \pi \text{ rad} = 210°$

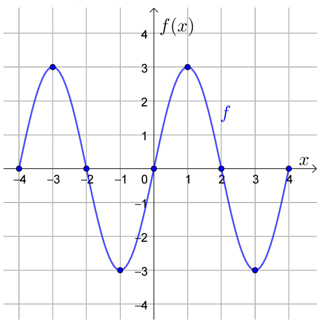
5.4 $Q = (2 \cdot \sqrt{3} \mid 2)$

5.5 **a)** $a = 3$ cm, $b = 1$ rad/s **b)** $a = 2$ cm, $b = 1$ rad/s **c)** $a = 4$ cm, $b = 2$ rad/s **d)** $a = 2$ cm, $b = 4$ rad/s **e)** $a = 3$ cm, $b = 0{,}5$ rad/s

5.6 $H = (1{,}5 \mid 4)$, $N = (3 \mid 0)$, $T = (10{,}5 \mid -4)$

5.7 $a = -3$, $b = 4$

5.8



6. Statistik

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme
- ✓ Arbeitsblatt – Statistische Kenngrößen und Boxplot

6.1

a) Eine Maschine produziert 500 Glühbirnen. Der relative Anteil defekter Glühbirnen ist $\frac{3}{20}$.
Wie viele Glühbirnen sind defekt?

b) 34 von 92 Personen haben ein Haustier.
Berechne den relativen Anteil dieser Personen, die ein Haustier haben.
Stelle das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch dar.

c) Im Jahr 2019/20 gab es in Kärnten rund 255 000 Haushalte.
Davon hatten rund 102 000 Haushalte mindestens ein Haustier.
Welcher relative Anteil aller Haushalte hatte also mindestens ein Haustier?
Führe eine Überschlagsrechnung durch und kreuze an.

☐ $\approx \frac{5}{100}$ ☐ $\approx \frac{20}{100}$ ☐ $\approx \frac{30}{100}$ ☐ $\approx \frac{40}{100}$ ☐ $\approx \frac{50}{100}$

6.2

Eine Liste von 30 Symbolen enthält insgesamt 4 verschiedene Symbole: ☺, 🌳, ☕, ⚠

- Das Symbol ☺ kommt 7 Mal in der Liste vor.
- 30 % der Symbole in der Liste sind 🌳.
- Die relative Häufigkeit des Symbols ☕ in der Liste ist $\frac{2}{5}$.

Berechne die absolute Häufigkeit und die relative Häufigkeit des Symbols ⚠ in der Liste.

6.3

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

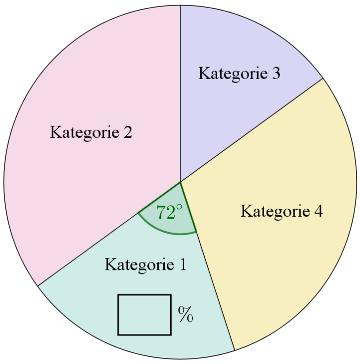
Es wurden 400 Jugendliche zu ihrem Freizeitverhalten befragt. Von allen Befragten gaben 330 an, Mitglied in einem Sportverein zu sein, 146 gaben an, ein Instrument zu spielen, und 98 gaben an, sowohl Mitglied in einem Sportverein zu sein als auch ein Instrument zu spielen.
Das Ergebnis dieser Befragung ist in der nachstehenden Tabelle eingetragen.

	spielt Instrument	spielt kein Instrument	gesamt
Mitglied in Sportverein	98		330
kein Mitglied in Sportverein			
gesamt	146		400

Aufgabenstellung:
Geben Sie die relative Häufigkeit h der befragten Jugendlichen an, die weder Mitglied in einem Sportverein sind noch ein Instrument spielen!

6.4

Das Ergebnis einer Umfrage soll in einem Kreisdiagramm dargestellt werden.



Jede befragte Person wurde in genau eine von 4 Kategorien eingeteilt. Links ist das noch nicht fertig beschriftete Kreisdiagramm dargestellt.

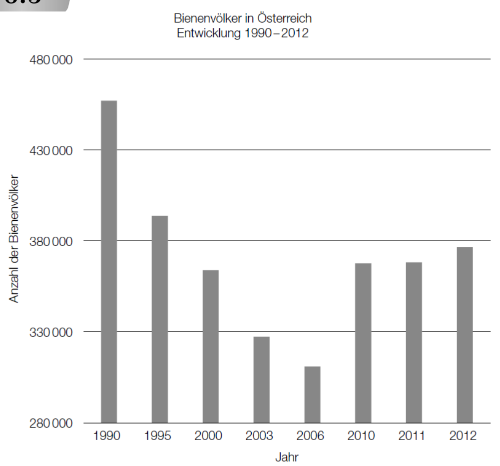
a) Der Zentriwinkel des Kreissektors von Kategorie 1 beträgt 72°. Kreuze die entsprechende prozentuelle Häufigkeit an, und trage sie in das Kästchen links ein.

☐ 5 % ☐ 10 % ☐ 15 % ☐ 20 % ☐ 25 %

b) Eine der 4 Kategorien enthält genau 30 % der befragten Personen. Berechne den entsprechenden Zentriwinkel, und markiere links den entsprechenden Kreissektor.

c) Stelle das Ergebnis der Umfrage in einem 10 cm langen Prozentstreifen dar.

6.5



Datenquelle: http://www.biene-oesterreich.at/struktur-der-bienenhaltung-in-oesterreich+2500+1135143?env=Y2Q9Mg [20.04.2016].

In der nebenstehenden Abbildung ist die Entwicklung der Bienenvölker in Österreich dargestellt.

Ein Betrachter der vorliegenden Darstellung behauptet: „Im Jahr 2010 gab es rund 3-mal so viele Bienenvölker wie im Jahr 2006. Das erkenne ich daran, dass die Säule für das Jahr 2010 rund 3-mal so hoch ist wie jene für das Jahr 2006."

1) Erklären Sie, warum diese Argumentation falsch ist.

6.6

Berechne das arithmetische Mittel, den Median und die Standardabweichung s der gegebenen Zahlenliste.

a) $(3, 3, 3, 3)$ **b)** $(2, 2, 4, 4)$ **c)** $(1, 1, 5, 5)$ **d)** $(1, 3, 3, 5)$

6.7

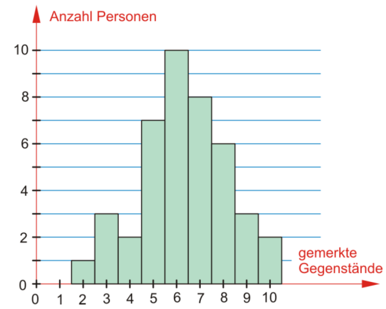
An einer Universität werden Daten zur Körpergröße der männlichen Sport-Studenten erhoben. Die Körpergröße von 10 zufällig ausgewählten Studenten wird gemessen.

Körpergröße in cm	168	169	171	174	179	181	182	183	188	191

Bei der Weiterverarbeitung der Daten wurde aufgrund eines Tippfehlers anstelle eines Messwerts aus der obigen Tabelle eine Körpergröße von mehr als 1000 cm eingegeben. Dadurch ändert sich der Median von 180,0 cm auf 181,5 cm.

1) Geben Sie diejenigen Messwerte an, die für diese fehlerhafte Eingabe in Frage kommen.

6.8



Bei einem Gedächtnistest werden zehn Gegenstände kurz hergezeigt.

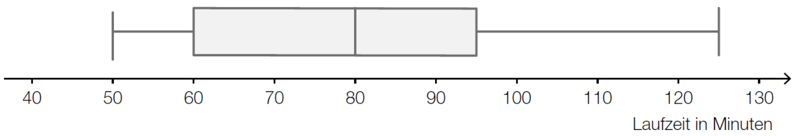
Nach zehn Minuten sollen die Testpersonen alle gemerkten Gegenstände aufschreiben.

Im nebenstehenden Bild ist das Ergebnis dieses Tests dargestellt.

a) Erstelle einen Boxplot für die Anzahl der gemerkten Gegenständen.

6.9

Für die Gesamtwertung wurden die Zeiten aller 130 Läufer/innen dokumentiert und im nachstehenden Boxplot zusammengefasst.



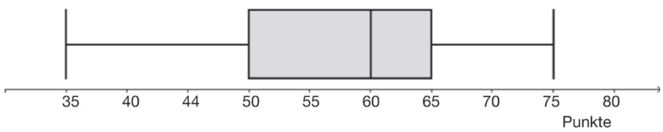
1) Lesen Sie den Median der Laufzeiten ab.

Elisabeth erreichte bei diesem Silvesterlauf in der Gesamtwertung den 20. Platz.

2) Lesen Sie aus dem obigen Boxplot das kleinste Intervall ab, in dem Elisabeths Laufzeit mit Sicherheit liegen muss.

6.10

Eine Schüler/innengruppe hat an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen.
Die Punkteverteilung ist in dem nachstehenden Boxplot dargestellt.

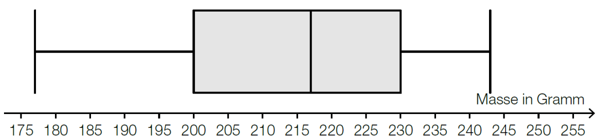


1) Lesen Sie ab, wie viel Prozent der Schüler/innen mindestens 50 Punkte erreicht haben.

2) Ermitteln Sie die Spannweite der Punktezahlen.

6.11

Die Äpfel einer Großlieferung wurden einzeln gewogen. Die Daten sind in Form eines Boxplots dargestellt:



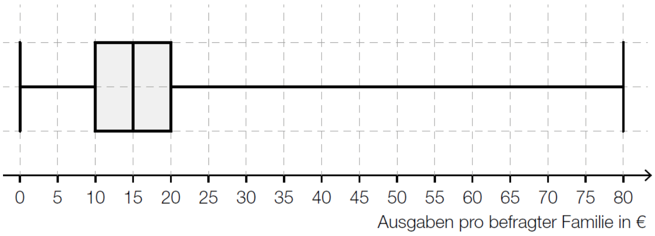
In der Fachliteratur wird ein Wert oft als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet, wenn der Wert weiter als das 1,5-Fache des Interquartilsabstands rechts vom 3. Quartil liegt.
Solche Ausreißer sind im obigen Boxplot nicht berücksichtigt.

1) Geben Sie an, ab welcher Masse ein Apfel als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet wird.

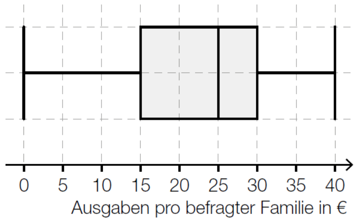
6.12

In einem Vergnügungspark werden Familien nach ihren Ausgaben befragt. Die beiden nachstehenden Boxplots veranschaulichen die Ausgaben der befragten Familien für die Attraktionen und jene für Essen und Getränke.

Attraktionen:



Essen und Getränke:

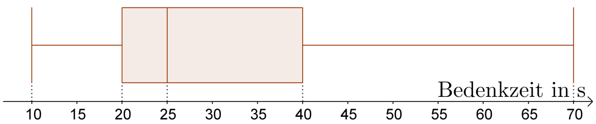


Andreas behauptet, aus den beiden Boxplots Folgendes ablesen zu können: „Es gibt mit Sicherheit mindestens eine Familie, die insgesamt 120 Euro für Attraktionen sowie Essen und Getränke ausgibt."

1) Argumentieren Sie, dass die Behauptung von Andreas falsch ist.

6.13

Nils und Sebastian spielen eine Partie Online-Schach.
Bei jedem seiner $n = 60$ Züge wird die Bedenkzeit von Nils aufgezeichnet.
Das Ergebnis ist im folgenden Boxplot dargestellt:



Sebastian behauptet: „Nils hat bei 17 Zügen mindestens 42 Sekunden Bedenkzeit gehabt."

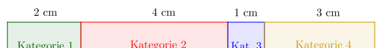
a) Überprüfe, ob die Behauptung von Sebastian stimmen kann. Begründe deine Antwort.

6.1 **a)** 75 Glühbirnen **b)** $\frac{17}{46}$

6.2 Absolute Häufigkeit: 2 Relative Häufigkeit: $\frac{1}{15}$

6.3 $h = \frac{22}{400}$

6.4 **a)** 20 % **b)** 108° muss Kategorie 4 sein, weil 20 % + 30 % = 50 % (Halbkreis) **c)**

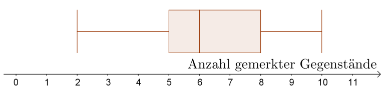


6.5 Die Aussage stimmt nicht, weil die vertikale Achse „abgeschnitten" wurde: Sie beginnt nicht bei 0, sondern bei 280 000.

6.6 **a)** $\bar{x} = 3,\ s = 0$ **b)** $\bar{x} = 3,\ s = 1$ **c)** $\bar{x} = 3,\ s = 2$ **d)** $\bar{x} = 3,\ s = \sqrt{2}$

6.7 168, 169, 171, 174, 179

6.8 $x_{\min} = 2,\ q_1 = 5,\ q_2 = 6,\ q_3 = 8,\ x_{\max} = 10$



6.9 **1)** Median: 80 min **2)** [50 min; 60 min]

6.10 **1)** mindestens 75 % der Schüler/innen haben mindestens 50 Punkte erreicht. **2)** Spannweite: 40 Punkte

6.11 Äpfel mit einer Masse von mehr als 275 g werden als „Ausreißer nach oben" bezeichnet.

6.12 Die Behauptung von Andreas ist falsch, weil nicht sicher ist, dass dieselbe Familie die maximalen Beträge von 80 Euro für Attraktionen und von 40 Euro für Essen und Getränke ausgibt.

6.13 **a)** Die Behauptung kann nicht stimmen, weil Nils bei mindestens 45 Zügen (75 % von 60) eine Bedenkzeit von 40 s oder weniger hatte. Nils kann also höchstens bei 15 Zügen eine Bedenkzeit länger als 40 Sekunden gehabt haben.

7. Folgen & Reihen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Folgen
- ✓ Arbeitsblatt – Arithmetische Folgen und Reihen
- ✓ Arbeitsblatt – Geometrische Folgen und Reihen
- ✓ Arbeitsblatt – Grenzwert von Folgen I

7.1

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ hat das folgende explizite Bildungsgesetz:

$$a_n = 4 \cdot n - 2$$

a) Berechne die ersten 5 Folgenglieder:

$a_1 =$ ☐ $a_2 =$ ☐ $a_3 =$ ☐ $a_4 =$ ☐ $a_5 =$ ☐

b) Berechne das 12. Folgenglied a_{12}.

c) Das wievielte Folgenglied ist gleich 90?

d) Begründe, warum *kein* Folgenglied gleich 48 ist.

7.2

Ermittle die ersten 6 Folgenglieder der rekursiv gegebenen Folge.

a) $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 3$

$a_2 =$ ☐ $a_3 =$ ☐ $a_4 =$ ☐ $a_5 =$ ☐ $a_6 =$ ☐

b) $b_{n+1} = b_n + n$ mit $b_1 = 1$

$b_2 =$ ☐ $b_3 =$ ☐ $b_4 =$ ☐ $b_5 =$ ☐ $b_6 =$ ☐

c) $c_{n+1} = c_n \cdot 2$ mit $c_1 = 3$

$c_2 =$ ☐ $c_3 =$ ☐ $c_4 =$ ☐ $c_5 =$ ☐ $c_6 =$ ☐

d) $d_{n+1} = d_n \cdot n$ mit $d_1 = 1$

$d_2 =$ ☐ $d_3 =$ ☐ $d_4 =$ ☐ $d_5 =$ ☐ $d_6 =$ ☐

7.3

Ermittle die ersten 6 Folgenglieder der rekursiv gegebenen Folge.

a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$

$a_3 = \square \quad a_4 = \square \quad a_5 = \square \quad a_6 = \square$

b) $b_{n+2} = b_{n+1} - b_n$ mit $b_1 = 1$ und $b_2 = 3$

$b_3 = \square \quad b_4 = \square \quad b_5 = \square \quad b_6 = \square$

c) $c_{n+2} = -c_n + 1$ mit $c_1 = 4$ und $c_2 = 2$

$c_3 = \square \quad c_4 = \square \quad c_5 = \square \quad c_6 = \square$

d) $d_{n+2} = d_{n+1} \cdot d_n$ mit $d_1 = 1$ und $d_2 = 2$

$d_3 = \square \quad d_4 = \square \quad d_5 = \square \quad d_6 = \square$

7.4

Trage jeweils Zahlen so in die Kästchen ein, dass (a_n) eine arithmetische Folge ist.
Ermittle ein explizites Bildungsgesetz und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge.

a) $(a_n) = \left(2; 5; \square; \square; \square; \square; \ldots\right)$

b) $(a_n) = \left(8; 4; \square; \square; \square; \square; \ldots\right)$

c) $(a_n) = \left(\square; \square; \square; 15; 10; \square; \ldots\right)$

d) $(a_n) = \left(3; \square; \square; 9; \square; \square; \ldots\right)$

e) $(a_n) = \left(\square; 9; \square; \square; -12; \square; \ldots\right)$

f) $(a_n) = \left(1; \square; \square; \square; \square; 31; \ldots\right)$

7.5

Trage jeweils Zahlen so in die Kästchen ein, dass (b_n) eine geometrische Folge ist.
Ermittle ein explizites Bildungsgesetz und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge.

a) $(b_n) = \left(1; 2; \square; \square; \square; \square; \ldots\right)$

b) $(b_n) = \left(16; 8; \square; \square; \square; \square; \ldots\right)$

c) $(b_n) = \left(\square; \square; -12; 36; \square; \square; \ldots\right)$

d) $(b_n) = \left(\square; \tfrac{1}{4}; -\tfrac{1}{8}; \square; \square; \square; \ldots\right)$

7.6

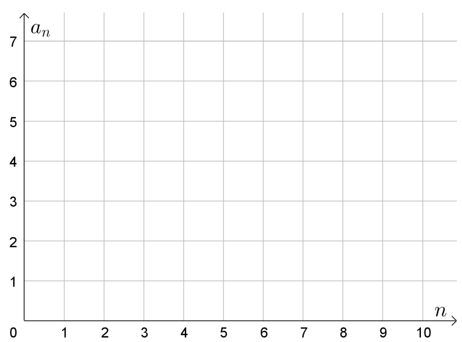
Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{2} \cdot n + \frac{3}{2}$.

a) Berechne $a_1, a_2, \ldots, a_8$.

b) Zeichne diese 8 Folgenglieder als Punkte $(n \mid a_n)$ rechts ein.

c) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz von (a_n).

d) Welcher Funktionstyp steckt hinter (a_n)?



7.7 MmF

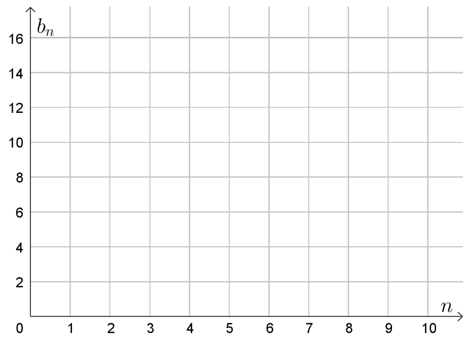
Gegeben ist die Folge (b_n) mit $b_n = 32 \cdot 0{,}5^n$.

a) Berechne $b_1, b_2, \ldots, b_8$.

b) Zeichne diese 8 Folgenglieder als Punkte $(n \mid b_n)$ rechts ein.

c) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz von (b_n).

d) Welcher Funktionstyp steckt hinter (b_n)?



7.8 MmF

Ein explizites Bildungsgesetz der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist gegeben.
Zeige, dass ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Folgenglieder größer als 42 sind.
Welches ist das erste Folgenglied, das größer als 42 ist?

a) $a_n = 3 \cdot n$ **b)** $a_n = \dfrac{90 \cdot n - 23}{2 \cdot n}$ **c)** $a_n = 44 - \dfrac{18}{n}$ **d)** $a_n = n^2 - 7$

7.9 MmF

Gegeben ist die arithmetische Folge $(1; 2; 3; 4; \ldots)$.
Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich groß wie die *Summe* der ersten 42 Folgenglieder? Kreuze an.

☐ $\dfrac{40 \cdot 41}{2}$ ☐ $\dfrac{41 \cdot 42}{2}$ ☐ $\dfrac{42 \cdot 43}{2}$ ☐ $\dfrac{43 \cdot 44}{2}$ ☐ $\dfrac{44 \cdot 45}{2}$

7.10 MmF

Gegeben ist die arithmetische Folge $(1; 3; 5; 7; \ldots)$.
Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich groß wie die *Summe* der ersten 42 Folgenglieder? Kreuze an.

☐ $\dfrac{42 \cdot 41}{2}$ ☐ $\dfrac{42 \cdot 43}{2}$ ☐ $\dfrac{42 \cdot 82}{2}$ ☐ $\dfrac{42 \cdot 84}{2}$ ☐ $\dfrac{42 \cdot 86}{2}$

7.11 MmF

Gegeben ist die geometrische Folge $(1; 3; 9; 27; \ldots)$.
Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich groß wie die *Summe* der ersten 42 Folgenglieder? Kreuze an.

☐ $\dfrac{2^{42} - 1}{2}$ ☐ $\dfrac{2^{43} - 1}{2}$ ☐ $\dfrac{3^{42} - 1}{2}$ ☐ $\dfrac{3^{43} - 1}{2}$ ☐ $\dfrac{42 \cdot 84}{2}$

7.12 MmF

Gegeben ist die geometrische Folge $(3; -6; 12; -24; \ldots)$.
Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich groß wie die *Summe* der ersten 42 Folgenglieder? Kreuze an.

☐ $\dfrac{(-2)^{42} - 1}{-3}$ ☐ $1 - 2^{40}$ ☐ $1 + 2^{41}$ ☐ $1 - 2^{42}$ ☐ $3 \cdot \dfrac{2^{42} - 1}{2}$

7.13 MmF

Gegeben ist die geometrische Folge $(16; 8; 4; 2; \ldots)$.
Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich groß wie die *Summe* aller unendlich vielen Folgenglieder? Kreuze an.

☐ 16 ☐ 32 ☐ 64 ☐ 128 ☐ ∞

7.14 MmF

Gegeben ist die geometrische Folge $\left(36; -12; 4; -\frac{4}{3}; \ldots\right)$.
Welche der folgenden Zahlen ist gleich groß wie die *Summe* aller unendlich vielen Folgenglieder? Kreuze an.

☐ -54 ☐ -27 ☐ 0 ☐ 27 ☐ 54

7.15 MmF

Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \to \infty$.

a) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ **b)** $a_n = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ **c)** $a_n = \dfrac{1}{6} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$ **d)** $a_n = \dfrac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} + 1}$ **e)** $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$

7.16 MmF

Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \to \infty$.

a) $a_n = 1 - 0{,}5^{n+1}$ **b)** $a_n = \dfrac{0{,}2^n - 1}{0{,}2 - 1}$ **c)** $a_n = \dfrac{(-0{,}6)^n - 1}{-0{,}6 - 1}$ **d)** $a_n = 18 \cdot 0{,}98^n + 5$

e) $a_n = 42 \cdot e^{-n}$ **f)** $a_n = 6 + 15 \cdot (1 - e^{-0{,}018 \cdot n})$ **g)** $a_n = \dfrac{2300}{23 + 77 \cdot e^{-0{,}3 \cdot n}}$

7.17 MmF

Für die Folge (a_n) gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 4$

Mithilfe von (a_n) wird eine neue Folge (b_n) definiert. Ermittle den Grenzwert der Folge (b_n) für $n \to \infty$.

a) $b_n = 2 \cdot a_n + 1$ **b)** $b_n = \dfrac{a_n}{2} + 1$ **c)** $b_n = a_n \cdot a_n$ **d)** $b_n = 2^{a_n}$ **e)** $b_n = \sqrt{9 + a_n^2}$

7.18 MmF

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = 1 - 0{,}1^n$ für alle $n \geq 1$.

a) Stelle a_1, a_2 und a_3 als Dezimalzahl dar.

b) Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n).

c) ☆ Rechne nach, dass $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 9}{10}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

7.19 ☆ MmF

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ für alle $n \geq 1$.

Rechne nach, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $a_{n+1} = a_n + (n+1)$

Diese Gleichung steckt hinter einem Beweis von $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ mit vollständiger Induktion.

7.20

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$ für alle $n \geq 1$.

Rechne nach, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $a_{n+1} = a_n + (n+1)^2$

Diese Gleichung steckt hinter einem Beweis von $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$ mit vollständiger Induktion.

7.21

Gegeben ist die Folge (a_n) mit $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

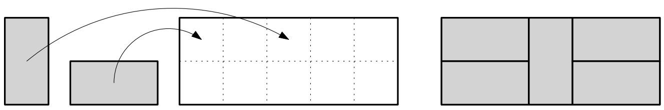
a) Ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

c) Rechne nach, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$

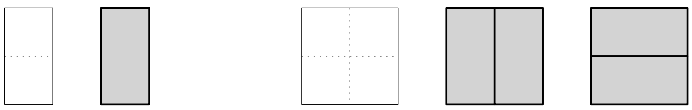
7.22

n Dominosteine mit Höhe 2 und Breite 1 sollen so angeordnet werden, dass ein Rechteck mit Höhe 2 und Breite n entsteht. Im folgenden Bild ist eine mögliche Anordnung mit $n = 5$ Dominosteinen dargestellt:



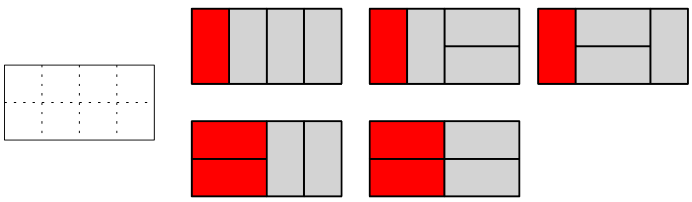
a_n ist die Anzahl verschiedener Anordnungen mit n Dominosteinen.

a) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$:



Ermittle a_3. Zeichne dazu alle möglichen Anordnungen mit 3 Dominosteinen auf.

b) Im folgenden Bild siehst du, warum $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$ gilt:

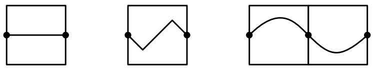


Für alle $n \geq 1$ gilt allgemein: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es also mit 5, 6, 7 bzw. 8 Dominosteinen?

7.23

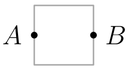
Du hast folgende 3 Arten von Puzzle-Steinen zur Verfügung:



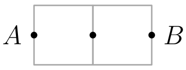
Mit diesen Puzzle-Steinen sollst du Muster vom unten dargestellten Punkt A zum Punkt B legen. Zum Beispiel:

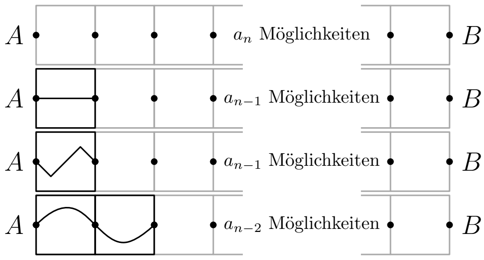
Dir stehen von allen 3 Arten beliebig viele Puzzle-Steine zur Verfügung.
Gesucht ist die Anzahl verschiedener Muster, die du mit diesen Puzzle-Steinen von A nach B legen kannst.
Manche mathematischen Probleme werden einfacher lösbar, wenn man sie allgemeiner formuliert:
Mit a_n wird die Anzahl möglicher Muster abgekürzt, wenn zwischen A und B insgesamt n Quadrate liegen ($n \geq 1$).

a) Ermittle a_1.



b) Ermittle a_2.





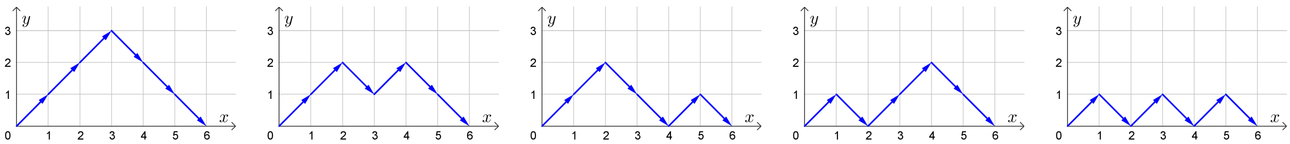
Es gilt die Rekursion $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$ für alle $n \geq 3$.

In den Bildern rechts ist eine Begründung für die Rekursion skizziert.

c) Berechne mithilfe dieser Rekursion die gesuchte Anzahl a_6.

7.24

Es gibt fünf sogenannte *Dyck-Pfade* mit Länge 6. Diese sind in den folgenden Bildern dargestellt:



- Jeder dieser Pfade führt in 6 Schritten vom Punkt $(0 \mid 0)$ zum Punkt $(6 \mid 0)$.
- Jeder Schritt geht entweder entlang des Vektors $\binom{1}{1}$ oder entlang des Vektors $\binom{1}{-1}$.
- Die Pfade unterschreiten an *keiner* Stelle die x-Achse.

Allgemein muss ein *Dyck-Pfad* mit Länge $2 \cdot n$ genau die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Der Pfad führt in $2 \cdot n$ Schritten vom Punkt $(0 \mid 0)$ zum Punkt $(2 \cdot n \mid 0)$.
- Jeder Schritt geht entweder entlang des Vektors $\binom{1}{1}$ oder entlang des Vektors $\binom{1}{-1}$.
- Der Pfad unterschreitet an *keiner* Stelle die x-Achse.

Die Folge der sogenannten *Catalan-Zahlen* $(C_n)_{n\geq 0}$ beginnt mit $C_0 = 1$, $C_1 = 1$ und $C_2 = 2$.

Weiters gilt: $C_3 = C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_0$

a) Berechne C_3.

Weiters gilt: $C_4 = C_0 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_1 + C_3 \cdot C_0$

b) Berechne C_4.

Man kann zeigen, dass C_n die Anzahl der Dyck-Pfade mit Länge $2 \cdot n$ ist.
Allgemein gilt für alle $n \geq 0$:

$$C_{n+1} = C_0 \cdot C_n + C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} \cdot C_2 + C_{n-1} \cdot C_1 + C_n \cdot C_0 = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}$$

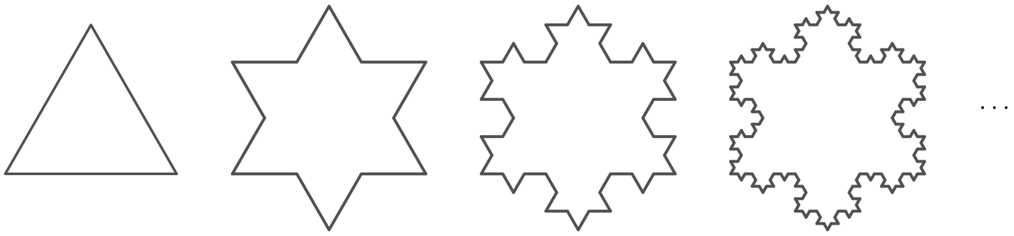
c) Wie viele Dyck-Pfade mit Länge 10 gibt es also?

7.25

Es gibt geometrische Figuren mit *endlich* großem Flächeninhalt, aber *unendlich* großem Umfang.
Um zum Beispiel die *Kochsche Schneeflocke* zu konstruieren, starten wir mit einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a und wiederholen immer wieder die folgenden 3 Schritte:

i) Teile jede Seite der Figur in drei gleich lange Teile.
ii) Ergänze jeweils den mittleren Teil nach außen zu einem gleichseitigen Dreieck.
iii) Entferne den mittleren Teil.

Das gleichseitige Dreieck und das Ergebnis nach dem ersten, zweiten und dritten Durchlauf aller 3 Schritte sind in der folgenden Abbildung dargestellt:



Für den Umfang der ersten Figur gilt: $u_0 = 3 \cdot a$
u_n ist der Umfang der Figur nach n Durchläufen.

a) Begründe, warum die Umfänge $(u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots)$ eine geometrische Folge mit $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{4}{3}$ bilden.
b) Begründe, warum daraus $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \infty$ folgt.

Für den Flächeninhalt der ersten Figur gilt: $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$
A_n ist der Flächeninhalt der Figur nach n Durchläufen. Dann gilt:

$$A_n = A_0 \cdot \left[\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \right]$$

c) Leite damit die folgende Formel für den Flächeninhalt A der Kochschen Schneeflocke her:

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5} \cdot a^2$$

7.1 **a)** $a_1 = 2$ $a_2 = 6$ $a_3 = 10$ $a_4 = 14$ $a_5 = 18$

b) $a_{12} = 46$

c) das 23. Folgenglied

d) Die Gleichung $4 \cdot n - 2 = 48$ hat nur die Lösung $n = 12{,}5$, also keine Lösung in $\mathbb{N}^*$.

7.2 **a)** $a_2 = 5$ $a_3 = 7$ $a_4 = 9$ $a_5 = 11$ $a_6 = 13$

b) $b_2 = 2$ $b_3 = 4$ $b_4 = 7$ $b_5 = 11$ $b_6 = 16$

c) $c_2 = 6$ $c_3 = 12$ $c_4 = 24$ $c_5 = 48$ $c_6 = 96$

d) $d_2 = 1$ $d_3 = 2$ $d_4 = 6$ $d_5 = 24$ $d_6 = 120$

7.3 **a)** $a_3 = 2$ $a_4 = 3$ $a_5 = 5$ $a_6 = 8$

b) $b_3 = 2$ $b_4 = -1$ $b_5 = -3$ $b_6 = -2$

c) $c_3 = -3$ $c_4 = -1$ $c_5 = 4$ $c_6 = 2$

d) $d_3 = 2$ $d_4 = 4$ $d_5 = 8$ $d_6 = 32$

7.4 **a)** $(a_n) = (2; 5; 8; 11; 14; 17; \ldots)$ Explizites Bildungsgesetz: $a_n = 3 \cdot n - 1$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_1 = 2$

b) $(a_n) = (8; 4; 0; -4; -8; -12; \ldots)$ Explizites Bildungsgesetz: $a_n = -4 \cdot n + 12$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n - 4$ mit $a_1 = 8$

c) $(a_n) = (30; 25; 20; 15; 10; 5; \ldots)$ Explizites Bildungsgesetz: $a_n = -5 \cdot n + 35$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n - 5$ mit $a_1 = 30$

d) $(a_n) = (3; 5; 7; 9; 11; 13; \ldots)$ Explizites Bildungsgesetz: $a_n = 2 \cdot n + 1$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 3$

e) $(a_n) = (16; 9; 2; -5; -12; -19; \ldots)$ Explizites Bildungsgesetz: $a_n = -7 \cdot n + 23$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n - 7$ mit $a_1 = 16$

f) $(a_n) = (1; 7; 13; 19; 25; 31; \ldots)$ Explizites Bildungsgesetz: $a_n = 6 \cdot n - 5$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + 6$ mit $a_1 = 1$

7.5 **a)** $(b_n) = (1; 2; 4; 8; 16; 32; \ldots)$ Explizites Bildungsgesetz: $b_n = 1 \cdot 2^{n-1}$ Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot 2$ mit $b_1 = 1$

b) $(b_n) = \left(16; 8; 4; 2; 1; \frac{1}{2}; \ldots\right)$ Explizites Bildungsgesetz: $b_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{2}$ mit $b_1 = 16$

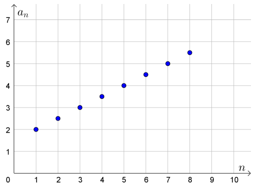
c) $(b_n) = \left(-\frac{4}{3}; 4; -12; 36; -108; 324; \ldots\right)$ Explizites Bildungsgesetz: $b_n = -\frac{4}{3} \cdot (-3)^{n-1}$ Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot (-3)$ mit $b_1 = -\frac{4}{3}$

d) $(b_n) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; -\frac{1}{32}; \frac{1}{64}; \ldots\right)$ Explizites Bildungsgesetz: $b_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot (-\frac{1}{2})$ mit $b_1 = -\frac{1}{2}$

7.6 **a)**

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5

b)



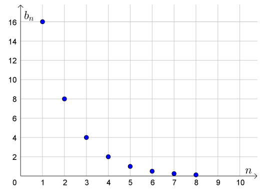
c) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ mit $a_1 = 2$ **d)** lineare Funktion

(mit Steigung $k = \frac{1}{2}$ und $d = \frac{3}{2}$)

7.7 **a)**

n	1	2	3	4	5	6	7	8
b_n	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

b)



c) $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{2}$ mit $b_1 = 16$ **d)** Exponentialfunktion

(mit Änderungsfaktor 0,5 und Startwert 32 bei $n = 0$)

7.8 **a)** $3 \cdot n > 42 \iff n > 14$ 15. Folgenglied

b) $\frac{90 \cdot n - 23}{2 \cdot n} > 42 \iff n > \frac{23}{6}$ 4. Folgenglied

c) $44 - \frac{18}{n} > 42 \iff n > 9$ 10. Folgenglied

d) $n^2 - 7 > 42 \iff n > 7$ 8. Folgenglied

7.9 $\frac{42 \cdot 43}{2}$

7.10 $\frac{42 \cdot 84}{2}$

7.11 $\frac{3^{42} - 1}{2}$

7.12 $1 - 2^{42}$

7.13 32

7.14 27

7.15 **a)** 1 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** -1 **e)** 0

7.16 **a)** 1 **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{5}{8}$ **d)** 5 **e)** 0 **f)** 21 **g)** 100

7.17 **a)** 9 **b)** 3 **c)** 16 **d)** 16 **e)** 5

7.18 **a)** $a_1 = 0{,}9,\ a_2 = 0{,}99,\ a_3 = 0{,}999$

b) 1

c) $\frac{a_n+9}{10} = \frac{10-0{,}1^n}{10} = 1 - 0{,}1^n \cdot \underbrace{\frac{1}{10}}_{=0{,}1} = 1 - 0{,}1^{n+1} = a_{n+1}$ ✓

7.19 $a_{n+1} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\cdot n+(n+1)\cdot 2}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2} + n + 1 = a_n + n + 1$ ✓

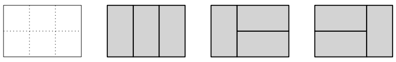
7.20 $a_{n+1} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2\cdot n+3)}{6} = \cdots = \frac{2\cdot n^3+9\cdot n^2+13\cdot n+6}{6}$

$a_n + (n+1)^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6} + \frac{6\cdot(n+1)^2}{6} = \cdots \frac{2\cdot n^3+9\cdot n^2+13\cdot n+6}{6}$ ✓

7.21 **a)** 1

b) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ ✓

c) $a_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} = a_{n+1}$ ✓

7.22 **a)** $a_3 = 3$  **b)** $a_5 = 8,\ a_6 = 13,\ a_7 = 21,\ a_8 = 34$

7.23 **a)** $a_1 = 2$ **b)** $a_2 = 5$ **c)** $a_6 = 169$

7.24 **a)** $C_3 = 5$ **b)** $C_4 = 14$ **c)** $C_5 = 42$ Dyck-Pfade mit Länge 10

7.25 **a)** Die Seitenlängen werden mit jedem Schritt auf ein Drittel der vorherigen Seitenlänge gekürzt.
Die Anzahl der Seiten vervierfacht sich, weil jede Seite in 4 neue Seiten verwandelt wird.
Für den Umfang gilt also: $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{4}{3}$.
(u_n) ist also eine geometrische Folge mit $q = \frac{4}{3}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, weil $q = \frac{4}{3} > 1$ ist.

c) $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0 \cdot \frac{8}{5} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{5} \cdot a^2$

8. Kombinatorik

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Kombinatorik

8.1

Der 4-stellige Code auf einem Zahlenschloss besteht aus einer Abfolge von 4 Ziffern.

An jeder Stelle ist jede Ziffer von 0 bis 9 möglich.

Wie viele verschiedene Codes können auf diesem Zahlenschloss eingestellt werden?

8.2

Wie viele natürliche Zahlen mit 6 Ziffern gibt es, bei denen die beiden mittleren Ziffern gleich sind?

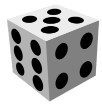
8.3

Lukas hat 3 verschiedene Hosen, 5 verschiedene Hemden und 4 verschiedene Pullover im Kleiderschrank.
Wie viele Outfits bestehend aus einer Hose, einem Hemd und einem Pullover kann er anziehen?

8.4

Beim Wurf eines fairen 6-seitigen Würfels sind sechs Ergebnisse möglich: ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅

Tobias würfelt 3 Mal hintereinander und bildet daraus eine 3-stellige Zahl.
Zum Beispiel bildet er aus dem Ablauf ⚃→ ⚁→ ⚅ die Zahl 426.
Tobias würfelt gleich wieder 3 Mal hintereinander.



a) Wie viele 3-stellige Zahlen sind insgesamt möglich?

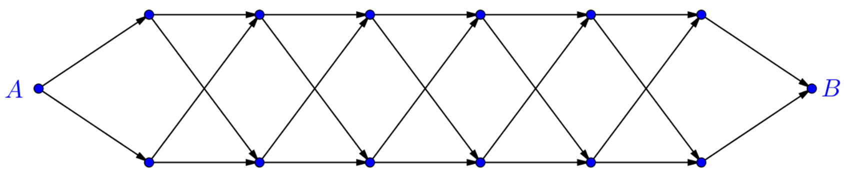
b) Wie viele 3-stellige Zahlen sind möglich, bei denen alle Ziffern voneinander verschieden sind?

c) Wie viele 3-stellige Zahlen sind möglich, bei denen in der Mitte die Ziffer 2 steht?

d) Wie viele 3-stellige Zahlen sind möglich, bei denen die erste und letzte Ziffer gleich sind?

8.5

Elena steht im Punkt A und möchte entlang der Pfeile zum Punkt B kommen.

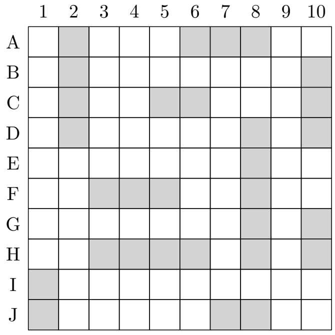


Wie viele mögliche Wege von A nach B hat Elena?

8.6

Beim Spiel *Schiffe versenken* zeichnet jeder Spieler in ein 10×10-Raster folgende Schiffe ein:

- ein gerades Schiff mit 5 Kästchen
- zwei gerade Schiffe mit 4 Kästchen
- drei gerade Schiffe mit 3 Kästchen
- vier gerade Schiffe mit 2 Kästchen

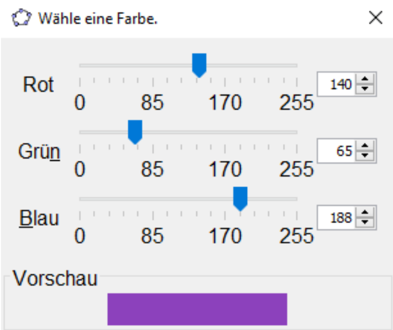


Wie viele Möglichkeiten gibt es, in ein noch *leeres* Raster ein gerades Schiff mit
a) 5 Kästchen **b)** 4 Kästchen **c)** 3 Kästchen **d)** 2 Kästchen
einzuzeichnen?

8.7

Im *RGB-Farbsystem* wird jede Farbe als Kombination der Farben **R**ot, **G**rün und **B**lau dargestellt.

– Die Intensität der Farbe Rot ist eine *ganze* Zahl r mit $0 \leq r \leq 255$.
– Die Intensität der Farbe Grün ist eine *ganze* Zahl g mit $0 \leq g \leq 255$.
– Die Intensität der Farbe Blau ist eine *ganze* Zahl b mit $0 \leq b \leq 255$.



Zum Beispiel ergibt die Kombination $r = 140$, $g = 65$ und $b = 188$ die im Bild rechts dargestellte Farbe.

a) Wie viele verschiedene Farben gibt es im RGB-Farbsystem?
Kreuze an.

☐ $3 \cdot 254$ ☐ $3 \cdot 255$ ☐ $3 \cdot 256$ ☐ 254^3 ☐ 255^3 ☐ 256^3

Um die Farbe eines Pixels (Bildpunkts) im RGB-Farbsystem abzuspeichern, sind 3 Byte Speicherplatz notwendig.
Bei dem sogenannten Bitmap-Bildformat (BMP) wird jedes einzelne Pixel im RGB-Farbsystem gespeichert.
Ein bestimmtes Bild ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 3840 Pixel und 2160 Pixel.

b) Welcher Speicherplatz ist für dieses Foto ungefähr notwendig?
Führe eine Überschlagsrechnung durch und trage den richtigen Exponenten in das Kästchen ein.

Speicherplatz $\approx 25 \cdot 10^{\square}$ Byte

Auf deiner Festplatte sind noch 250 GB (Gigabyte) Speicherplatz vorhanden.

c) Wie viele Bilder mit den Seitenlängen 3840 Pixel und 2160 Pixel kannst du noch zusätzlich im Bitmap-Bildformat auf dieser Festplatte abspeichern? Führe eine Überschlagsrechnung durch und kreuze an.

☐ ≈ 100 Bilder ☐ ≈ 1000 Bilder ☐ $\approx 10\,000$ Bilder ☐ $\approx 100\,000$ Bilder ☐ $\approx 1\,000\,000$ Bilder

8.8

Berechne das Ergebnis.

a) $5! = \square$ **b)** $3! + 2! = \square$ **c)** $\frac{6!}{6} = \square$ **d)** $\frac{8!}{6!} = \square$ **e)** $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = \square$

8.9

Wie viele natürliche Zahlen mit der folgenden Eigenschaft gibt es?

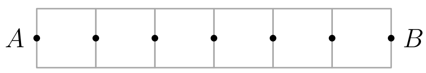
a) Die Zahl hat 5 Stellen, wobei jede Ziffer von 1 bis 5 genau einmal enthalten ist.

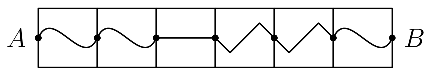
b) Die Zahl hat 6 Stellen, wobei die Ziffer 4 und die Ziffer 2 jeweils dreimal enthalten sind.

8.10

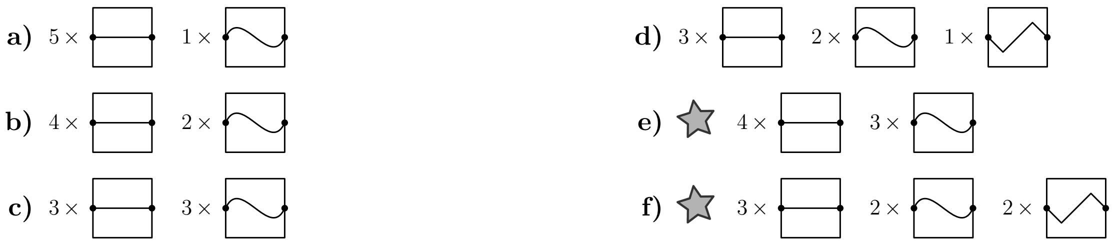
Du hast folgende 3 Arten von Puzzle-Steinen zur Verfügung:

Mit diesen Puzzle-Steinen sollst du Muster vom unten dargestellten Punkt A zum Punkt B legen. Zum Beispiel:



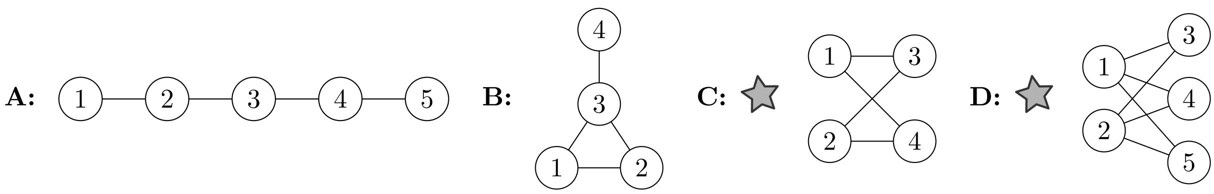


Dir steht dafür aber nur eine begrenzte Anzahl an Puzzle-Steinen zur Verfügung.
Wie viele verschiedene Muster kannst du mit diesen Puzzle-Steinen legen?



8.11

In der Graphentheorie besteht jeder Graph aus Knoten und Kanten.
Die Knoten in den 4 dargestellten Graphen sind jeweils durchnummeriert, also unterscheidbar.
Jede Kante verbindet genau zwei Knoten:



Bei einer *Knotenfärbung* wird jeder Knoten mit genau einer Farbe eingefärbt.
Dir stehen 7 Farben zur Verfügung.
Knoten, die mit einer Kante verbunden sind, müssen *verschiedene* Farben haben.

Wie viele solcher Knotenfärbungen sind bei diesen 4 Graphen jeweils möglich?
Ordne **A**, **B**, **C** und **D** rechts zu.

$7 \cdot 6^3 + 7 \cdot 6 \cdot 5^3$	
$7^3 \cdot 6^2$	
$7 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6 \cdot 5^2$	
$7^2 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6 \cdot 5^2$	
$7 \cdot 6^4$	
$7^2 \cdot 6^3 + 7 \cdot 6 \cdot 5^3$	
$7 \cdot 6^2 \cdot 5$	

8.1 10 000

8.2 90 000

8.3 60

8.4 **a)** 216 **b)** 120 **c)** 36 **d)** 36

8.5 64

8.6 **a)** 120 **b)** 140 **c)** 160 **d)** 180

8.7 **a)** 256^3 **b)** $25 \cdot 10^6$ Byte **c)** $\approx 10\,000$ Bilder

8.8 **a)** 120 **b)** 8 **c)** 120 **d)** 56 **e)** 15

8.9 **a)** 120 **b)** 20

8.10 **a)** 6 **b)** 15 **c)** 20 **d)** 60 **e)** 35 **f)** 210

8.11 **A**: $7 \cdot 6^4$ **B**: $7 \cdot 6^2 \cdot 5$ **C**: $7 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6 \cdot 5^2$ **D**: $7 \cdot 6^3 + 7 \cdot 6 \cdot 5^3$

9. Wahrscheinlichkeitsrechnung

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Laplace-Experimente
- ✓ Arbeitsblatt – Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume
- ✓ Arbeitsblatt – Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten

9.1

Ein D20 ist ein fairer 20-seitiger Spielwürfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 20 durchnummeriert sind.
Du wirfst einen D20 einmal.

„Ikosaeder“

Berechne die angegebene Wahrscheinlichkeit und trage die richtige Zahl in das Kästchen ein.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Augenzahl 13 ist, beträgt $\square$ %.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Augenzahl entweder 7 oder 15 ist, beträgt $\square$ %.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Augenzahl kleiner als 10 ist, beträgt $\square$ %.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Augenzahl mindestens 17 ist, beträgt $\square$ %.

e) Die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Augenzahl *nicht* 1 ist, beträgt $\square$ %.

9.2

In einem Murmelbeutel befinden sich 12 rote, 8 blaue und 10 grüne Murmeln.
Du ziehst eine Murmel nach dem Zufallsprinzip heraus.
Berechne die angegebene Wahrscheinlichkeit und trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Murmel rot ist, beträgt $\frac{\square}{\square}$.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Murmel blau oder grün ist, beträgt $\frac{\square}{\square}$.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Murmel *nicht* blau ist, beträgt $\frac{\square}{\square}$.

9.3

- In einer Box sind 2 schwarze Kugeln und 6 weiße Kugeln.
  Sebastian zieht eine Kugel nach dem Zufallsprinzip aus dieser Box.
- In einer anderen Box sind 14 schwarze Kugeln und 42 weiße Kugeln.
  Emil zieht zufällig eine Kugel nach dem Zufallsprinzip aus dieser Box.

Wer hat die größere Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen? Oder sind die Wahrscheinlichkeiten gleich groß? Begründe deine Antwort.

9.4

Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36.

Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün.
Mit einer Kugel wird ein Feld zufällig ausgewählt.
Stelle die angegebene Wahrscheinlichkeit als Bruch dar.

a) $P($ „Schwarzes Feld ausgewählt.“ $)$

b) $P($ „Feld mit einer Zahl größer als 17 ausgewählt.“ $)$

9.5

Ein Zufallszahlengenerator erzeugt eine 9-stellige natürliche Zahl nach dem Zufallsprinzip. Die 1. Ziffer ist also $\neq 0$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal enthält? Kreuze an.

☐ $\frac{9!}{10^9}$ ☐ $\frac{9!}{9 \cdot 10^8}$ ☐ $\frac{1}{9}$ ☐ $\frac{1}{9!}$ ☐ $\frac{9!}{9^9}$

9.6

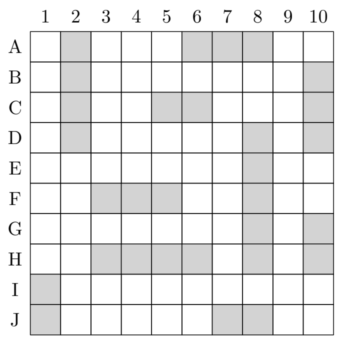
Ein Zufallszahlengenerator erzeugt eine natürliche Zahl von 1 bis 4200 nach dem Zufallsprinzip.
Stelle die angegebene Wahrscheinlichkeit als Bruch dar.

a) $P($„Die Zahl ist einstellig.“$)$ **b)** $P($„Die Zahl ist zweistellig.“$)$
c) $P($„Die Zahl ist dreistellig.“$)$ **d)** $P($„Die Zahl ist vierstellig.“$)$

9.7

Beim Spiel *Schiffe versenken* zeichnet man in ein 10×10-Raster folgende Schiffe ein:

- ein gerades Schiff mit 5 Kästchen
- zwei gerade Schiffe mit 4 Kästchen
- drei gerade Schiffe mit 3 Kästchen
- vier gerade Schiffe mit 2 Kästchen



Antonia zeichnet in das noch *leere* Raster das Schiff mit 5 Kästchen nach dem Zufallsprinzip an eine der möglichen Positionen ein.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Schiff die folgenden Kästchen enthält?
Stelle die Wahrscheinlichkeit als Bruch dar.

a) A 1 **b)** E 5 **c)** D 3 und D 4 **d)** D 3 oder D 4 (oder beide)

9.8

Du wirfst 8 Mal hintereinander eine faire Münze. Welche Abfolge ist wahrscheinlicher?

Kopf → Kopf → Kopf → Kopf → Kopf → Kopf → Kopf → Kopf oder
Zahl → Kopf → Kopf → Zahl → Zahl → Kopf → Zahl → Kopf

Begründe deine Antwort.

9.9

Lukas möchte ein Outfit bestehend aus einer Hose, einem Hemd und einem Pullover anziehen.
Im Kleiderschrank hat er die folgende Auswahl:

- 2 blaue Hosen und 1 schwarze Hose
- 3 blaue Hemden und 2 schwarze Hemden
- 1 blauer Pullover, 2 schwarze Pullover und 1 roter Pullover

Lukas zieht nach dem Zufallsprinzip ein Outfit bestehend aus einer Hose, einem Hemd und einem Pullover an.
Stelle die angegebene Wahrscheinlichkeit als vollständig gekürzten Bruch dar.

a) P(„Hose, Hemd und Pullover sind blau.“)

b) P(„Hemd und Pullover haben die gleiche Farbe.“)

c) P(„Im Outfit kommt jede der drei Farben vor.“)

9.10

Ein D_n ist ein fairer Spielwürfel mit n Seiten und den Augenzahlen von 1 bis n.
Ein D_6 ist also ein gewöhnlicher Spielwürfel.
Xaver würfelt mit einem D_{20}.
Yvonne würfelt mit zwei D_{10} und berechnet die Augensumme der beiden Würfel.
Trage jeweils die richtige Zahl in das Kästchen ein.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass Xaver die Augenzahl 20 würfelt, beträgt ☐ %.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Yvonne die Augensumme 20 würfelt, beträgt ☐ %.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass Xaver *mindestens* die Augenzahl 19 würfelt, beträgt ☐ %.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Yvonne *mindestens* die Augensumme 19 würfelt, beträgt ☐ %.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass Xaver *mindestens* die Augenzahl 2 würfelt, beträgt ☐ %.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Yvonne *mindestens* die Augensumme 2 würfelt, beträgt ☐ %.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass Xaver *mindestens* die Augenzahl 12 würfelt, beträgt ☐ %.
☆ Die Wahrscheinlichkeit, dass Yvonne *mindestens* die Augensumme 12 würfelt, beträgt ☐ %.

Kontext: Bei einem Spiel kannst du entweder einen D_{20} werfen oder zwei D_{10} werfen und die Augensumme berechnen.
Wenn die Augenzahl bzw. die Augensumme mindestens x sein soll, dann hängt es also von x ab, ob du einen D_{20} oder zwei D_{10} werfen solltest:

- Wenn $x = 12$ gilt, dann ist die Wahrscheinlichkeit jeweils gleich groß.
- Wenn $x \geq 13$ gilt, dann ist die Wahrscheinlichkeit mit einem D_{20} größer.
- Wenn $x \leq 11$ gilt, dann ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei D_{10} größer.

9.11

Du würfelst mit einem fairen Spielwürfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6.

a) Du würfelst insgesamt 6 Mal.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei jede Augenzahl genau einmal vorkommt?
Gib die Wahrscheinlichkeit als Bruch an.

b) ☆ Du würfelst insgesamt 60 Mal.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei jede Augenzahl genau 10 Mal vorkommt?
Gib die Wahrscheinlichkeit als Bruch an.

9.12

Felix und Jakob würfeln abwechselnd mit einem gewöhnlichen Spielwürfel.
Derjenige, der zuerst einen Sechser würfelt, gewinnt *sofort*. Felix darf zuerst würfeln.
Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass Felix beim ersten Wurf gewinnt, beträgt: $\frac{\square}{\square}$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass Felix beim zweiten Wurf gewinnt, beträgt: $\left(\frac{5}{6}\right)^{\square} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{\square}$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass Felix beim dritten Wurf gewinnt, beträgt: $\left(\frac{5}{6}\right)^{\square} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{\square}$

d) ☆ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Felix dieses Spiel schließlich gewinnt?
Stelle die Wahrscheinlichkeit als vollständig gekürzten Bruch dar.

Lösungsansatz 1: Verwende die Summenformel für geometrische Folgen $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ mit $b_{n+1} = b_n \cdot q$,
nämlich: $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \frac{b_1}{1-q}$, falls $|q| < 1$.

Lösungsansatz 2: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Startspieler schließlich gewinnt, ist a.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Nicht-Startspieler schließlich gewinnt, ist b. Stelle 2 Gleichungen für a und b auf.

9.13

In einem Murmelbeutel befinden sich 12 rote, 8 blaue und 10 grüne Murmeln. Du ziehst 3 Mal ohne Zurücklegen.
Ordne den folgenden 6 Ereignissen jeweils die passende Wahrscheinlichkeit zu.

1) „Jede gezogene Murmel ist rot.“

2) „Keine gezogene Murmel ist rot.“

3) „Mindestens eine gezogene Murmel ist blau.“

4) „1. Murmel ist rot, 2. Murmel ist rot und 3. Murmel ist blau.“

5) „Zwei Murmeln sind rot und eine Murmel ist blau.“

6) „Alle drei Murmeln haben die gleiche Farbe.“

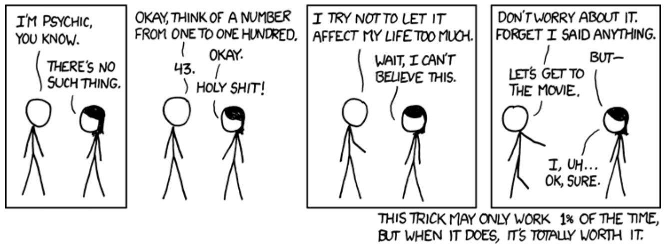
	$1 - \frac{22}{30} \cdot \frac{21}{29} \cdot \frac{20}{28}$
	$\frac{12\cdot11\cdot10+8\cdot7\cdot6+10\cdot9\cdot8}{30\cdot29\cdot28}$
	$3 \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{8}{28}$
	$\frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{10}{28}$
	$\frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{8}{28}$
	$\frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{16}{28}$

9.14

Philipp meint zu Karin, dass er übernatürliche Fähigkeiten hat:

Karin wählt geheim eine Zahl von 1 bis 100 nach dem Zufallsprinzip.

Danach versucht Philipp diese Zahl (ohne übernatürliche Fähigkeiten) zu erraten.



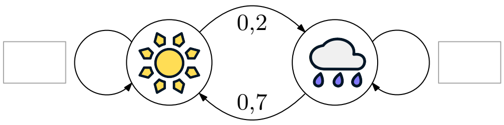
Quelle: https://xkcd.com/628

Philipp und Karin führen dieses Zufallsexperiment 100 Mal unabhängig voneinander durch.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Philipp mindestens einmal die richtige Zahl errät? Kreuze an.

☐ $100 \cdot \frac{1}{100}$ ☐ $\left(\frac{1}{100}\right)^{100}$ ☐ $1 - \left(\frac{1}{100}\right)^{100}$ ☐ $1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{100}$ ☐ $100 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{99} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{1}$

9.15

Jeder Tag ist entweder ein Sonnentag oder ein Regentag.
Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag ein Regentag folgt, ist 20 %.
Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag ein Sonnentag folgt, ist 70 %.
Diese Wahrscheinlichkeiten sind im folgenden Diagramm bereits eingetragen:



a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag ein Sonnentag folgt.
Trage diese Wahrscheinlichkeit in das entsprechende Kästchen oben ein.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag ein Regentag folgt.
Trage diese Wahrscheinlichkeit in das entsprechende Kästchen oben ein.

c) An einem Tag meldet die Wetterstation um 8 Uhr:
„Die Wahrscheinlichkeit, dass heute ein Regentag wird, beträgt zu diesem Zeitpunkt 10 %.*“*
Wie wahrscheinlich ist es in diesem Modell, dass der darauffolgende Tag ein Regentag wird?

9.1 **a)** 5 % **b)** 10 % **c)** 45 % **d)** 20 % **e)** 95 %

9.2 **a)** $\frac{12}{30}$ **b)** $\frac{18}{30}$ **c)** $\frac{22}{30}$

9.3 Beide haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{8} = \frac{14}{56} = 25\,\%$.

9.4 **a)** $\frac{18}{37}$ **b)** $\frac{20}{37}$

9.5 $\frac{9!}{9\cdot 10^8}$

9.6 **a)** $\frac{9}{4200}$ **b)** $\frac{90}{4200}$ **c)** $\frac{900}{4200}$ **d)** $\frac{3201}{4200}$

9.7 **a)** $\frac{2}{120}$ **b)** $\frac{10}{120}$ **c)** $\frac{3}{120}$ **d)** $\frac{12}{120}$

9.8 Beide Abläufe haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $\left(\frac{1}{2}\right)^8$.

9.9 **a)** $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{7}{20}$ **c)** $\frac{7}{60}$

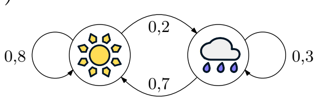
9.10 **a)** Xaver: 5 % Yvonne: 1 % **b)** Xaver: 10 % Yvonne: 3 % **c)** Xaver: 95 % Yvonne: 100 % **d)** Xaver: 45 % Yvonne: 45 %

9.11 **a)** $\frac{6!}{6^6}$ **b)** $\frac{60!}{(10!)^6 6^{60}}$

9.12 **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$ **c)** $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$ **d)** $\frac{6}{11}$

9.13 Von oben nach unten: **3)**, **6)**, **5)**, **1)**, **4)**, **2)**

9.14 $1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{100}$

9.15 **a)** **b)** 

c) 21 %

10. Vektorrechnung & Analytische Geometrie im Raum

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Vektorrechnung im Raum
- ✓ Arbeitsblatt – Parameterdarstellung von Geraden im Raum

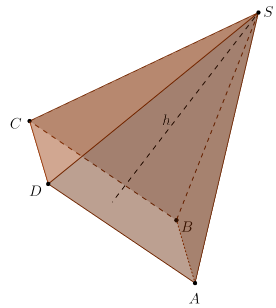
10.1

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ermittle $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3 \cdot \vec{a}$ und $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

10.2

Die dargestellte Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit den Eckpunkten $A = (-2 \mid -1 \mid -1)$, $B = (3 \mid -1 \mid -1)$, $C = (3 \mid 3 \mid 2)$ und D. (Angaben in cm)



a) Berechne die Koordinaten des Eckpunkts D.

Die Höhe der Pyramide beträgt $h = 12\,\text{cm}$.

b) Berechne das Volumen der Pyramide.

10.3

Eine Flugdrohne fliegt vom Punkt $A = (3 \mid 1 \mid 0)$ geradlinig zum Punkt $B = (4 \mid -3 \mid 8)$. (Angaben in m)

a) Berechne die Entfernung der Punkte A und B voneinander.

b) Berechne die Position P der Flugdrohne, nachdem sie 20 % der Flugstrecke zurückgelegt hat.

10.4

Die Strecke AB hat die Endpunkte $A = (4 \mid 2 \mid -5)$ und $B = (9 \mid -13 \mid 5)$.
Berechne jenen Punkt T auf der Strecke, der diese im Verhältnis $2 : 3$ teilt: $\overline{AT} : \overline{TB} = 2 : 3$

10.5

Für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ stehen die Vektoren $\begin{pmatrix} x+4 \\ x-2 \\ x-5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -2-x \\ 3 \cdot x \end{pmatrix}$ normal aufeinander?

10.6

Die drei Punkte

$$A = (2 \cdot t \mid -3 \cdot t \mid 5 \cdot t), \quad B = (3 \cdot t - 2 \mid -4 \cdot t + 3 \mid 8 \cdot t - 14) \quad \text{und} \quad C = (2 \cdot t + 5 \mid -t \mid 6 \cdot t)$$

spannen ein rechtwinkeliges Dreieck im Raum auf.
Für welche Zahlen $t \in \mathbb{R}$ ist der Punkt A der Scheitel des rechten Winkels?

10.7

Entscheide jeweils, ob das Ergebnis ein Vektor oder ein Skalar ist ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$).

	Vektor	Skalar
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	☐	☐
$\vec{a} + \vec{b}$	☐	☐
$\vec{a} - \vec{b}$	☐	☐
$t \cdot \vec{a}$	☐	☐
$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{d}$	☐	☐
$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$	☐	☐
$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d})$	☐	☐
$\lvert\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\rvert$	☐	☐

10.8

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A = (4 \mid -2 \mid 5)$ und $B = (-3 \mid 0 \mid 7)$.
Ermittle eine Parameterdarstellung von g.

10.9

Gegeben sind folgende Parameterdarstellungen der Geraden g und h:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

$$h\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinaten h_y und h_z des Richtungsvektors der Geraden h so, dass die Gerade h zur Geraden g parallel ist!

10.10

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.
Die Gerade g ist durch eine Parameterdarstellung $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ festgelegt.
Die Gerade h verläuft durch die Punkte $A = (0 \mid 8 \mid 0)$ und $B = (-2 \mid 28 \mid 6)$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Geraden!

10.11

Zwei Geraden im Raum haben genau eine der vier folgenden Lagebeziehungen:

i) ident **ii)** parallel (aber nicht ident) **iii)** schneidend (aber nicht ident) **iv)** windschief

Kreuze an, welche Lagebeziehung die Geraden g und h jeweils haben.

	i)	**ii)**	**iii)**	**iv)**
$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $h\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $h\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $h\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 1 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \\ -2t \end{pmatrix}$ $h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r \\ 3+2r \\ 2+4r \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐

10.1 $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ $3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$

10.2 **a)** $D = (-2 \mid 3 \mid 2)$ **b)** $100\,\text{cm}^3$

10.3 **a)** $9\,\text{m}$ **b)** $P = (3{,}2 \mid 0{,}2 \mid 1{,}6)$

10.4 $T = (6 \mid -4 \mid -1)$

10.5 $x = 4$ und $x = 2$

10.6 $t = -2$ bzw. $t = 5$

10.7

	Vektor	Skalar
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	☐	☒
$\vec{a} + \vec{b}$	☒	☐
$\vec{a} - \vec{b}$	☒	☐
$t \cdot \vec{a}$	☒	☐
$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{d}$	☐	☒
$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$	☒	☐
$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d})$	☐	☒
$\lvert\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\rvert$	☐	☒

10.8 Zum Beispiel: $g\colon \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

10.9 $h_y = -2$, $h_z = -4$

10.10 $S = (1 \mid -2 \mid -3)$

10.11 Von oben nach unten: **ii)**, **iv)**, **iii)**, **iii)**, **i)**