

MATHEMATIK AUF AUGENHÖHE – 11. SCHULSTUFE

INHALTSVERZEICHNIS

1. Differentialquotient	2
2. Ableitungsregeln	6
3. Kurvenuntersuchungen	8
4. Umgekehrte Kurvenuntersuchungen	14
5. Optimierungsaufgaben	16
6. Zufallsvariablen & Binomialverteilung	18



Mathematik auf Augenhöhe



- Die Aufgaben dieser Sammlung haben eine wesentliche Gemeinsamkeit:
Für die Bearbeitung reichen Stift, Papier, Geodreieck und eventuell eine [Formelsammlung](#).
- Die mit ★ markierten Aufgaben sind anspruchsvoller.
- Zu Beginn jedes Abschnitts ist ein QR-Code, der zum ersten passenden [MmF-Arbeitsblatt](#) verlinkt ist.
- Die Aufgabensammlungen stehen allen interessierten Personen kostenlos unter einer [Creative Commons BY-NC-ND 4.0-Lizenz](#) zur Verfügung. Weitere Informationen dazu stehen in unseren [FAQ](#).
- Wir bedanken uns bei allen Kolleg*innen, die mit ihren zahlreichen Ideen und Rückmeldungen zur Weiterentwicklung dieser [Aufgabensammlungen](#) beigetragen haben.
Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

1. DIFFERENTIALQUOTIENT



Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Änderungsmaße von Funktionen](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Differentialquotient](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Physikalische Anwendungen der Differentialrechnung](#)

1.1

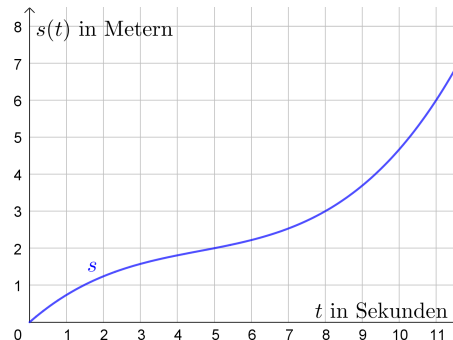
Der Graph einer Weg-Zeit-Funktion s ist dargestellt.

- a) Ermittle die mittlere Änderungsrate von s im Intervall $[5\text{ s}; 11\text{ s}]$.
Gib die zugehörige Einheit an.
- b) Interpretiere den Wert dieser mittleren Änderungsrate im Sachzusammenhang.

Es gibt einen Zeitpunkt z im Intervall $[5\text{ s}; 11\text{ s}]$, für den gilt:

$$s'(z) = \frac{s(11) - s(5)}{11 - 5}$$

- c) Lies z aus dem Bild links näherungsweise ab.
- d) Interpretiere diesen Wert von z im Sachzusammenhang.



1.2

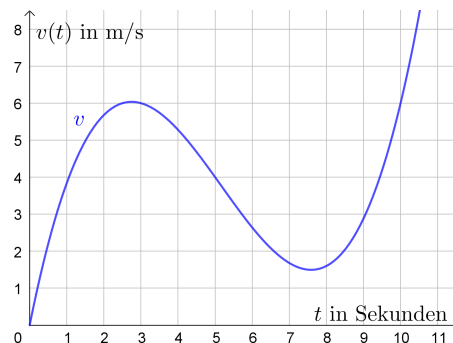
Der Graph einer Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist dargestellt.

- a) Ermittle die mittlere Änderungsrate von v im Intervall $[5\text{ s}; 10\text{ s}]$.
Gib die zugehörige Einheit an.
- b) Interpretiere den Wert dieser mittleren Änderungsrate im Sachzusammenhang.

Es gibt einen Zeitpunkt z im Intervall $[5\text{ s}; 10\text{ s}]$, für den gilt:

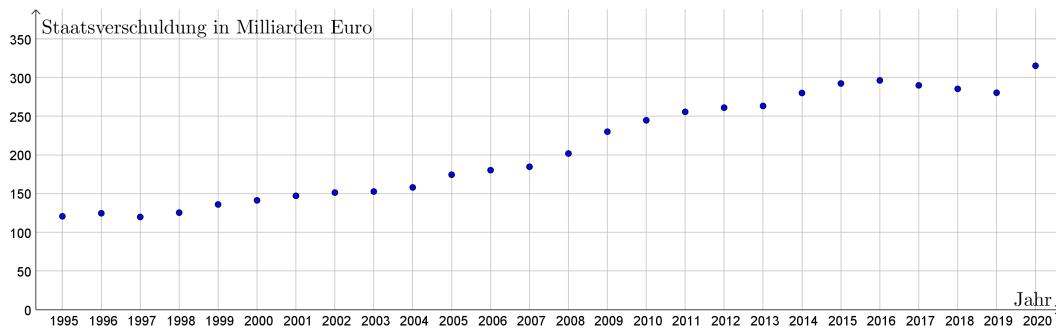
$$v'(z) = \frac{v(10) - v(5)}{10 - 5}$$

- c) Lies z aus dem Bild links näherungsweise ab.
- d) Interpretiere diesen Wert von z im Sachzusammenhang.



1.3

Der zeitliche Verlauf der österreichischen Staatsverschuldung ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



Quelle: Statistik Austria (10.06.2021)

- Im Jahr 1995 betrug die österreichische Staatsverschuldung rund 121 Milliarden Euro.
- Im Jahr 2020 betrug die österreichische Staatsverschuldung rund 315 Milliarden Euro.

Die mittlere Änderungsrate der österreichischen Staatsverschuldung im Zeitraum [1995; 2020] ist m .

a) Wie groß ist m ungefähr? Führe eine Überschlagsrechnung durch und kreuze an.

- $m \approx 6$ $m \approx 8$ $m \approx 10$ $m \approx 12$ $m \approx 14$

b) Interpretiere den Wert von m unter Angabe der Einheit im Sachzusammenhang.

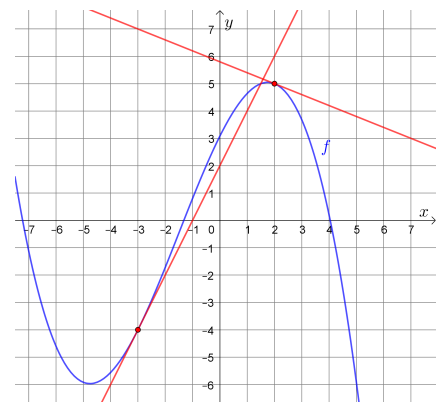
c) Begründe grafisch, ob die mittlere Änderungsrate der österreichischen Staatsverschuldung im Zeitraum [2005; 2015] größer oder kleiner als m war.

1.4

Der Graph einer Polynomfunktion f ist dargestellt.

Im Punkt $(-3 | f(-3))$ und im Punkt $(2 | f(2))$ ist jeweils die Tangente an den Graphen eingezeichnet.

- a) Lies aus der Grafik $f'(-3)$ und $f'(2)$ ab.
 b) Erstelle jeweils eine Gleichung der Form $y = k \cdot x + d$ für die beiden Tangenten.



1.5

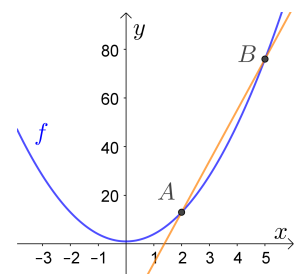
Der Graph der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 1$$

ist rechts dargestellt.

Die Punkte $A = (2 | y_A)$ und $B = (5 | y_B)$ liegen auf dem Funktionsgraphen.

- a) Berechne die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[2; 5]$.
 b) Erstelle eine Gleichung der Sekante, die durch die Punkte A und B verläuft.





Der Bruchterm

$$\frac{3 \cdot (2 + h)^2 - 12}{h}$$

ist für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$ definiert.

Setzen wir für h den Wert 0 ein, dann erhalten wir einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$.

Da sowohl Zähler als auch Nenner Polynome sind, können wir den Bruchterm vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot (2 + h)^2 - 12}{h} &= \frac{3 \cdot (4 + 4 \cdot h + h^2) - 12}{h} = \\ &= \frac{\cancel{12} + 12 \cdot h + 3 \cdot h^2 - \cancel{12}}{h} = \\ &= \frac{\cancel{h} \cdot (12 + 3 \cdot h)}{\cancel{h}} = 12 + 3 \cdot h \end{aligned}$$

Der Term $12 + 3 \cdot h$ ist für alle $h \in \mathbb{R}$ definiert. Damit können wir den Grenzwert $h \rightarrow 0$ berechnen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (2 + h)^2 - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 3 \cdot h) = 12$$

1.6

Der Graph der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 1$$

ist rechts dargestellt.

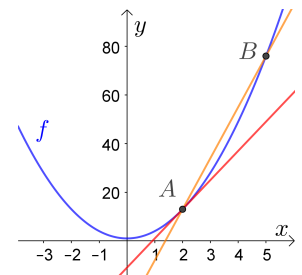
Die Punkte $A = (2 \mid 13)$ und $B = (2 + h \mid f(2 + h))$ liegen auf dem Funktionsgraphen, wobei $h > 0$ gilt.

Für die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[2; 2 + h]$ kann man zeigen:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{(2 + h) - 2} = 12 + 3 \cdot h$$

a) Ermittle $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{(2 + h) - 2}$, also die Steigung der Tangente im Punkt A .

b) Erstelle eine Gleichung der Tangente im Punkt A .



1.7

Vereinfache den Bruchterm so weit wie möglich.

a) $\frac{(4 + h)^2 - 16}{h}$

Mathematischer Kontext: Berechnung von $f'(4)$ mit $f(x) = x^2$

b) $\frac{2 \cdot (h - 1)^2 - 3 \cdot (h - 1) - 5}{h}$

Mathematischer Kontext: Berechnung von $f'(-1)$ mit $f(x) = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x$

c) ★ $\frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$

Mathematischer Kontext: Berechnung von $f'(x_0)$ mit $f(x) = x^2$

d) ★ $\frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

Mathematischer Kontext: Berechnung von $f'(2)$ mit $f(x) = x^3$





1.8

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Die Punkte $A = (x_0 | f(x_0))$ und $B = (x_0 + h | f(x_0 + h))$ liegen auf dem Funktionsgraphen.

- a) Stelle mithilfe von x_0 und h eine Formel für die Steigung der Sekante durch die Punkte A und B auf.
- b) Stelle mithilfe von x_0 eine Formel für die Steigung der Tangente im Punkt A auf.
- c) Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion f' .

1.9



Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 4$

Die Punkte $A = (3 | f(3))$ und $B = (3 + h | f(3 + h))$ liegen auf dem Funktionsgraphen.

- a) Stelle mithilfe von h eine Formel für die Steigung der Sekante durch die Punkte A und B auf.
- b) Berechne die Steigung der Tangente im Punkt A als Grenzwert von Sekantensteigungen.

1.10



Die Funktion d mit

$$d(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

ist für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$ definiert. Der Graph der Funktion d ist rechts dargestellt.

Es gibt genau einen Wert $s \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion \tilde{d} mit

$$\tilde{d}(h) = \begin{cases} d(h), & \text{falls } h \neq 0, \\ s, & \text{falls } h = 0, \end{cases}$$

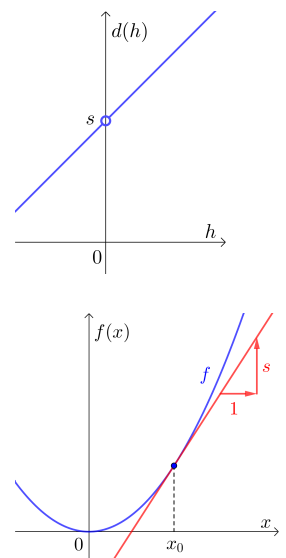
für alle $h \in \mathbb{R}$ stetig ist.

- a) Berechne s .

Rechts ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ dargestellt.

An der Stelle x_0 hat die Tangente die Steigung s .

- b) Ermittle diese Stelle x_0 .



- 1.1 a) $\frac{4m}{6s} = \frac{2}{3} \text{ m/s}$ b) Im Zeitintervall $[5 \text{ s}; 11 \text{ s}]$ beträgt die mittlere Geschwindigkeit $\frac{2}{3} \text{ m/s}$. c) $z = 8,4 \dots \text{ s}$ Toleranzintervall: $[8 \text{ s}; 9 \text{ s}]$
 d) Zum Zeitpunkt $z = 8,4 \dots \text{ s}$ ist die Momentangeschwindigkeit gleich groß wie die mittlere Geschwindigkeit in $[5 \text{ s}; 11 \text{ s}]$.
- 1.2 a) $\frac{2m/s}{5s} = 0,4 \text{ m/s}^2$ b) Im Zeitintervall $[5 \text{ s}; 10 \text{ s}]$ beträgt die mittlere Beschleunigung $0,4 \text{ m/s}^2$. c) $z = 7,9 \dots \text{ s}$
 Toleranzintervall: $[7,5 \text{ s}; 8,5 \text{ s}]$
 d) Zum Zeitpunkt $z = 7,9 \dots \text{ s}$ ist die Momentanbeschleunigung gleich groß wie die mittlere Beschleunigung in $[5 \text{ s}; 10 \text{ s}]$.
- 1.3 a) $m \approx 8$
 b) Im Zeitraum $[1995; 2020]$ ist die österreichische Staatsverschuldung pro Jahr durchschnittlich um rund 8 Mrd € gewachsen.
 c) Die Gerade durch die Datenpunkte im Jahr 2005 und 2015 hat eine größere Steigung als die Gerade durch die Datenpunkte im Jahr 1995 und 2020. Also war die mittlere Änderungsrate der österreichischen Staatsverschuldung im Zeitraum $[2005; 2015]$ größer als m .
- 1.4 a) $f'(-3) = 2$ $f'(2) = -\frac{2}{5}$ b) $y = 2 \cdot x + 2$ $y = -\frac{2}{5} \cdot x + \frac{29}{5}$
- 1.5 a) 21 b) $y = 21 \cdot x - 29$
- 1.6 a) 12 b) $y = 12 \cdot x - 11$
- 1.7 a) $8 + h$ b) $-7 + 2 \cdot h$ c) $2 \cdot x_0 + h$ d) $12 + 6 \cdot h + h^2$
- 1.8 a) $2 \cdot a \cdot x_0 + a \cdot h + b$ b) $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 \cdot a \cdot x_0 + a \cdot h + b) = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$ c) $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
- 1.9 a) $-16 - 3 \cdot h$ b) -16
- 1.10 a) $s = 6$ b) $x_0 = 3$

2. ABLEITUNGSREGELN



MmF-Materialien  MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Ableitungsregeln](#)

2.1

MmF

Verwende die Ableitungsregeln, um die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion zu ermitteln.

a) $f(x) = 2 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3$ b) $g(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 - \frac{3}{10} \cdot x^2 + \frac{2}{7} \cdot x + 10$ c) $h(x) = \frac{x^2 - 4 \cdot x + 2}{3}$

2.2

MmF

Verwende die Ableitungsregeln, um die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion zu ermitteln.

a) $f(x) = 3 \cdot \sin(x) + 5$ b) $g(x) = 4 + 0,2 \cdot e^x$ c) $h(x) = \frac{\ln(x)}{2}$

2.3

MmF

Verwende die Ableitungsregeln, um die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion zu ermitteln.

a) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ b) $g(x) = 5 \cdot \cos(x) \cdot e^x$ c) $h(x) = x \cdot \ln(x)$

2.4

MmF

Verwende die Ableitungsregeln, um die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion zu ermitteln.

a) $f(x) = 4 \cdot \sin(2 \cdot x + 5)$ b) $g(x) = 8 \cdot e^{0,5 \cdot x}$ c) ★ $h(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2}$

2.5

MmF

Ermittle die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = (x + 3)^2$ auf drei verschiedene Arten:

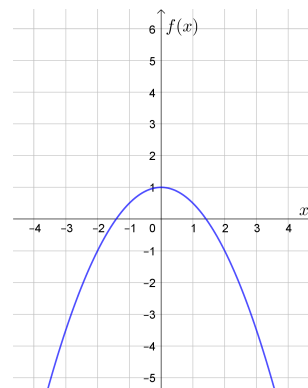
- a) Anwendung der Kettenregel b) Anwendung der Produktregel c) zuerst ausmultiplizieren

2.6

MmF

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ ist dargestellt.

- a) Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion f' .
- b) In welchem Punkt P am Graphen von f hat die Tangente die Steigung $k = 2$?
Zeichne den Punkt und die Tangente rechts ein.
- c) Die Gerade $y = -3 \cdot x + d$ ist für einen bestimmten Wert von d eine Tangente an den Graphen von f . Berechne d , und zeichne die Tangente rechts ein.



2.7

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $2^x = e^{x \cdot \ln(2)}$

Ermittle damit die Ableitungsfunktion der Exponentialfunktion f mit $f(x) = 2^x$ und kreuze richtig an.

- $f'(x) = x \cdot 2^{x-1}$ $f'(x) = 2^x$ $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$ $f'(x) = \frac{2^x}{\ln(2)}$ $f'(x) = 2^{x-1} \cdot \ln(2)$

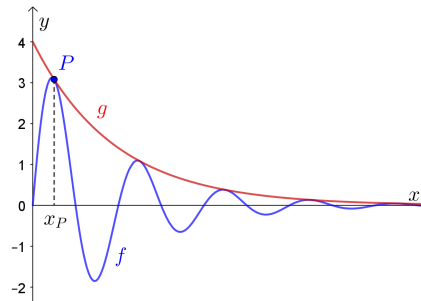
2.8

Die Graphen zweier Funktionen f und g sind dargestellt. Dabei gilt:

$$f(x) = 4 \cdot e^{-0,5 \cdot x} \cdot \sin(3 \cdot x)$$

$$g(x) = 4 \cdot e^{-0,5 \cdot x}$$

Der eingezeichnete Punkt $P = (x_P | y_P)$ liegt auf beiden Graphen.



a) Ermittle x_P und trage die richtige Zahl in das Kästchen ein.

$$x_P = \frac{\pi}{\boxed{}}$$

b) Ermittle die Ableitungsfunktionen f' und g' .

c) Zeige, dass $f'(x_P) = g'(x_P)$ gilt.

Physikalischer Kontext: [Linear gedämpfte Schwingung](#)

2.9

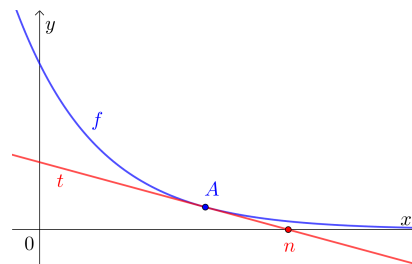
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{-2 \cdot x}$ ist dargestellt.

Im Punkt $A = (1 | f(1))$ ist die Tangente t an den Graphen eingezeichnet.

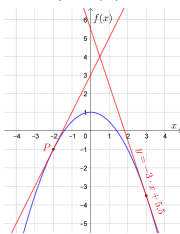
a) Kreuze die richtige Steigung dieser Tangente an.

- $\frac{1}{e^2}$ $\frac{-1}{e^2}$ $\frac{2}{e^2}$ $\frac{-2}{e^2}$ $\frac{2}{e^{-2}}$

b) ★ Berechne die eingezeichnete Nullstelle n der Tangente.



- 2.1 a) $f'(x) = 6 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 4$ b) $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{5} \cdot x + \frac{2}{7}$ c) $h'(x) = \frac{2 \cdot x - 4}{3}$
 2.2 a) $f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$ b) $g'(x) = 0,2 \cdot e^x$ c) $h'(x) = \frac{1}{2 \cdot x}$
 2.3 a) $f'(x) = 2 \cdot x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$ b) $g'(x) = -5 \cdot \sin(x) \cdot e^x + 5 \cdot \cos(x) \cdot e^x$ c) $h'(x) = \ln(x) + 1$
 2.4 a) $f'(x) = 8 \cdot \cos(2 \cdot x + 5)$ b) $g'(x) = 4 \cdot e^{0,5 \cdot x}$ c) $h'(x) = -x \cdot e^{-x^2}$
 2.5 a) $f'(x) = 2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 6$ b) $f'(x) = 1 \cdot (x + 3) + (x + 3) \cdot 1 = 2 \cdot x + 6$ c) $f(x) = x^2 + 6 \cdot x + 9 \implies f'(x) = 2 \cdot x + 6$



- 2.6 a) $f'(x) = -x$ b) $(-2 | -1)$ c) $d = 5,5$

2.7 $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$

2.8 a) $x_P = \frac{\pi}{6}$

b) $f'(x) = -2 \cdot e^{-0,5 \cdot x} \cdot \sin(3 \cdot x) + 12 \cdot e^{-0,5 \cdot x} \cdot \cos(3 \cdot x)$ $g'(x) = -2 \cdot e^{-0,5 \cdot x}$

c) $f'(\frac{\pi}{6}) = -2 \cdot e^{-0,5 \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + 12 \cdot e^{-0,5 \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = -2 \cdot e^{-0,5 \cdot \frac{\pi}{6}} = g'(\frac{\pi}{6}) \checkmark$

2.9 a) $-\frac{2}{e^2}$ b) $n = \frac{3}{2}$

3. KURVENUNTERSUCHUNGEN



Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

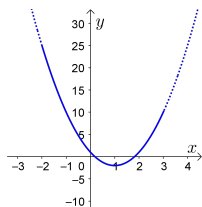
- ✓ [Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen I](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen II](#)

3.1

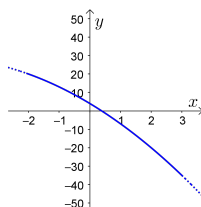
Die Gleichung und der Graph einer Polynomfunktion f sind gegeben.

- 1) Berechne alle Stellen, an denen die Tangente an den Funktionsgraphen waagrecht ist.
- 2) Berechne den kleinsten Funktionswert und den größten Funktionswert von f im Intervall $[-2; 3]$.
Zeichne die beiden entsprechenden Punkte am Funktionsgraphen ein.

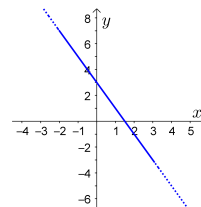
a) $f(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1$



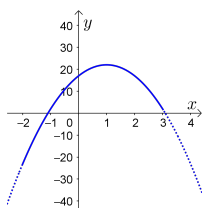
b) $f(x) = -x^2 - 10 \cdot x + 4$



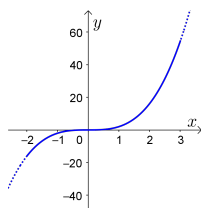
c) $f(x) = -2 \cdot x + 3$



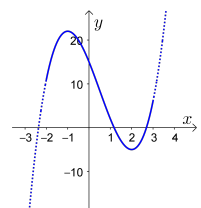
d) $f(x) = -5 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 17$



e) $f(x) = 2 \cdot x^3$



f) $f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 15$



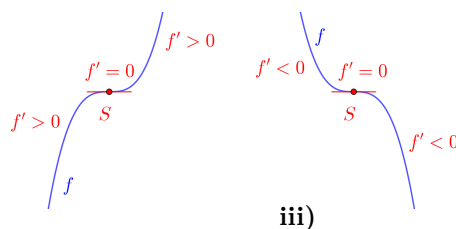
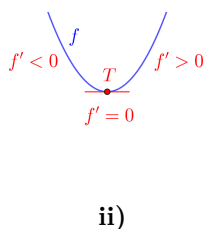
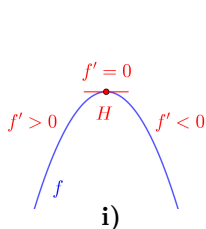
Gilt $f'(x) > 0$ für alle Stellen x eines Intervalls, dann ist f **streng monoton steigend** in diesem Intervall. ↗

Gilt $f'(x) < 0$ für alle Stellen x eines Intervalls, dann ist f **streng monoton fallend** in diesem Intervall. ↘

Gilt $f'(x_0) = 0$, dann hat f im Punkt $(x_0 | f(x_0))$ eine waagrechte Tangente.

Wenn x_0 *lokal* die einzige Nullstelle von f' ist, dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- i) Wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $+$ auf $-$, dann ist $(x_0 | f(x_0))$ ein **Hochpunkt von f** .
- ii) Wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $-$ auf $+$, dann ist $(x_0 | f(x_0))$ ein **Tiefpunkt von f** .
- iii) Wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen *nicht*, dann ist $(x_0 | f(x_0))$ ein **Sattelpunkt von f** .

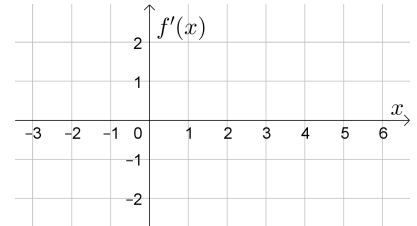


3.2



Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 6$

- a) Berechne den Scheitelpunkt von f .
- b) Zeichne rechts den Graphen der Ableitungsfunktion f' ein.
- c) Ermittle das Monotonieverhalten von f .



Vorzeichen von f''



Gilt $f''(x) > 0$ für alle Stellen x eines Intervalls, dann ist f **positiv gekrümmt (linksgekrümmt)** in diesem Intervall.



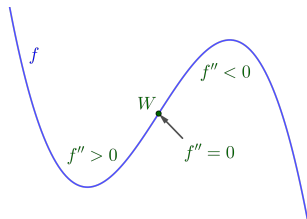
Gilt $f''(x) < 0$ für alle Stellen x eines Intervalls, dann ist f **negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt)** in diesem Intervall.



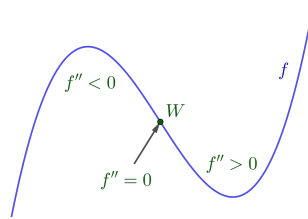
Wenn $f''(x_0) = 0$ gilt, dann *kann* $(x_0 | f(x_0))$ ein Wendepunkt von f sein.

Wenn x_0 *lokal* die einzige Nullstelle von f'' ist, dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

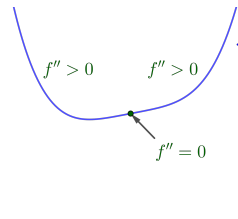
- i) Wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $+$ auf $-$, dann ist $(x_0 | f(x_0))$ ein **Wendepunkt von f** mit Krümmungswechsel von \curvearrowright auf \curvearrowleft .
- ii) Wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $-$ auf $+$, dann ist $(x_0 | f(x_0))$ ein **Wendepunkt von f** mit Krümmungswechsel von \curvearrowleft auf \curvearrowright .
- iii) Ansonsten ist A *kein* Wendepunkt von f .



i)



ii)



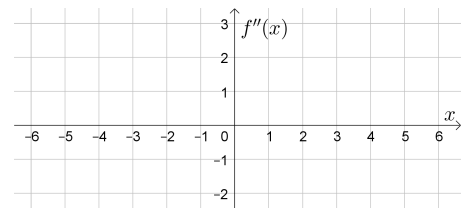
iii)

3.3



Für die kubische Funktion f gilt: $f(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^3 + \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{9}{4} \cdot x - \frac{5}{2}$

- a) Berechne die Wendestelle von f .
- b) Zeichne rechts den Graphen der 2. Ableitungsfunktion f'' ein.
- c) Ermittle das Krümmungsverhalten von f .

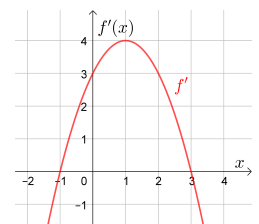


3.4



Rechts ist der Graph einer quadratischen Ableitungsfunktion f' dargestellt.

- a) Ermittle das Monotonieverhalten von f .
- b) Ermittle das Krümmungsverhalten von f .



Das Monotonieverhalten einer Funktion f soll mithilfe ihrer Funktionsgleichung ermittelt werden.

Wenn die Funktionsgleichung von f' ein Produkt ist, dann ...

mal	0	+	-
0	0	0	0
+	0	+	-
-	0	-	+

- i) ... berechnen wir die Nullstellen von f' mit dem Produkt-Null-Satz.
- ii) ... berechnen wir an den anderen Stellen das Vorzeichen von f' (siehe rechts).
- iii) ... schließen wir aus dem Vorzeichen von f' auf das Monotonieverhalten von f .
- iv) ... schließen wir aus den Vorzeichenwechseln von f' auf Hochpunkte/Tiefpunkte/Sattelpunkte von f .

Zum Beispiel: $f'(x) = (x + 2) \cdot x^2 \cdot (x - 3)$

i) $f'(x) = 0 \iff x = -2$ oder $x = 0$ oder $x = 3$

Diese drei Stellen legen vier Intervalle fest. Wir erstellen die folgende Tabelle:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$		0		0		0	
$f(x)$							

ii) Wenn $x < -2$ ist, dann gilt: $f'(x) = \underbrace{(x + 2)}_{<0} \cdot \underbrace{x^2}_{>0} \cdot \underbrace{(x - 3)}_{<0} > 0$

Nach diesem Prinzip können wir die erste Zeile der Tabelle vollständig ausfüllen:

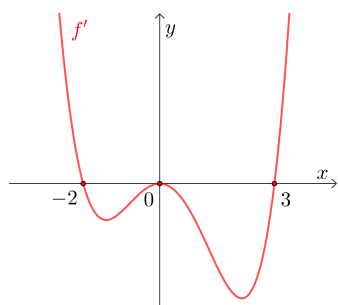
	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$							

iii) Aus dem Vorzeichen von f' schließen wir auf das Monotonieverhalten von f :

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

iv) Aus den Vorzeichenwechseln von f' schließen wir auf Hochpunkte/Tiefpunkte/Sattelpunkte von f :

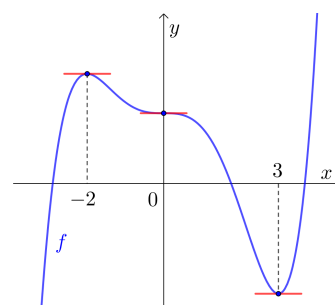
	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	↗	Hochpunkt	↘	Sattelpunkt	↘	Tiefpunkt	↗



Links ist der Funktionsgraph von f' dargestellt.

Rechts ist ein möglicher Graph von f dargestellt.

Alle anderen möglichen Graphen gehen aus diesem Graphen durch Verschiebung in y -Richtung hervor.



3.5

Für die Funktion f gilt: $f(x) = -2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 90 \cdot x + 42$

- a) Ermittle eine Gleichung der 1. Ableitungsfunktion f' .
- b) Berechne die Nullstellen von f' .
- c) Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein: $f'(x) = \boxed{} \cdot (x + \boxed{}) \cdot (x - \boxed{})$
- d) Ermittle das Monotonieverhalten von f .

Vervollständige dafür die folgende Tabelle:

	$x < \boxed{}$	$x = \boxed{}$	$\boxed{} < x < \boxed{}$	$x = \boxed{}$	$x > \boxed{}$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

3.6

Für die Ableitungsfunktion f' der Funktion f gilt:

- a) $f'(x) = 2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$
- b) $f'(x) = -3 \cdot (x + 7) \cdot (x - 3)^2$
- c) $f'(x) = e^x \cdot (x - 2) \cdot (x - 5)$

Ermittle das Monotonieverhalten von f .

3.7

Für die Ableitungsfunktion f' der Funktion f gilt: $f'(x) = e^x \cdot (2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3)$

- a) Trage positive Zahlen so in die Kästchen ein, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) = e^x \cdot \boxed{} \cdot (x + \boxed{}) \cdot (x - \boxed{})$$

- b) Ermittle das Monotonieverhalten von f .

3.8

Für die 2. Ableitungsfunktion f'' der Funktion f gilt:

- a) $f''(x) = -3 \cdot x \cdot (x - 4)$
- b) $f''(x) = e^{-x} \cdot (x + 5) \cdot (x + 2)$

Ermittle das Krümmungsverhalten von f .

3.9

Für die kubische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = x^2 \cdot (x - 12)$

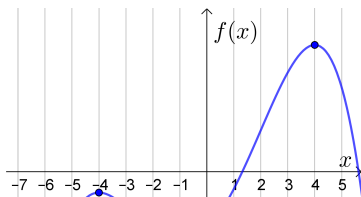
- a) Ermittle das Monotonieverhalten von f .
- b) Ermittle das Krümmungsverhalten von f .

3.10

Für die 1. Ableitungsfunktion f' der Funktion f gilt: $f'(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + x - 11)$

- a) Ermittle eine Gleichung der 2. Ableitungsfunktion f'' .
- b) Ermittle das Krümmungsverhalten von f .

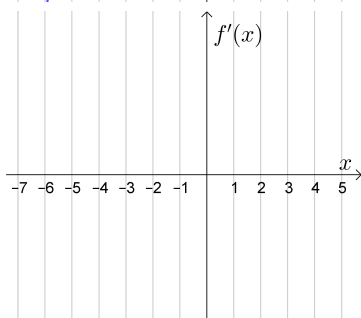
3.11



a) Im Bild links oben ist der Graph einer Funktion f dargestellt.

Skizziere im Bild links unten den Graphen der Ableitungsfunktion f' .

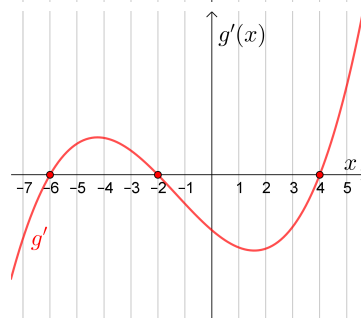
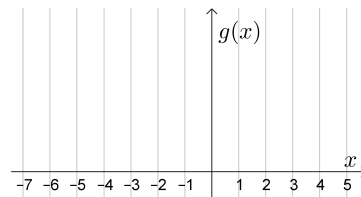
Achte darauf, dass die Nullstellen von f' und das Vorzeichen von f' an jeder Stelle stimmen.



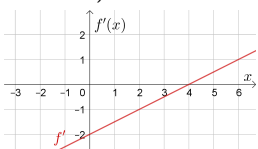
b) Im Bild rechts unten ist der Graph einer Ableitungsfunktion g' dargestellt.

Skizziere im Bild rechts oben den Graphen einer der möglichen Funktionen g .

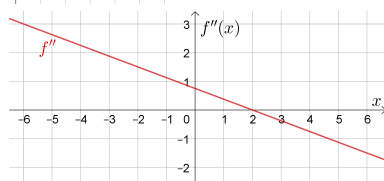
Achte darauf, dass die Extremstellen von g und das Monotonieverhalten von g richtig skizziert sind.



- 3.1 a) 1) $x = 1$ 2) Kleinster Funktionswert: $f(1) = -2$ Größter Funktionswert: $f(-2) = 25$
 b) 1) $x = -5$ 2) Kleinster Funktionswert: $f(3) = -35$ Größter Funktionswert: $f(-2) = 20$
 c) 1) keine Stelle 2) Kleinster Funktionswert: $f(3) = -3$ Größter Funktionswert: $f(-2) = 7$
 d) 1) $x = 1$ 2) Kleinster Funktionswert: $f(-2) = -23$ Größter Funktionswert: $f(1) = 22$
 e) 1) $x = 0$ 2) Kleinster Funktionswert: $f(-2) = -16$ Größter Funktionswert: $f(3) = 54$
 f) 1) $x = 2$ und $x = -1$ 2) Kleinster Funktionswert: $f(2) = -5$ Größter Funktionswert: $f(-1) = 22$



- 3.2 a) $S = (4 | 2)$ b) $(-\infty; 4) \searrow$ $(4; \infty) \nearrow$ c) $(-\infty; 4) \searrow$ $(4; \infty) \nearrow$



- 3.3 a) Wendestelle: $x = 2$ b) $(-\infty; 2) \searrow$ $(2; \infty) \nearrow$ c) Krümmungsverhalten: $(-\infty; 2) \curvearrowright$ $(2; \infty) \curvearrowleft$

- 3.4 a) $(-\infty; -1) \searrow$ $(-1; 3) \nearrow$ $(3; \infty) \searrow$ b) $(-\infty; 1) \curvearrowright$ $(1; \infty) \curvearrowleft$

- 3.5 a) $f'(x) = -6 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 90$
 b) $f'(x) = 0 \iff x = -5$ oder $x = 3$
 c) $f'(x) = -6 \cdot (x + 5) \cdot (x - 3)$

	$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
d) $f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	Tiefpunkt	\nearrow	Hochpunkt	\searrow

- 3.6 a) $(-\infty; -3) \nearrow$ $(-3; 2) \searrow$ $(2; \infty) \nearrow$ b) $(-\infty; -7) \nearrow$ $(-7; \infty) \searrow$ c) $(-\infty; 2) \nearrow$ $(2; 5) \searrow$ $(5; \infty) \nearrow$

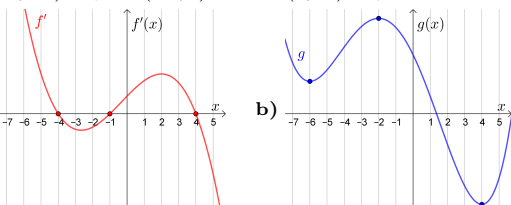
- 3.7 a) $f'(x) = e^x \cdot 2 \cdot (x + \frac{1}{2}) \cdot (x - 3)$
 b) $(-\infty; -\frac{1}{2}) \nearrow$ $(-\frac{1}{2}; 3) \searrow$ $(3; \infty) \nearrow$

- 3.8 a) $(-\infty; 0) \curvearrowleft$ $(0; 4) \curvearrowright$ $(4; \infty) \curvearrowleft$ b) $(-\infty; -5) \curvearrowright$ $(-5; -2) \curvearrowleft$ $(-2; \infty) \curvearrowright$

- 3.9 a) $(-\infty; 0) \nearrow$ $(0; 8) \searrow$ $(8; \infty) \nearrow$

- b) $(-\infty; 4) \curvearrowleft$ $(4; \infty) \curvearrowright$

- 3.10 $(-\infty; -3) \curvearrowright$ $(-3; 4) \curvearrowleft$ $(4; \infty) \curvearrowright$



- 3.11 a) $(-\infty; -3) \searrow$ $(-3; 4) \nearrow$ $(4; \infty) \searrow$

- b) $(-\infty; -3) \curvearrowright$ $(-3; 4) \curvearrowleft$ $(4; \infty) \curvearrowright$

4. UMGEKEHRTE KURVENUNTERSUCHUNGEN



MmF-Materialien  MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

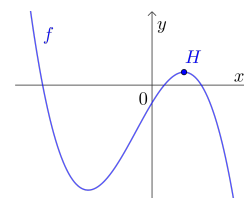
- ✓ [Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Gleichungssysteme in 2 Variablen](#)

4.1

MmF

Für die rechts dargestellte Funktion f gilt:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 12 \cdot x - 4$$



Die Funktion hat den Hochpunkt $H = (1 | 3)$.

a) Kreuze genau jene 2 Gleichungen an, die die Koeffizienten a und b erfüllen.

- $a + b = -8$
 $a + b = -5$
 $3 \cdot a + 2 \cdot b = -12$
 $a + b = -1$
 $3 \cdot a + 2 \cdot b = -8$

b) Berechne die Koeffizienten a und b .

4.2

MmF

Die quadratische Polynomfunktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^2 + 9 \cdot x - 30$$

hat bei $x = 2$ eine Nullstelle. Berechne den Koeffizienten a .

4.3

MmF

Die quadratische Polynomfunktion f mit

$$f(x) = 4 \cdot x^2 + b \cdot x - 2$$

hat an der Stelle $x = -2$ die Steigung 1. Berechne den Koeffizienten b .

4.4

MmF

Die kubische Polynomfunktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 10$$

hat bei $x = \frac{1}{4}$ eine Wendestelle. Berechne den Koeffizienten a .

4.5

MmF

Die kubische Polynomfunktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 - 6 \cdot x + 10$$

hat den Tiefpunkt $T = (1 | 5)$. Berechne die Koeffizienten a und b .

4.6



Für die kubische Polynomfunktion f gilt:

$$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 1$$

Die Funktion f ändert im Punkt $E = (1 | 4)$ ihr Monotonieverhalten.

- a) Berechne die Koeffizienten b und c .
- b) Überprüfe, ob der Extrempunkt E ein Hochpunkt oder Tiefpunkt ist.

4.7



Die kubische Polynomfunktion f mit

$$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 5$$

ändert an der Stelle $x = 1$ ihr Monotonieverhalten, und ändert an der Stelle $x = \frac{5}{3}$ ihr Krümmungsverhalten.

- a) Berechne die Koeffizienten b und c .
- b) Überprüfe, ob sich an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von f befindet.

4.8



Die quadratische Polynomfunktion f mit

$$f(x) = -2 \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

hat an der Stelle $x = 2$ die Tangente mit der Gleichung $3 \cdot x + y = 5$. Berechne die Koeffizienten b und c .

4.9



Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = a \cdot x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = e^x + a.$$

Welchen Wert muss a haben, damit beide Funktionen an der Stelle $x = 1$ die gleiche Steigung haben?
Kreuze den richtigen Wert an.

- e
 $\frac{e}{2}$
 $\frac{e}{3}$
 $\frac{e}{4}$
 $\frac{e}{5}$

- 4.1** a) $a + b = -5$ und $3 \cdot a + 2 \cdot b = -12$ b) $a = -2, b = -3$
4.2 $a = 3$
4.3 $b = 17$
4.4 $a = 4$
4.5 $a = 4, b = -3$
4.6 a) $b = -5, c = 7$ b) $f''(1) = -4 < 0 \implies$ Hochpunkt
4.7 a) $b = -5, c = 7$ b) $f''(1) = -4 < 0 \implies$ lokales Maximum an der Stelle $x = 1$
4.8 $b = 5, c = -3$
4.9 $a = \frac{e}{2}$

5. OPTIMIERUNGSAUFGABEN



Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Optimierungsaufgaben](#)

5.1

Gesucht sind zwei positive reelle Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Summe der beiden Zahlen ist 42.
- Das Produkt der beiden Zahlen ist so groß wie möglich.

Wenn der eine Summand x ist, dann muss der andere Summand also $42 - x$ sein.

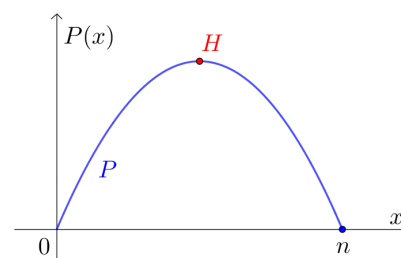
Für das Produkt der beiden Summanden gilt dann:

$$P(x) = x \cdot (42 - x)$$

x ... erster Summand

$P(x)$... Produkt der beiden Summanden

Der Graph der Funktion P ist rechts dargestellt.

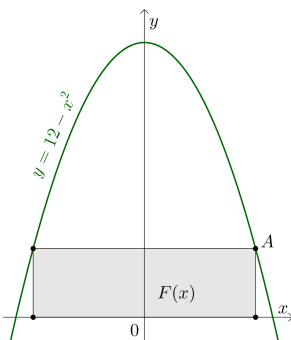


- Berechne die positive Nullstelle n der Funktion P .
- Berechne die 1. Koordinate des eingezeichneten Hochpunkts H .

5.2

Gesucht sind die Abmessungen eines Rechtecks mit den folgenden Eigenschaften:

- Zwei Eckpunkte liegen auf der x -Achse.
- Zwei Eckpunkte liegen oberhalb der x -Achse und auf der Parabel $y = 12 - x^2$.
- Der Flächeninhalt des Rechtecks ist so groß wie möglich.

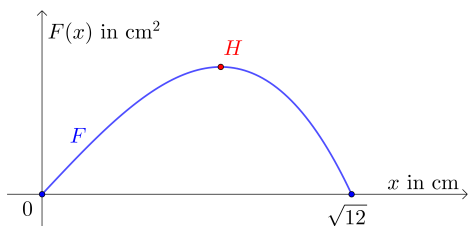
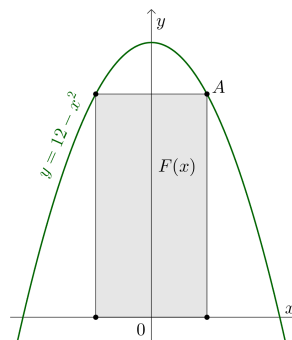


Der Flächeninhalt des Rechtecks hängt von der Position der Eckpunkte ab:

$$F(x) = 2 \cdot x \cdot (12 - x^2)$$

$x \geq 0$... x -Koordinate von A in cm

$F(x)$... Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks in cm^2



Der Graph der Funktion F ist links dargestellt.

- Berechne die Koordinaten des eingezeichneten Hochpunkts H .
- Berechne die Länge und die Breite des Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt.

5.3

Einer Kugel mit Radius $R = 3$ cm werden – wie im Querschnitt dargestellt – Drehkegel eingeschrieben.

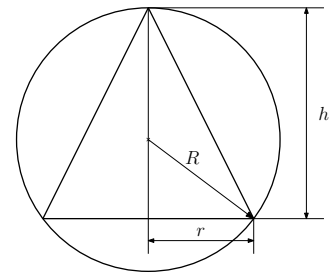
Der Radius r des Drehkegels und sein Volumen V hängen von seiner Höhe h ab.

Für das Volumen des Drehkegels gilt:

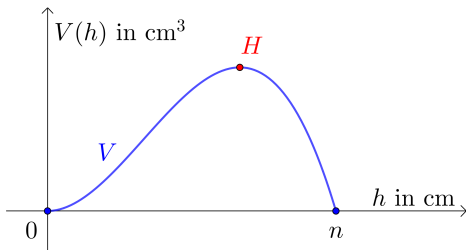
$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (6 \cdot h - h^2)$$

h ... Höhe des Drehkegels in cm

$V(h)$... Volumen dieses Drehkegels in cm^3



Das Volumen des Drehkegels soll so groß wie möglich sein.



Der Graph der Funktion V ist links dargestellt.

- a) Berechne die positive Nullstelle n der Funktion V .
- b) Berechne die 1. Koordinate des eingezeichneten Hochpunkts H .
- c) Welchen Radius hat also der Drehkegel mit maximalem Volumen? Kreuze den richtigen Radius an.

- $\sqrt{5}$ cm $\sqrt{6}$ cm $\sqrt{7}$ cm $\sqrt{8}$ cm $\sqrt{9}$ cm

- d) Welches Volumen hat also der Drehkegel mit maximalem Volumen? Kreuze das richtige Volumen an.

- $14 \cdot \pi \text{ cm}^3$ $32 \cdot \pi \text{ cm}^3$ $42 \cdot \pi \text{ cm}^3$ $\frac{14 \cdot \pi}{3} \text{ cm}^3$ $\frac{32 \cdot \pi}{3} \text{ cm}^3$

5.4

Einem Drehkegel mit Radius $R = 3$ cm und Höhe $H = 9$ cm werden – wie im Querschnitt dargestellt – Drehzylinder eingeschrieben.

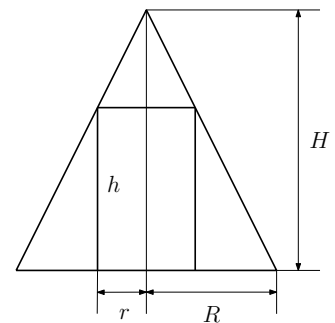
Die Höhe h des Drehzylinders und sein Volumen V hängen von seinem Radius r ab.

Für das Volumen des Drehzylinders gilt:

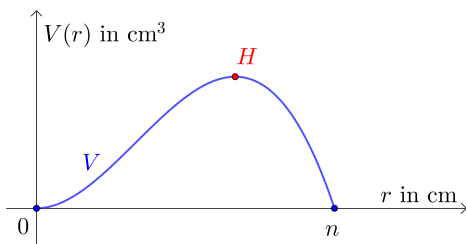
$$V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot (9 - 3 \cdot r)$$

r ... Radius des Drehzylinders in cm

$V(r)$... Volumen dieses Drehzylinders in cm^3



Das Volumen des Drehzylinders soll so groß wie möglich sein.



Der Graph der Funktion V ist links dargestellt.

- a) Berechne die positive Nullstelle n der Funktion V .
- b) Berechne die 1. Koordinate des eingezeichneten Hochpunkts H .
- c) Welche Abmessungen (Höhe und Radius) hat also der Drehzylinder mit maximalem Volumen?

5.1 a) $n = 42$ b) $x = 21$

5.2 a) $H = (2 \mid 32)$ b) $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$

5.3 a) $n = 6 \text{ cm}$ b) $h = 4 \text{ cm}$ c) $\sqrt{8} \text{ cm}$ d) $\frac{32 \cdot \pi}{3} \text{ cm}^3$

5.4 a) $n = 3 \text{ cm}$ b) $r = 2 \text{ cm}$ c) $h = 3 \text{ cm}$ $r = 2 \text{ cm}$

6. ZUFALLSVARIABLEN & BINOMIALVERTEILUNG



MmF-Materialien MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Binomialkoeffizienten](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Zufallsvariablen](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Baumdiagramme und Zufallsvariablen](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Binomialverteilung](#)

6.1

MmF

In einer Urne befinden sich 42 Kugeln. Davon sind genau r Kugeln rot.
 Martin zieht 2 Mal hintereinander eine Kugel mit Zurücklegen aus der Urne.
 Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele der gezogenen Kugeln rot sind.
 Dabei gilt: $P(X = 2) = \frac{1}{9}$

- a) Berechne r .
- b) Berechne $P(X = 0)$ und $P(X = 1)$. Stelle das Ergebnis jeweils als vollständig gekürzten Bruch dar.
- c) Berechne den Erwartungswert $E(X)$. Stelle das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch dar.

6.2

MmF

Der angegebene Bruch kann als Binomialkoeffizient angeschrieben werden.
 Trage Zahlen so in die Kästchen ein, dass beide Seiten gleich groß sind.

a) $\frac{10!}{3! \cdot 7!} = \binom{\boxed{}}{\boxed{}}$ b) $\frac{18!}{13! \cdot 5!} = \binom{\boxed{}}{\boxed{}}$ c) $\frac{42 \cdot 41 \cdot 40}{3!} = \binom{\boxed{}}{\boxed{}}$ d) $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4!} = \binom{\boxed{}}{\boxed{}}$

6.3

MmF

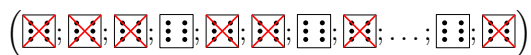
Berechne den Binomialkoeffizienten.

a) $\binom{5}{2}$ b) $\binom{5}{3}$ c) $\binom{7}{2}$ d) $\binom{7}{3}$ e) $\binom{42}{42}$ f) $\binom{42}{41}$

6.4

MmF

Samuel würfelt 42 Mal mit einem fairen 6-seitigen Würfel.
 Nach jedem Wurf notiert Samuel, ob er einen Sechser oder keinen Sechser gewürfelt hat:



Diesmal hat Samuel genau 8 Sechser gewürfelt.
 Wie viele Würfelolgen der Länge 42 gibt es, die genau 8 Sechser enthalten?

Das Ergebnis a ist ein Binomialkoeffizient. Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein: $a = \binom{\boxed{}}{\boxed{}}$

6.5

Bei einem Gewinnspiel werden 50 Lose verwendet.

• $25 \times$ 0 € (25 Lose mit jeweils 0 € Gewinn)

Auf jedem Los ist ein Gewinnbetrag aufgedruckt.

• $10 \times$ 5 € (10 Lose mit jeweils 5 € Gewinn)

Dabei gibt es die nebenstehenden Gewinnbeträge.

• $10 \times$ 10 € (10 Lose mit jeweils 10 € Gewinn)

Du ziehst nach dem Zufallsprinzip eines dieser 50 Lose.

• $5 \times$ 50 € (5 Lose mit jeweils 50 € Gewinn)

Die Zufallsvariable X gibt den Gewinnbetrag auf diesem Los an.

a) Trage die Wahrscheinlichkeiten in die nachstehende Tabelle ein.

Gewinn x_i	0 €	5 €	10 €	50 €
$P(X = x_i)$				



b) Stelle die Wahrscheinlichkeiten rechts in einem Säulendiagramm dar.

c) Berechne den Erwartungswert $E(X)$.

d) Beurteile die folgenden Aussagen über den Erwartungswert $E(X)$.

	richtig	falsch
Der Erwartungswert ist gleich groß wie das arithmetische Mittel aller 50 Gewinnbeträge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Wahrscheinlichkeit, dass X gleich groß wie der Erwartungswert ist, beträgt 0%.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens so groß wie der Erwartungswert ist, beträgt 90% oder mehr.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wenn jedes Los jeweils um den Preis $E(X)$ verkauft wird, dann sind die Gesamteinnahmen für den Losverkauf gleich groß wie die Gesamtausgaben für die Gewinnbeträge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

6.6

Bei einem Gewinnspiel werden n Lose verwendet. Auf jedem Los ist ein Gewinnbetrag aufgedruckt.

Dabei gibt es die Gewinnbeträge 0 €, 5 €, 10 € und 50 €.

Du ziehst nach dem Zufallsprinzip eines dieser n Lose.

Die Zufallsvariable X gibt den Gewinnbetrag auf diesem Los an.

Die Wahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle eingetragen:

Gewinn x_i	0 €	5 €	10 €	50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20}$	a	b

Dein erwarteter Gewinn pro Ziehung beträgt $E(X) = 6,50$ € .

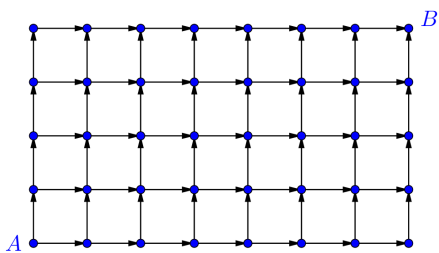
a) Stelle ein Gleichungssystem zur Berechnung von a und b auf.

b) Berechne a und b .



6.7

Pia steht im Punkt A und möchte entlang der Pfeile zum Punkt B kommen.



Ein möglicher Weg ist zum Beispiel $(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow)$.

Die Anzahl der möglichen Wege von A nach B ist ein Binomialkoeffizient.

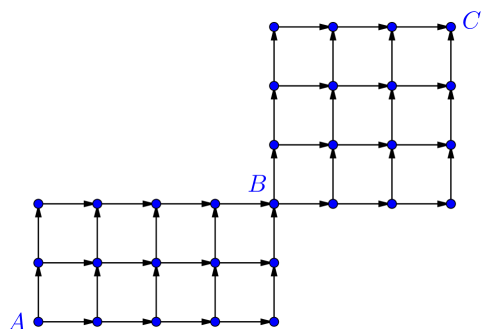
Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein:

Pia hat $\binom{5}{5}$ mögliche Wege von A nach B.

6.8



Lorenz steht im Punkt A und möchte entlang der Pfeile zum Punkt C kommen.



a) Wie viele mögliche Wege von A nach C hat Lorenz?

Im Bild oben besteht das Quadrat mit den Eckpunkten B und C aus 4×4 sogenannten Knoten.

b) Wie viele mögliche Wege von A nach C hat Lorenz, wenn das Quadrat mit den Eckpunkten B und C stattdessen aus $n \times n$ Knoten besteht ($n \geq 1$)? Stelle mithilfe von n eine Formel auf.

6.9



Du würfelst 15 Mal mit einem fairen 6-seitigen Würfel.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewürfelten Sechser an.

a) Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich groß wie $P(X = 0)$? Kreuze an.

- $15 \cdot \frac{1}{6}$ $15 \cdot \frac{5}{6}$ $\left(\frac{1}{6}\right)^{15}$ $\left(\frac{5}{6}\right)^{15}$ $\binom{15}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15}$ $\binom{15}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{15}$

b) Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich groß wie $P(X = 1)$? Kreuze an.

- $14 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ $\left(\frac{5}{6}\right)^{14} \cdot \frac{1}{6}$ $\left(\frac{1}{6}\right)^{14} \cdot \frac{5}{6}$ $15 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \cdot \frac{1}{6}$ $15 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{14} \cdot \frac{5}{6}$

c) Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich groß wie $P(X = 7)$? Kreuze an.

- $\left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$ $8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$ $7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$ $\binom{8}{7} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$ $\binom{15}{7} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$

d) Berechne den Erwartungswert von X .

e) Beschreibe ein Ereignis E in diesem Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden kann:

$$P(E) = \binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{15}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{15}{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

6.10

- a) Stelle p als vollständig gekürzten Bruch dar.

$$p = \frac{\binom{41}{3}}{\binom{42}{3}}$$

- b) ★ Berechne die kleinste natürliche Zahl n mit $p_n > 99\%$.

$$p_n = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n+1}{3}}$$

6.11

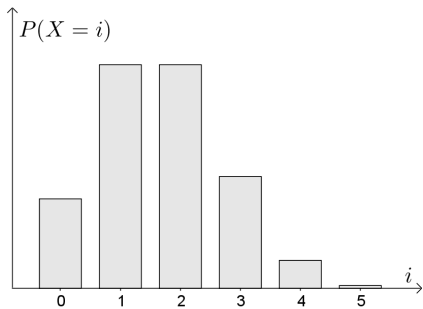
Entscheide, ob die Zufallsvariable X binomialverteilt ist oder nicht.

Gib die Parameter n und p an, falls X binomialverteilt ist.

- a) Eine Schachtel enthält 4 rote und 3 blaue Kugeln. Du ziehst eine Kugel nach dem Zufallsprinzip, notierst die Farbe und legst die Kugel wieder zurück. Du führst insgesamt 5 solche Ziehungen hintereinander durch.
 X ... Anzahl blauer Kugeln bei den 5 Ziehungen
- b) Du wirfst gleichzeitig 8 faire 6-seitige Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6.
 X ... Anzahl der Würfel mit Augenzahl 1 oder 2
- c) Eine Schachtel enthält 5 rote und 5 blaue Kugeln. Du ziehst 3 Kugeln ohne Zurücklegen aus der Schachtel.
 X ... Anzahl blauer Kugeln unter den 3 Kugeln
- d) Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6 so lange, bis zum ersten Mal ein Sechser kommt.
 X ... Anzahl der Würfe bis zum ersten Sechser
- e) Ein Single-Choice-Test enthält 30 Fragen mit jeweils 5 Antwortmöglichkeiten. Bei jeder Frage ist genau eine Antwort richtig. Du kreuzt bei jeder Frage zufällig eine Antwortmöglichkeit an.
 X ... Anzahl richtig beantworteter Fragen
- f) Eine gezinkte Münze mit den 2 Seiten „Kopf“ und „Zahl“ zeigt mit 70 % Wahrscheinlichkeit „Kopf“.
 Du wirfst die Münze 18 Mal.
 X ... Anzahl Würfe mit Ergebnis „Zahl“
- g) In einer Klasse sind 14 Schüler und 11 Schülerinnen. Von ihnen werden zur Stundenwiederholung nacheinander 4 verschiedene Personen ausgewählt.
 X ... Anzahl der Schülerinnen, die zur Stundenwiederholung ausgewählt werden
- h) ★ In einer Urne befinden sich 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 durchnummeriert sind.
 Bei einer Lotto-Ziehung werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
 Lukas beobachtet über ein Jahr hinweg alle 104 Lotto-Ziehungen.
 X ... Anzahl der Lotto-Ziehungen, bei denen die Kugel mit der Zahl 42 gezogen wird



6.12



Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p . Die Wahrscheinlichkeiten von X sind links in einem Säulendiagramm dargestellt. Dabei gilt:

- $P(X = 5) > 0$
- $P(X \geq 6) = 0$
- $P(X = 1) = P(X = 2)$

- Ermittle den Parameter n .
- Berechne den Parameter p .

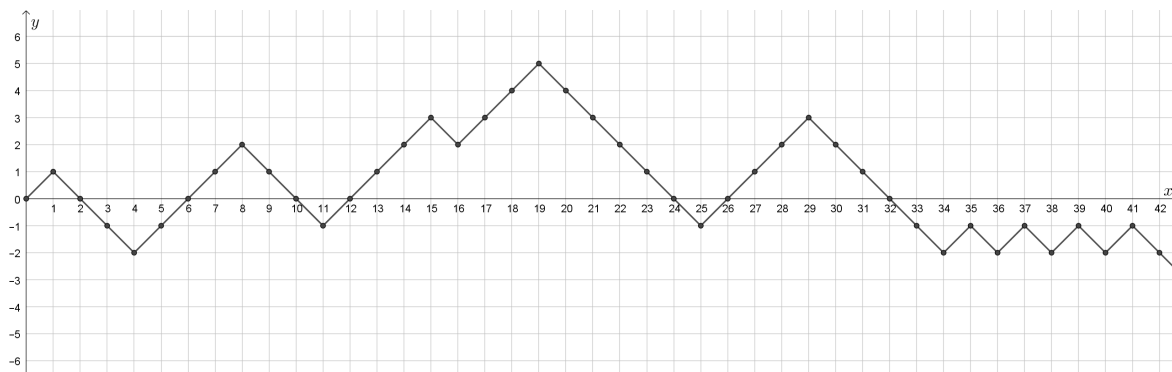
6.13



Bei einem *Random Walk* startet man im Punkt $(0 | 0)$. Dann wird immer wieder eine faire Münze geworfen. Nach jedem Münzwurf bewegt man sich folgendermaßen weiter:

- Beim Ergebnis „Kopf“ bewegt man sich entlang des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ weiter.
- Beim Ergebnis „Zahl“ bewegt man sich entlang des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ weiter.

Ein möglicher Random Walk ist im folgenden Bild dargestellt:



Dieser Random Walk verläuft durch den Punkt $(6 | 0)$.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Random Walk durch den Punkt $(6 | 0)$ verläuft.

Hinweis: Was weißt du über die ersten 6 Münzwürfe, wenn der Random Walk durch den Punkt $(6 | 0)$ verläuft?

Stelle die Wahrscheinlichkeit als vollständig gekürzten Bruch dar.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Random Walk durch den Punkt $(2 \cdot n | 0)$ verläuft ($n \in \mathbb{N}$)?

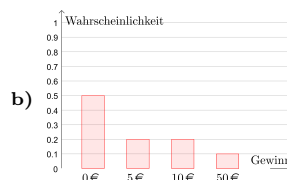
Stelle mithilfe von n eine Formel für diese Wahrscheinlichkeit auf.

Man kann übrigens zeigen, dass diese Wahrscheinlichkeit für große Werte n ungefähr $\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot n}}$ beträgt.

- 6.1 a) $r = 14$ b) $P(X = 0) = \frac{4}{9}$ $P(X = 1) = \frac{4}{9}$ c) $E(X) = \frac{2}{3}$ rote Kugeln
 6.2 a) $\binom{10}{3}$ oder $\binom{10}{7}$ b) $\binom{18}{13}$ oder $\binom{18}{5}$ c) $\binom{42}{3}$ oder $\binom{42}{39}$ d) $\binom{14}{4}$ oder $\binom{14}{10}$
 6.3 a) 10 b) 10 c) 21 d) 35 e) 1 f) 42
 6.4 $a = \binom{42}{8}$ oder $a = \binom{42}{34}$

6.5 a)

Gewinn x_i	0 €	5 €	10 €	50 €
$P(X = x_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1



c) 8 € d) richtig, richtig, falsch, richtig

- 6.6 a) I : $a + b = \frac{5}{20}$ II : $2 + 10 \cdot a + 50 \cdot b = 6,5$ b) $a = \frac{4}{20}$ $b = \frac{1}{20}$
 6.7 $\binom{11}{4}$ oder $\binom{11}{7}$
 6.8 a) 300 b) $15 \cdot \binom{2-n}{n}$
 6.9 a) $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{15}$ b) $P(X = 1) = 15 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \cdot \frac{1}{6}$ c) $P(X = 7) = \binom{15}{7} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$ d) $E(X) = \frac{15}{6} = 2,5$ Sechser
 e) E ist das Ereignis, dass sich unter den 15 Würfeln insgesamt 5, 6 oder 7 Sechser befinden.
 6.10 a) $\frac{13}{14}$ b) $n = 300$
 6.11 a) X ist binomialverteilt mit $n = 7$ und $p = \frac{3}{7}$.
 b) X ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = \frac{1}{3}$.
 c) X ist nicht binomialverteilt.
 d) X ist nicht binomialverteilt.
 e) X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = \frac{1}{5}$.
 f) X ist binomialverteilt mit $n = 18$ und $p = 30\%$.
 g) X ist nicht binomialverteilt.
 h) X ist binomialverteilt mit $n = 104$ und $p = \frac{6}{45}$.
 6.12 a) $n = 5$ b) $p = \frac{1}{3}$
 6.13 a) $\frac{5}{16}$ b) $\binom{2-n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2-n}}$