AUFGABENSAMMLUNG – STATISTIK

Inhaltsverzeichnis

Unterrichtsmaterialien – Statistik MmF

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

✓ Arbeitsblatt – Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme

✓ Arbeitsblatt – Statistische Kenngrößen und Boxplot

✓ Arbeitsblatt – Interpolation und Regression

Wie darf ich die Aufgaben verwenden? MmF

Alle anderen Aufgaben stammen aus den SR(D)P-Aufgabenpools der AHS bzw. BHS.

Bei diesen Aufgaben ist das BMBWF-Logo Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung mit der entsprechenden Aufgabe verlinkt.

Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

Datum: 2. Mai 2024

1. Absolute/Relative Häufigkeiten & Diagramme

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

1.1

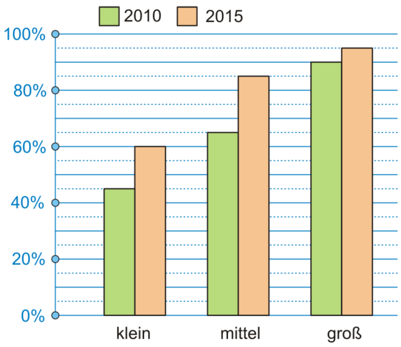
a) $\frac{3}{20}$ der 500 produzierten Glühbirnen einer Maschine sind defekt.
Wie viele Glühbirnen sind defekt?

b) 34 von 92 Personen haben ein Haustier.
Berechne den relativen Anteil dieser Personen, die ein Haustier haben.

c) In Österreich leben rund 8,859 Mio. Personen. Das sind rund $\frac{3}{250}$ aller Personen, die in Europa leben.
Wie viele Personen leben in Europa?

1.2

Die untenstehende Grafik zeigt die relativen Häufigkeiten der Nutzung von Online-Shopping für Klein-, Mittel- und Großbetriebe für die Jahre 2010 und 2015.



Für die Untersuchung wurden 1000 Kleinbetriebe, 200 Mittelbetriebe und 40 Großbetriebe erfasst.
Für eine weitere Statistik werden alle diese Betriebe zusammengenommen.

a) Berechne, um wieviel *Prozent* die Nutzung von Online-Shopping von 2010 bis 2015 in dieser Gesamtstatistik gestiegen ist.

b) Berechne, um wieviel *Prozentpunkte* die Nutzung von Online-Shopping von 2010 bis 2015 in dieser Gesamtstatistik gestiegen ist.

1.3

Um das Rauchverhalten von Vätern und Söhnen zu untersuchen, wurden 1077 Väter und jeweils ein erwachsener Sohn zufällig ausgewählt. Die Tabelle zeigt das Ergebnis der Stichprobe.

	Sohn raucht	Sohn raucht nicht	Summe
Vater raucht	150	225	375
Vater raucht nicht	211	491	702
Summe	361	716	1077

a) Berechne den Prozentsatz der Raucher in dieser Stichprobe.

b) Berechne den Prozentsatz der rauchenden Söhne, deren Väter Nichtraucher sind.

1.4

Eine Umfrage enthält unter anderem die beiden folgenden Fragen:

– Wurden Sie in Wien geboren?

– Befindet sich Ihr Hauptwohnsitz in Wien?

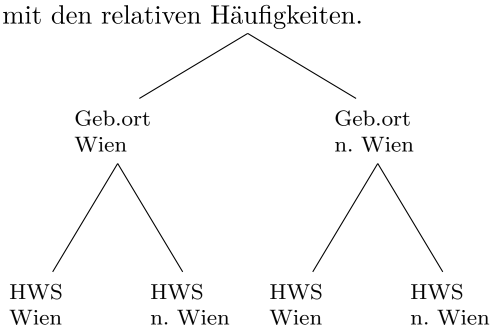
a) Die Umfrage wurde unter 164 Personen auf dem Wiener Stephansplatz durchgeführt:

- 53 der befragten Personen wurden in Wien geboren.
- 87 der befragten Personen haben ihren Hauptwohnsitz *nicht* in Wien.
- 48 der befragten Personen wurden in Wien geboren und haben dort ihren Hauptwohnsitz.

1) Vervollständige die Tabelle mit den absoluten Häufigkeiten.

	Geburtsort Wien	Geburtsort nicht Wien	Summe
Hauptwohnsitz Wien			
Hauptwohnsitz nicht Wien			
Summe			

2) Beschrifte das Baumdiagramm mit den relativen Häufigkeiten.

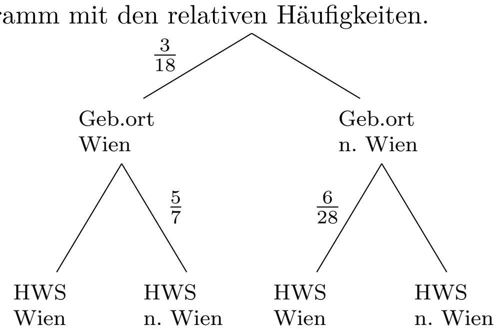


3) Welcher relative Anteil der befragten Personen wurde in Wien geboren und hat den Hauptwohnsitz nicht in Wien.

4) Welcher relative Anteil der befragten Personen hat den Hauptwohnsitz nicht in Wien.

b) Die Umfrage wurde auch auf dem Bahnhof in Wolkersdorf durchgeführt. Das Ergebnis ist im folgenden Baumdiagramm dargestellt:

1) Vervollständige das Baumdiagramm mit den relativen Häufigkeiten.



2) Welcher relative Anteil der befragten Personen wurde in Wien geboren und hat den Hauptwohnsitz in Wien?

3) Welcher relative Anteil der befragten Personen hat den Hauptwohnsitz in Wien?

1.5

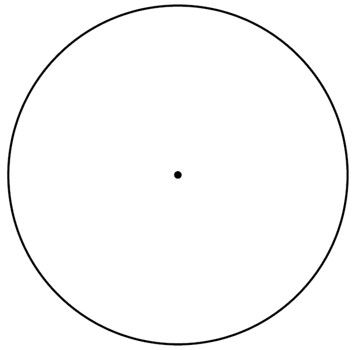
Eine Zeitung befragt ihre Leser*innen zu einer geplanten schulpolitischen Gesetzesänderung. Die Erhebung ergibt eine Zustimmung von 52 % und eine Ablehnung von 48 %. Geschlechtsspezifisch gibt es deutliche Unterschiede: Unter den Zustimmenden sind 70 % weiblich, unter den Ablehnenden nur 40 %.

– Berechne den Prozentsatz der Frauen unter den teilnehmenden Personen an der Erhebung.

1.6

Nach Karl Landsteiner unterscheidet man vier Blutgruppen: 0, A, B und AB.
Diese kommen in Österreich annähernd mit folgender relativer Häufigkeit vor:

Blutgruppe	0	A	B	AB
relative Häufigkeit	37 %	41 %	15 %	7 %



Die Verteilung der Blutgruppen in Österreich soll in einem Kreisdiagramm dargestellt werden.

1) Berechnen Sie die Winkel der jeweiligen Sektoren.

2) Zeichnen Sie die Sektoren in den nebenstehenden Kreis ein.

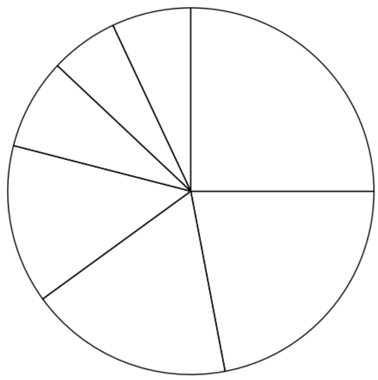
1.7

Der Gesamtumsatz von Fairtrade-Produkten in Österreich ist in den Jahren 2007-2013 deutlich gestiegen:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährlicher Gesamtumsatz in Millionen (Mio.) Euro	53	65	72	87	100	107	130

Quelle: http://www.fairtrade.at/fileadmin/AT/Materialien/2013_FAIRTRADE_Inside_Zahlen_Fakten.pdf [05.09.2016].

Im Jahr 2012 teilte sich der Gesamtumsatz auf folgende 7 Bereiche auf:
Baumwolle, frische Früchte, Fruchtsäfte, Kaffee, Rosen, Süßwaren und Rest.
Der Umsatz an Kaffee betrug in diesem Jahr 18 % des Gesamtumsatzes.



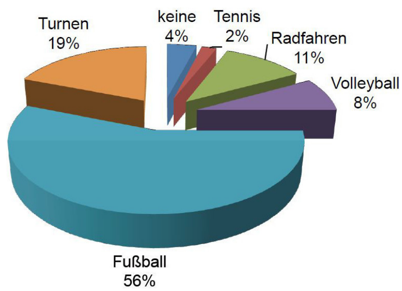
1) Kennzeichnen Sie im nebenstehenden Diagramm denjenigen Sektor, der dem Umsatz an Kaffee entspricht.

Der Umsatz an Süßwaren betrug 2012 etwa 24 Mio. Euro.

2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Umsatz an Süßwaren in Bezug auf den Gesamtumsatz im Jahr 2012 (siehe Tabelle) betrug.

1.8

In einer Volksschule wurden 167 Burschen und 133 Mädchen nach der bevorzugten Sportart befragt.
Die Befragung hat das nebenstehende Diagramm ergeben.

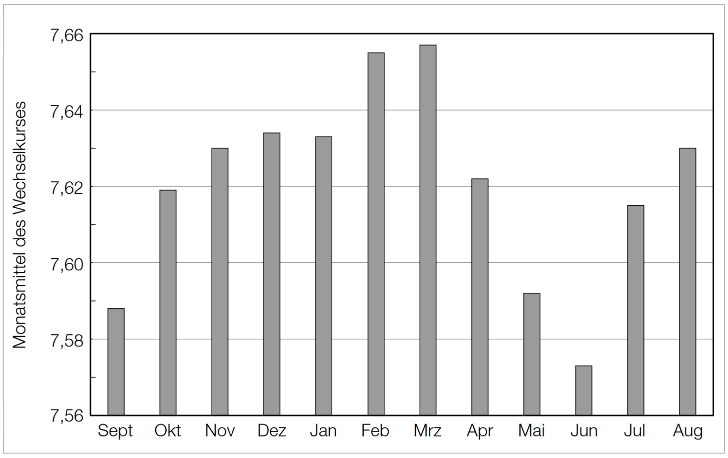


1) Zeichnen Sie mithilfe der Daten aus dem Kreisdiagramm ein Säulen- oder Balkendiagramm mit den absoluten Häufigkeiten.

1.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Monatsmittel des Wechselkurses einer Fremdwährung gegenüber dem Euro sind für ein Jahr im unten stehenden Diagramm dargestellt.



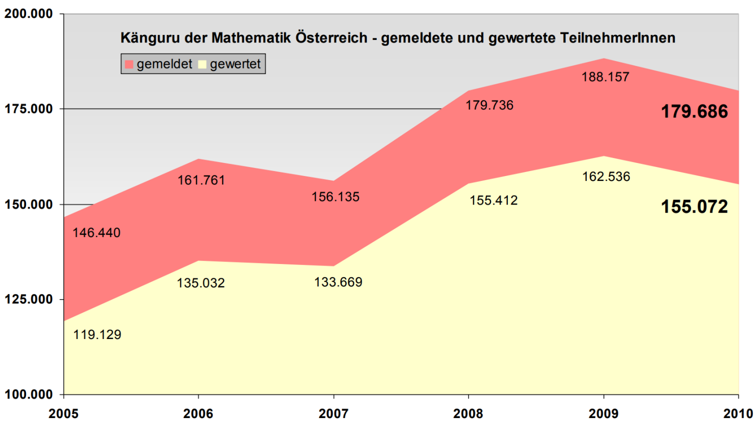
Jemand behauptet: „Das Monatsmittel des Wechselkurses im Monat Oktober war ungefähr doppelt so groß wie das Monatsmittel des Wechselkurses im Monat September, weil der entsprechende Balken im Diagramm ungefähr doppelt so hoch ist.“

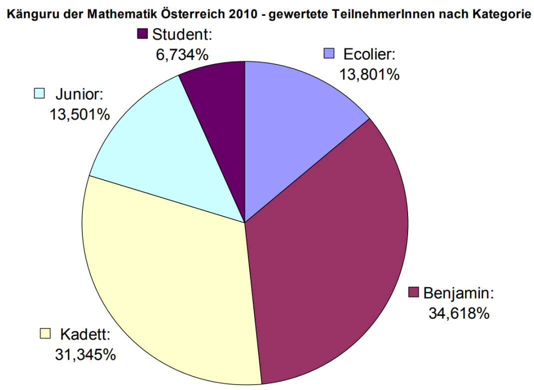
1) Erklären Sie, warum diese Argumentation falsch ist.

1.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die folgenden Grafiken enthalten Daten über die Teilnahme am Wettbewerb Känguru der Mathematik in Österreich seit 2005.





Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Anzahl der österreichischen Volksschüler/innen (Teilnehmer/innen der Kategorie Ecolier: 3. und 4. Schulstufe), die im Jahr 2010 tatsächlich gewertet wurden!

1.1 **a)** 75 Glühbirnen **b)** $\frac{17}{46}$ **c)** 738,25 Mio. Personen

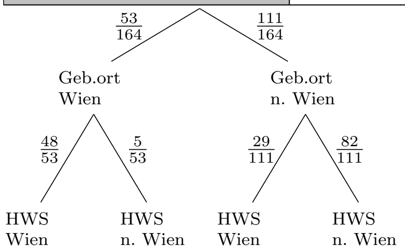
1.2 **a)** 31,16... % **b)** 15,48... Prozentpunkte

1.3 **a)** 34,16... % **b)** 30,05... %

1.4 **a)** **1)**

	Geburtsort Wien	Geburtsort nicht Wien	Summe
Hauptwohnsitz Wien	48	29	77
Hauptwohnsitz nicht Wien	5	82	87
Summe	53	111	164

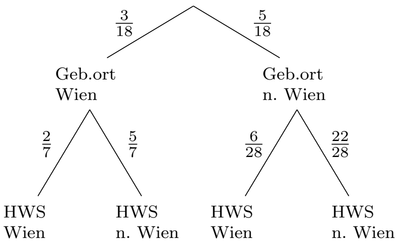
2)



3) $\frac{5}{164}$

4) $\frac{87}{164}$

b) **1)**

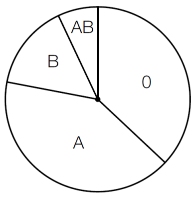


2) $\frac{1}{21}$

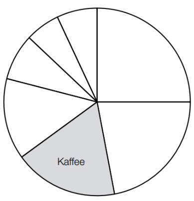
3) $\frac{19}{84}$

1.5 55,6 %

1.6 **1)** Blutgruppe 0: 133,2° Blutgruppe A: 147,6° Blutgruppe B: 54° Blutgruppe AB: 25,2° **2)**



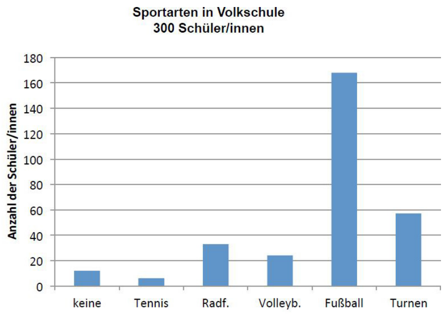
1.7 **1)**



2) 22,42... %

1.8

Sportart	keine	Tennis	Radf.	Volleyb.	Fußball	Turnen
%	4	2	11	8	56	19
absolut	12	6	33	24	168	57



1.9 Diese Argumentation ist falsch, weil die Skalierung der y-Achse nicht bei 0 „beginnt“, sondern bei 7,56.

1.10 ca. 21 400 Schüler/innen

2. Statistische Kenngrössen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Statistische Kenngrößen und Boxplot

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

2.1

Berechne das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und die Standardabweichung s der gegebenen Zahlenliste.

a) $(3, 3, 3, 3)$ **b)** $(2, 2, 4, 4)$ **c)** $(1, 3, 3, 5)$ **d)** $(1, 1, 5, 5)$

2.2

Ein Betrieb beschäftigt 18 Männer und 7 Frauen.
Das durchschnittliche Einkommen im Betrieb beträgt 1938 €.
Das durchschnittliche Einkommen der Männer ist um 225 € niedriger als das durchschnittliche Einkommen der Frauen.

– Berechne das durchschnittliche Einkommen der Frauen.

2.3

In der Entbindungsstation war heute viel los. Es sind gleich 5 Babies zur Welt gekommen. Davon haben zwei ein Gewicht von je 3 kg, zwei ein Gewicht von je 3,5 kg, und eines ein Gewicht, das um 1 kg mehr als das Durchschnittsgewicht von allen fünf ist. Wieviel wiegt das fünfte Baby?

2.4

Am 24.09.2020 veröffentlichte der Deutsche Bundestag eine Pressemitteilung mit folgender Schlagzeile:
„Die Hälfte verdient weniger als das Medianentgelt“
Was hältst du von dieser Schlagzeile?
Nimm dazu Stellung.

2.5

Ermittle eine Liste von Zahlen, in der . . .

a) . . . genau 60 % der Zahlen kleiner oder gleich dem Median sind und genau 60 % der Zahlen größer oder gleich dem Median sind.

b) . . . genau 70 % der Zahlen kleiner oder gleich dem Median sind und genau 60 % der Zahlen größer oder gleich dem Median sind.

2.6 MmF

Die Monatsbruttogehälter aller Angestellten werden um 2,5 % erhöht, jedoch mindestens um einen *Sockelbetrag* von 40 €.

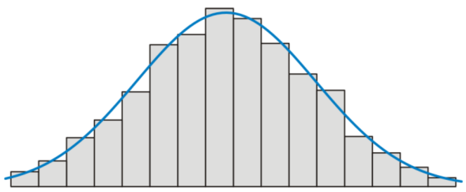
- Ein Fünftel der Gehälter steigen um den Sockelbetrag.
- Alle anderen Gehälter steigen um mehr als 40 €.

Untersuche, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Ein Gehalt von 1500 € wird um 40 € erhöht.	☐	☐
Der arithmetische Mittel der Gehälter wird um 2,5 % erhöht.	☐	☐
Der Median der Gehälter wird um 2,5 % erhöht.	☐	☐
Die Spannweite der Gehälter wird um 2,5 % erhöht.	☐	☐
Die Standardabweichung für das untere Fünftel der Gehälter bleibt gleich.	☐	☐

2.7 MmF

Es kommt häufig vor, dass das Histogramm bei einer großen Stichprobe einen glockenförmigen Verlauf hat.
Dies legt die Vermutung nahe, dass eine Normalverteilung vorliegt.
Bei einer Normalverteilung haben der Mittelwert m und die Standardabweichung s die folgende Aussagekraft:



- 68,2... % aller Daten liegen im Intervall $[m - s; m + s]$.
- 95,4... % aller Daten liegen im Intervall $[m - 2 \cdot s; m + 2 \cdot s]$.
- 99,7... % aller Daten liegen im Intervall $[m - 3 \cdot s; m + 3 \cdot s]$.

Beim PISA-Test 2012 hat Math-Land in Mathematik den sensationellen Mittelwert von 700 Punkten erreicht, bei einer Standardabweichung von nur 50 Punkten.
Untersuche, ob die folgenden Aussagen über das Abschneiden der Teilnehmer*innen aus Math-Land unter der Annahme einer Normalverteilung richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Mehr als 90 % lagen zwischen 600 und 800 Punkten.	☐	☐
Weniger als $\frac{1}{6}$ lagen zwischen 600 und 650 Punkten.	☐	☐
Mehr als 80 % übertrafen 650 Punkte.	☐	☐
Mindestens 20 % erreichten mehr als 750 Punkte.	☐	☐
Weniger als 1 % hatte weniger als 600 Punkte.	☐	☐

2.8 MmF

Zeige, dass die quadratische Funktion f mit

$$f(x) = \frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2}{2}$$

den kleinsten Funktionswert bei $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ annimmt.

Mathematischer Kontext:
Das arithmetische Mittel minimiert die Fehlerquadratsumme.

2.9

Für das geometrische Mittel $\bar{x}_{\text{geo}}$ von n positiven Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt: $\bar{x}_{\text{geo}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$
Das geometrische Mittel ist niemals größer als das arithmetische Mittel:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

a) Überprüfe diese Behauptung für $n = 2$ mit $x_1 = 12$ und $x_2 = 3$.

b) Begründe die Behauptung für zwei allgemeine positive Zahlen x_1 und x_2.

2.10

Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2001 lebten im Bundesland Tirol in 303 632 Wohnungen 661 026 Personen.
Die nebenstehende Tabelle gibt die Anzahl dieser Wohnungen aufgelistet nach dem Merkmal „Anzahl der Wohnräume“ an.

Anzahl der Wohnräume	Anzahl der Wohnungen
1	19 372
2	28 973
3	61 002
4	80 331
5	56 878
6	57 076
Summe	303 632

1) Beschreiben Sie in Worten, was durch folgende Ausdrücke im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:

(1) $\frac{661\,026}{303\,632} \approx 2{,}18$

(2) $\frac{1 \cdot 19\,372 + 2 \cdot 28\,973 + 3 \cdot 61\,002 + 4 \cdot 80\,331 + 5 \cdot 56\,878 + 6 \cdot 57\,076}{303\,632} \approx 3{,}98$

2.11

Die Stärke eines Erdbebens wird oft mithilfe der „Richter-Skala“ in sogenannten „Magnituden“ M angegeben. Aus messtechnischen Gründen ist die Richter-Skala nach oben hin mit 6,5 Magnituden begrenzt. Ab ungefähr einer Magnitude von 3 ist ein Beben spürbar.
In der nachstehenden Tabelle sind die Häufigkeiten von Erdbeben bestimmter Magnitudenbereiche weltweit pro Jahr angegeben.

Magnitude	[3; 4[	[4; 5[	[5; 6,5[
geschätzte Häufigkeit des Auftretens pro Jahr weltweit	49 000	6 200	800

1) Veranschaulichen Sie die relativen Häufigkeiten der Erdbeben der verschiedenen Magnitudenbereiche durch ein Säulendiagramm.

2) Erklären Sie, warum der Median der Magnituden der in der Tabelle festgehaltenen Erdbeben nicht 4 sein kann.

2.12

Die Anzahl der Helikopterunfälle wird monatlich erhoben. Für das Jahr 2009 wurden folgende Daten erhoben:

Monat	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dez.
Anzahl der Unfälle	13	18	22	19	18	18	22	16	23	17	15	2

1) Stellen Sie die Daten aus obiger Tabelle grafisch mithilfe eines Balken- oder Säulendiagramms dar.

2) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median der Datenreihe.

2.13

Spielzeugteile werden von einer Maschine in den Farben Rot, Gelb und Blau eingefärbt. Die einfärbigen Spielzeugteile einer Produktion werden vermessen und ihre jeweiligen Längen werden tabellarisch erfasst.

rote Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
4,5	20
5,6	10
6,0	20
6,5	15
25,3	5

gelbe Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
5,5	25
10,0	7
14,5	13

blaue Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
7,0	70

1) Ermitteln Sie den Median der Längen der gelben Spielzeugteile.

2) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Längen der blauen Spielzeugteile gleich groß ist wie das arithmetische Mittel der Längen der roten Spielzeugteile.

2.14

An einer Universität werden Daten zur Körpergröße der männlichen Sport-Studenten erhoben. Die Körpergröße von 10 zufällig ausgewählten Studenten wird gemessen.

Körpergröße in cm	168	169	171	174	179	181	182	183	188	191

1) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Körpergrößen.

Bei der Weiterverarbeitung der Daten wurde aufgrund eines Tippfehlers anstelle eines Messwerts aus der obigen Tabelle eine Körpergröße von mehr als 1000 cm eingegeben.
Dadurch ändert sich der Median von 180,0 cm auf 181,5 cm.

2) Geben Sie diejenigen Messwerte an, die für diese fehlerhafte Eingabe in Frage kommen.

2.15

Man hat Längenmessungen an einer bestimmten Sorte von Fischen (Reinanken) im Wörthersee durchgeführt und tabellarisch festgehalten. Die Altersklasse von Fischen wurde dabei in Lebens-Sommern („sömmrig“) angegeben:

Altersklasse (sömmrig)	männliche Fische	weibliche Fische	mittlere Länge in cm
3	18	4	31,4
4	28	10	34,7
5	22	12	38
6	12	8	40,3
7	8	14	44
8	2	10	46,9

a) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten für das Vorkommen weiblicher Fische in den unterschiedlichen Altersklassen bezogen auf die Gesamtzahl der Fische in der jeweiligen Altersklasse. Stellen Sie diese relativen Häufigkeiten in einem Säulendiagramm dar.

b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der mittleren Längen für alle gefangenen Fische.

2.16

In der folgenden Tabelle sind die maximalen Wasserdurchflüsse eines Flusses an einer bestimmten Stelle in Kubikmetern pro Sekunde (m^3/s) von 2005 bis 2012 dokumentiert:

Jahr	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
höchster Abfluss in m^3/s	31	45	45	28	26	98	102	22

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und den Median m der maximalen Wasserdurchflüsse mithilfe der Daten aus der Tabelle.

2) Erklären Sie, welche Eigenschaften die beiden Zentralmaße gegenüber Ausreißern haben.

2.17

Karin hat das arithmetische Mittel ihrer monatlichen Ausgaben im Zeitraum Jänner bis (einschließlich) Oktober mit € 25 errechnet. Im November gibt sie € 35 und im Dezember € 51 aus.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel für die monatlichen Ausgaben in diesem Jahr!

2.18

Für das arithmetische Mittel einer Datenreihe $x_1, x_2, \ldots, x_{24}$ gilt: $\overline{x} = 115$.
Die Standardabweichung der Datenreihe ist $s_x = 12$. Die Werte einer zweiten Datenreihe $y_1, y_2, \ldots, y_{24}$ entstehen, indem man zu den Werten der ersten Datenreihe jeweils 8 addiert, also $y_1 = x_1 + 8$, $y_2 = x_2 + 8$ usw.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Mittelwert $\overline{y}$ und die Standardabweichung s_y der zweiten Datenreihe an!

$\overline{y} =$ ______________________

$s_y =$ ______________________

2.1 **a)** $\bar{x} = 3,\ s = 0$ **b)** $\bar{x} = 3,\ s = 1$ **c)** $\bar{x} = 3,\ s = 1{,}4142\ldots$ **d)** $\bar{x} = 3,\ s = 2$

2.2 2100 €

2.3 4,5 kg

2.4 Unabhängig von der Verteilung der Entgelte verdient *immer* mindestens die Hälfte höchstens das Medianentgelt. Das Wort „weniger“ bringt als einzige Zusatzinformation, dass die untersuchte Anzahl gerade ist und die beiden Werte in der Mitte verschieden sind.

2.5 **a)** Zum Beispiel: $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$ **b)** Zum Beispiel: $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$

2.6 richtig, falsch, richtig, falsch, richtig

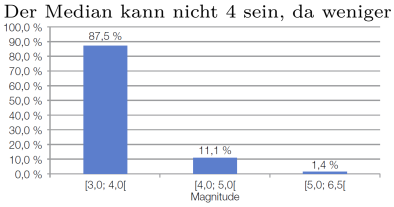
2.7 richtig, richtig, richtig, falsch, falsch

2.8 Quadratische Ergänzung oder Differentialrechnung

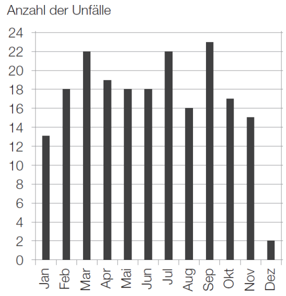
2.9 **a)** $7{,}5 \geq 6$ ✓ **b)** $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \iff \dfrac{(x_1 + x_2)^2}{4} \geq x_1 \cdot x_2 \iff \cdots \iff (x_1 - x_2)^2 \geq 0$ ✓

2.10 Der Ausdruck (1) gibt die durchschnittliche Anzahl der Personen pro Wohnung (rund 2,18) an.
Der Ausdruck (2) gibt die durchschnittliche Anzahl der Wohnräume pro Wohnung (rund 3,98) an.

2.11 Der Median kann nicht 4 sein, da weniger als 50 % der Erdbeben eine Magnitude von 4 oder höher haben.



2.12



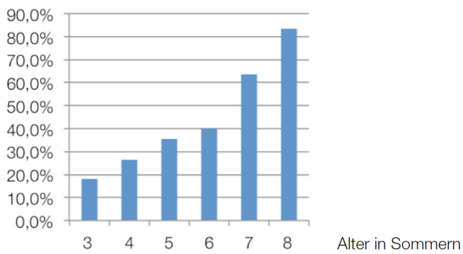
Arithmetisches Mittel: 16,92 Unfälle Median: 18 Unfälle

2.13 Median der Längen der gelben Spielzeugteile: 5,5 cm
Arithmetisches Mittel der Längen der blauen Spielzeugteile: 7 cm
Arithmetisches Mittel der Längen der roten Spielzeugteile ist gleich groß: 7 cm

2.14 Arithmetischer Mittelwert: $\bar{x} = 178{,}6$ cm Standardabweichung: $s = 7{,}499\ldots$ cm
Messwerte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen: 168, 169, 171, 174, 179

2.15 **a)**

Altersklasse (sömmrig)	relative Häufigkeit weiblicher Fische in Prozent
3	18,2 %
4	26,3 %
5	35,3 %
6	40,0 %
7	63,6 %
8	83,3 %



b) $\approx 38{,}1$ cm

2.16 $\bar{x} \approx 49{,}6\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ $m = 38\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$
Auf das arithmetische Mittel haben Ausreißer einen großen Einfluss.
Auf den Median haben Ausreißer (fast) keinen Einfluss.

2.17 Die monatlichen Ausgaben betragen durchschnittlich 28 €.

2.18 $\overline{y} = 123$ $s_y = 12$

3. Quartile & Boxplot

MmF-Materialien

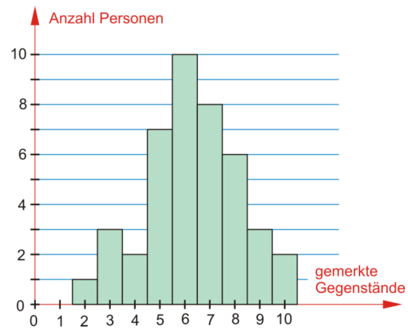
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Statistische Kenngrößen und Boxplot

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

3.1

Bei einem Gedächtnistest werden zehn Gegenstände kurz hergezeigt. Nach zehn Minuten sollen die Testpersonen alle gemerkten Gegenstände aufschreiben.
Im nebenstehenden Bild ist das Ergebnis dieses Tests dargestellt.
Ermittle das arithmetische Mittel $\bar{x}$, den Median $\tilde{x}$ sowie das erste und das dritte Quartil (q_1, q_3) für die jeweils erreichte Anzahl von gemerkten Gegenständen.



3.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

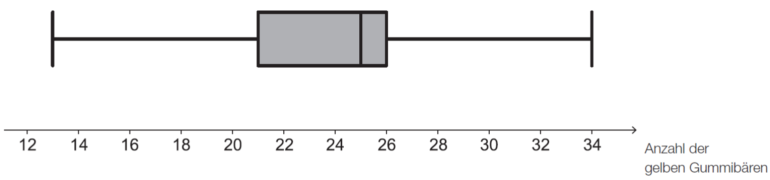
Gummibären werden in 5 unterschiedlichen Farben bzw. 6 unterschiedlichen Geschmacksrichtungen hergestellt: rot (Himbeere und Erdbeere), gelb (Zitrone), grün (Apfel), orange (Orange) und weiß (Ananas).

a) Die nachstehende Tabelle enthält eine Auflistung, wie viele weiße Gummibären in den untersuchten Packungen waren.

Anzahl weißer Gummibären pro Packung	17	20	21	22	24
Anzahl der Packungen	2	3	3	1	4

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahlen weißer Gummibären pro Packung.

b) Mehrere Packungen wurden hinsichtlich der Anzahl der gelben Gummibären pro Packung untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist im nachstehenden Boxplot dargestellt.



Eine der untersuchten Packungen wird zufällig ausgewählt. Sie gehört zu jenem Viertel aller untersuchten Packungen, in dem die meisten gelben Gummibären zu finden waren.

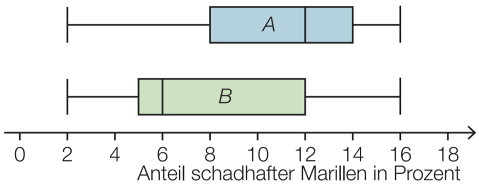
1) Lesen Sie aus dem Boxplot ab, in welchem Bereich die Anzahl der gelben Gummibären in der ausgewählten Packung liegen muss.

c) In einer Packung sind alle Geschmacksrichtungen in gleichen Anteilen zu finden.

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Gummibären in dieser Packung die Farbe Rot haben.

3.3

Eine mehrjährig laufende Untersuchung zur Erntequalität von Marillen in dieser Region ergab unterschiedliche Ergebnisse bei den Sorten A und B. Der relative Anteil schadhafter Marillen an der gesamten Ernte pro Erntejahr und Sorte ist in den nachstehenden Boxplots veranschaulicht.



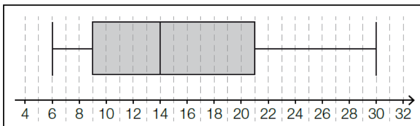
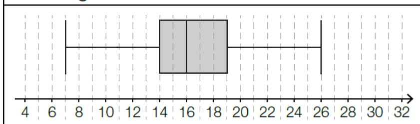
1) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die aufgrund der obigen Boxplots sicher richtig ist. [1 aus 5]

Insgesamt waren in keinem Jahr weniger als 4 % der Marillen in dieser Region schadhaft.	☐
Bei Sorte B waren in mehr Erntejahren mindestens 6 % der Marillen schadhaft als bei Sorte A.	☐
Bei beiden Sorten waren in mindestens der Hälfte der Erntejahre mindestens 12 % der Marillen schadhaft.	☐
Bei Sorte A waren in mindestens $\frac{3}{4}$ der Erntejahre höchstens 14 % der Marillen schadhaft.	☐
In jedem Erntejahr waren zumindest bei einer der beiden Sorten weniger als 16 % der Marillen schadhaft.	☐

3.4

Auf zwei Linienflugstrecken wurde die Anzahl der Vegetarier/innen unter den Fluggästen erhoben. Die Ergebnisse sind in den nachstehenden Boxplots dargestellt.

1) Ordnen Sie den beiden Boxplots jeweils diejenige Aussage aus A bis D zu, die daraus mit Sicherheit abgelesen werden kann. [2 aus 4]

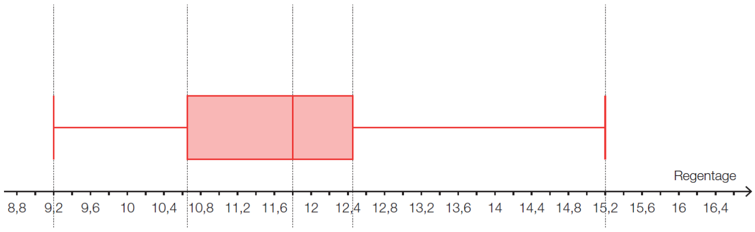
 Anzahl der Vegetarier/innen pro Flug auf Flugstrecke 1	
 Anzahl der Vegetarier/innen pro Flug auf Flugstrecke 2	

A	Auf drei Viertel der Flüge waren genau 14 Vegetarier/innen.
B	Auf mindestens der Hälfte der Flüge waren höchstens 14 Vegetarier/innen.
C	Auf der Hälfte der Flüge waren genau 14 Vegetarier/innen.
D	Auf mindestens drei Viertel der Flüge waren mindestens 14 Vegetarier/innen.

3.5

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die untenstehende Grafik zeigt einen Boxplot über die durchschnittliche Anzahl von Regentagen pro Monat während eines Jahres in Gmunden.



1) Lesen Sie aus dem Boxplot folgende Kenngrößen ab: Spannweite, Median, unteres Quartil, oberes Quartil.

3.6

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Flasche soll 300 Milliliter (ml) Olivenöl enthalten.

a) Die Genauigkeit der Abfüllanlage wird mit einer Stichprobe von 25 Flaschen überprüft. Es ergeben sich die folgenden Abfüllmengen in ml:

296	298	302	301	304
300	295	296	297	301
298	296	295	300	302
295	297	295	296	303
300	295	297	298	300

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median der gemessenen Abfüllmengen.

2) Erklären Sie, wie sich beide Größen verändern, wenn die Flasche mit der Abfüllmenge 304 ml einen wesentlich höheren Messwert gehabt hätte.

b) Eine weitere Überprüfung der Anlage hat die folgenden Kennzahlen geliefert:

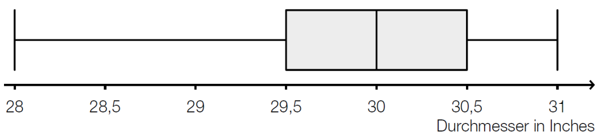
statistische Größe	Füllmenge in ml
Minimum (Min)	295
1. Quartil (Q1)	296
Median (Med)	298
3. Quartil (Q3)	301
Maximum (Max)	304

1) Erstellen Sie einen Boxplot.

3.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In den USA wird die Größe einer Pizza durch ihren Durchmesser (in Inches) angegeben. Im Folgenden werden Pizzen immer als kreisrund angenommen.
Bei 30-Inch-Pizzen verschiedener Lieferanten wurde der tatsächliche Durchmesser bestimmt.
Die Messergebnisse sind im folgenden Boxplot zusammengefasst:



1) Lesen Sie die Spannweite ab.

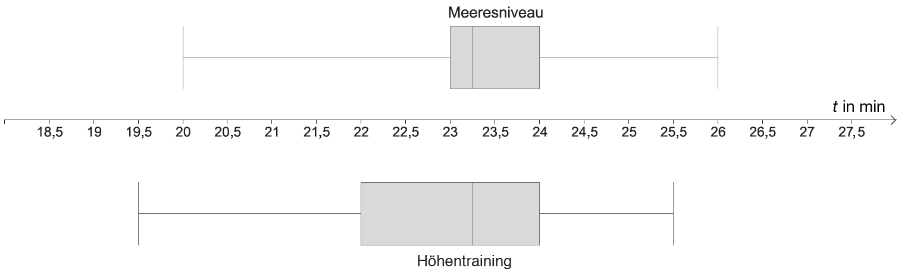
Irrtümlich wurde beim Erfassen der Messwerte bei einer Pizza statt eines Durchmessers von 28,5 Inch ein Durchmesser von 29 Inch notiert.

2) Erklären Sie, warum dieser Fehler den Boxplot nicht beeinflusst.

3.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Nachwuchsfußballmannschaft führte ein Experiment durch, bei dem die eine Hälfte der Mannschaft ein Trainingslager auf Meeresniveau und die andere Hälfte der Mannschaft ein Höhentrainingslager absolvierte. Nach der Rückkehr vom Trainingslager mussten beide Gruppen mehrere Tests absolvieren. Bei einem Querfeldeinlauf wurden die Zeiten verglichen und statistisch ausgewertet:



1) Vergleichen Sie die beiden Boxplots in Bezug auf die Zeit des schnellsten Läufers und die Spannweite.

Leo behauptet: „Etwa 50 % der Teilnehmer des Trainings auf Meeresniveau hatten eine kürzere Laufzeit als 23 Minuten."

2) Überprüfen Sie anhand des passenden Boxplots, ob diese Aussage richtig ist.

3.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

An einem Tag notiert eine Praktikantin, wie viele Minuten die Kinder für die Hausübung brauchen:

$$70, 32, 25, 15, 18, 20, 60, 22, 15, 30, 27, 30, 60, 12, 33, 75, 33, 35, 40, 48, 30, 20, 65, 10, 35, 95, 18, 32, 23, 29, 24$$

1) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel, den Median, die Standardabweichung und die Quartile.

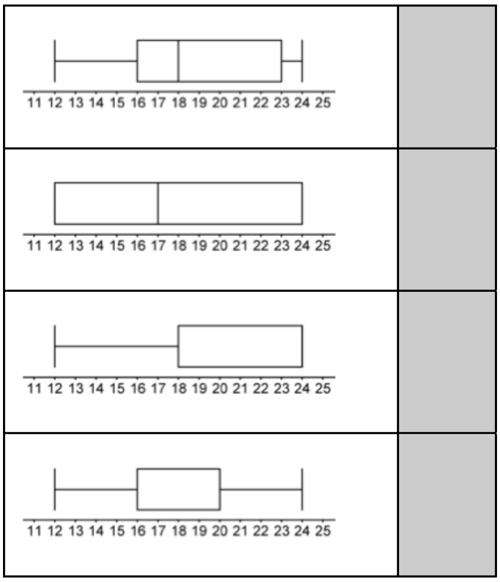
3.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Tankstellenkette hat in den Shops von Filialen die Umsatzzahlen eines Tiefkühlproduktes jeweils über einen Zeitraum von 15 Wochen beobachtet und der Größe nach festgehalten.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den angegebenen Boxplots die entsprechenden Filial-Umsatzzahlen zu!



A	Umsatz Filiale 1	12	12	12	12	13	15	17	17	17	20	20	24	24	24	24
B	Umsatz Filiale 2	12	13	13	15	15	18	18	20	20	20	22	22	24	24	26
C	Umsatz Filiale 3	12	14	14	16	16	17	18	18	18	22	22	23	23	23	24
D	Umsatz Filiale 4	12	16	18	18	18	18	19	24	24	24	24	24	24	24	24
E	Umsatz Filiale 5	12	12	12	12	18	18	18	18	18	23	23	23	23	23	24
F	Umsatz Filiale 6	12	14	14	16	16	18	18	20	20	20	20	20	24	24	24

3.11

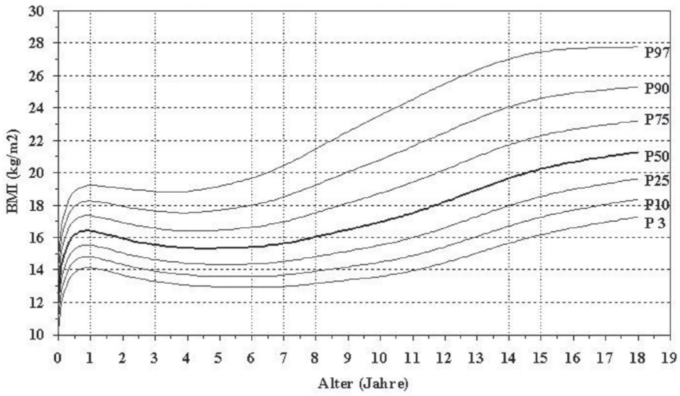
Der Body-Mass-Index (BMI) ist eine Maßzahl für die Bewertung der Masse eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße.

Die Formel für die Berechnung des BMI lautet: $\text{BMI} = \frac{m}{l^2}$

m ... Masse in Kilogramm (kg)

l ... Körpergröße in Metern (m)

a) Zur Klassifikation der Masse eines Kindes wird von österreichischen Kinderärzten oft folgendes Diagramm verwendet:



Bezeichnungen:
P50 ... Median
P25 ... unteres Quartil
P75 ... oberes Quartil

Die restlichen Bezeichnungen (P3, P10, P90, P97) können Sie unberücksichtigt lassen.

Perzentile für den Body-Mass-Index von Mädchen im Alter von 0 bis 18 Jahren

Quelle: http://www.familienhandbuch.de/ernaehrung/von-kindern-und-jugendlichen/mein-kind-ist-zu-dick

1) Lesen Sie aus der oben stehenden Grafik ab, wie viel Prozent der 15-jährigen Mädchen einen höheren BMI als 18,5 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ haben.

Ein Mädchen ist 3 Jahre alt, 16 kg schwer und 97 cm groß.

2) Überprüfen Sie, ob der BMI des Mädchens im oberen Viertel seiner Altersgruppe liegt.

b) Georg ist um 10 % größer als Fritz, sie wiegen aber gleich viel.

1) Stellen Sie eine Formel für den BMI von Georg auf, wenn die Masse und die Körpergröße von Fritz bekannt sind.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent Georgs BMI kleiner ist als jener von Fritz.

3.12

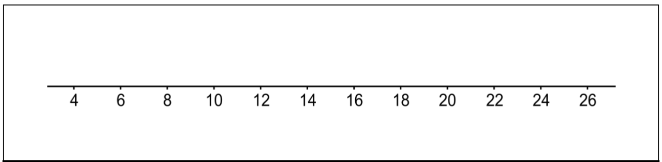
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Tankstellenkette hat in den Shops von Filialen die Umsatzzahlen eines Tiefkühlprodukts jeweils über einen Zeitraum von 15 Wochen beobachtet und der Größe nach festgehalten.

Umsatzzahlen	12	12	12	12	18	18	18	18	18	23	23	23	23	23	24

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den entsprechenden Boxplot und tragen Sie die angegebenen Kennzahlen unter der Grafik ein!



Minimum	erstes Quartil	Median	drittes Quartil	Maximum
$m =$	$Q_1 =$	$med =$	$Q_3 =$	$M =$

3.1 $\bar{x} = 6{,}31$ $\tilde{x} = 6$ $q_1 = 5$ $q_3 = 8$

3.2 **a)** 21,15...

b) Diese Packung enthält mindestens 26 und höchstens 34 gelbe Gummibären.

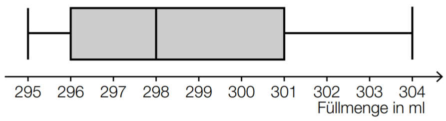
c) $\frac{1}{3} = 33{,}33...\,\%$

3.3 Richtig ist die 4. Antwort von oben.

3.4 Oben: B Unten: D

3.5 Spannweite: 6 Regentage Median: 11,8 Regentage Unteres Quartil: $\approx$ 10,6 Regentage Oberes Quartil: $\approx$ 12,4 Regentage

3.6 **a)** Arithmetisches Mittel: 298,28 ml Median: 298 ml **b)**



3.7 **1)** Spannweite: 3 Inch

2) Sowohl der falsche als auch der korrekte Wert liegen zwischen dem Minimum und dem ersten Quartil. Daher verändert dieser Fehler weder das Minimum noch das erste Quartil und beeinflusst den Boxplot nicht.

3.8 **1)** Gruppe Meeresniveau: Die schnellste Zeit betrug 20 Minuten, die langsamste Zeit 26 Minuten.
Somit ist die Spannweite 6 Minuten.
Gruppe Höhentraining: Die schnellste Zeit betrug 19,5 Minuten, die langsamste Zeit 25,5 Minuten.
Somit ist die Spannweite 6 Minuten.

2) Die Aussage von Leo ist nicht richtig. Bei einer Laufzeit von 23 Minuten liegt das untere Quartil. Daher haben mindestens 75 % der Teilnehmer des Camps auf Meeresniveau eine Laufzeit von 23 Minuten oder mehr.

3.9 Arithmetischer Mittelwert: 34,87... min Median: 30 min Standardabweichung: 20,06... min
Quartile: $q_1 = 21$ min (auch richtig: $q_1 = 20$ min) $q_2 = 30$ min $q_3 = 37{,}5$ min (auch richtig: $q_3 = 40$ min)

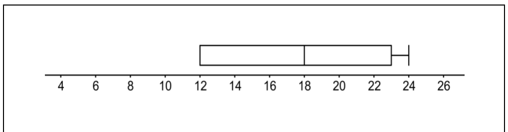
3.10 von oben nach unten: C, A, D, F

3.11 **a)** Ungefähr 75 % aller 15-jährigen Mädchen haben einen BMI, der größer ist als $18{,}5\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
BMI $= 17\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ liegt oberhalb der P75-Kurve $\Longrightarrow$ BMI des Mädchens im oberen Viertel

b) m ... Masse von Georg / Masse von Fritz in kg
l_F ... Körpergröße von Fritz in Metern
l_G ... Körpergröße von Georg in Metern
BMI von Georg: $\text{BMI}_G = \dfrac{m}{1{,}1^2 \cdot l_F^2}$

$\text{BMI}_G = \text{BMI}_F \cdot \dfrac{1}{1{,}1^2} = \text{BMI}_F \cdot 0{,}8264...$ $\Longrightarrow$ Georgs BMI ist um ca. 17,4 % kleiner als der BMI von Fritz.

3.12



Minimum	erstes Quartil	Median	drittes Quartil	Maximum
$m = 12$	$Q_1 = 12$	$med = 18$	$Q_3 = 23$	$M = 24$

4. Interpolation

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Interpolation und Regression

4.1

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Zu Beginn des Jahres 2013 wurden im Schigebiet Kaprun-Kitzsteinhorn nebenstehende Werte für den Luftdruck gemessen.

Seehöhe	Luftdruck
990 m	1040 hPa
1980 m	930 hPa

1) Bestimmen Sie mithilfe eines linearen Modells aus diesen Daten den Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel.

4.2

Blut versorgt die Organe des menschlichen Körpers mit Sauerstoff. Das Herz pumpt das Blut in einem Kreislaufsystem durch den Körper.
Die Pumpleistung des Herzens (in Litern pro Minute) kann in Abhängigkeit vom Alter (in Jahren) annähernd durch eine lineare Funktion P beschrieben werden.
Sie beträgt bei 20-jährigen Personen 5 Liter pro Minute und bei 70-jährigen Personen 2,5 Liter pro Minute.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von P auf.

4.3

In den USA gibt es eine Grillenart, die ihre Zirp-Rate abhängig von der Temperatur verändert: Je wärmer es ist, desto öfter zirpt die Grille. Daher wird sie als *Thermometergrille* bezeichnet.
Bei 75 °F zirpt eine Thermometergrille 140-mal pro Minute und bei 65 °F 100-mal pro Minute.

1) Stellen Sie die Gleichung derjenigen linearen Funktion auf, die die Temperatur in °F in Abhängigkeit von der Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute beschreibt.

4.4

Ein neues, kostenloses Spiel für Smartphones verbreitet sich rasant. Eine Woche nach Erscheinen haben 700 Smartphonebesitzer/innen dieses Spiel heruntergeladen. Eine Woche später sind es bereits 1900.
Nehmen Sie an, dass die Verbreitung dieses Spiels mithilfe eines exponentiellen Wachstums beschrieben werden kann.

1) Erstellen Sie eine zugehörige exponentielle Wachstumsfunktion f mit:

$$f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$$

$t \dots$ Zeit in Wochen ab dem Erscheinen des Spiels
$f(t) \dots$ Anzahl der Smartphonebesitzer/innen, die das Spiel bis zum Zeitpunkt t heruntergeladen haben

4.5

Die nachstehende Tabelle zeigt die Menge des gesammelten Restmülls in Graz in den Jahren 2001, 2002, 2005 und 2010.

Jahr	2001	2002	2005	2010
Restmüllmenge in t	41 072	41 292	43 312	52 569

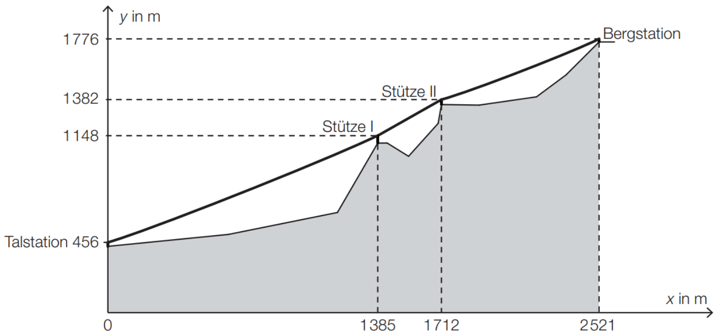
Es wird vermutet, dass sich die Entwicklung der Restmüllmenge durch eine quadratische Funktion näherungsweise beschreiben lässt.

1) Erstellen Sie mithilfe der Daten der Jahre 2001, 2002 und 2005 eine Gleichung der quadratischen Funktion, die als Modell für die Entwicklung der Restmüllmenge verwendet werden kann. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2001.

2) Berechnen Sie für das Jahr 2010 die prozentuelle Abweichung dieses Modells von der tatsächlich gesammelten Restmüllmenge.

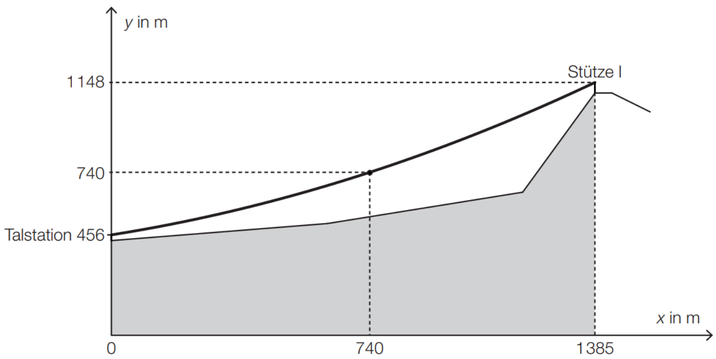
4.6

In nachstehender Abbildung ist der Verlauf des Tragseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.



$x \ldots$ horizontaler Abstand von der Talstation in Metern (m)
$y \ldots$ Höhe über Meeresniveau in m

Aufgrund des Eigengewichts hängt das Tragseil zwischen der Talstation und der Stütze I durch. Sein Verlauf kann näherungsweise als Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b und c ermittelt werden können.

2) Ermitteln Sie a, b und c.

4.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Trägerraketen ermöglichen es, schwere Nutzlasten in die Erdumlaufbahn zu befördern. Ariane 5 ist die leistungsfähigste europäische Trägerrakete. Beim Start der Ariane 5 lässt sich der senkrecht nach oben zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t modellhaft annähernd durch eine quadratische Funktion beschreiben.

t in s	$s(t)$ in m
0	0
2	16,1
4	53,8

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg in Metern (m) zum Zeitpunkt t

1) Stellen Sie die allgemeine Funktion s für den gegebenen Zusammenhang auf.

2) Ermitteln Sie mithilfe der Werte aus der Tabelle die entsprechenden Parameter der Funktion s.

4.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In einer Fabrikshalle wird mit Access-Points und Repeatern ein W-LAN eingerichtet. Ein Access-Point verbindet einen Laptop kabellos mit einem Netzwerk. Ein Repeater verstärkt das Signal.
Die Datenübertragungsrate beschreibt die übertragene Datenmenge pro Zeiteinheit und wird meist in der Einheit Megabit pro Sekunde (Mbit/s) angegeben.
Eine Technikerin modelliert die Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Entfernung von einem Access-Point mit einer Exponentialfunktion d.

$$d(x) = c \cdot a^x$$

x ... Entfernung in m
$d(x)$ ... Datenübertragungsrate in einer Entfernung x in Mbit/s

Sie ermittelt folgende Messwerte:

Entfernung in m	5	50
Datenübertragungsrate in Mbit/s	500	10

1) Berechnen Sie die Parameter a und c der Exponentialfunktion d.

4.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres ...	1981	2014
Bevölkerungszahl	10 068	4 524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N, die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.

2) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N, welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

4.1 1005,5... hPa

4.2 $P(t) = -0{,}05 \cdot t + 6$

4.3 $f(x) = 0{,}25 \cdot x + 40$ $x \ldots$ Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute $f(x) \ldots$ Temperatur in °F

4.4 $f(t) = 257{,}8... \cdot e^{0{,}998\,528...\cdot t}$

4.5 **1)** $f(t) = 113{,}3... \cdot t^2 + 106{,}6... \cdot t + 41\,072$
$t \ldots$ Zeit in Jahren ab dem Jahr 2001 mit $0 \leq t \leq 9$ $f(t) \ldots$ Restmüllmenge zur Zeit t in Tonnen

2) 2,58... %

4.6 I: $y(0) = 456$ II: $y(740) = 740$ III: $y(1385) = 1148$ $\Longrightarrow$ $a = 0{,}000\,179\,6...$ $b = 0{,}2508...$ $c = 456...$

4.7 $s(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ $\rightsquigarrow$ $s(t) = 2{,}7 \cdot t^2 + 2{,}65 \cdot t$

4.8 $a = 0{,}9167...$ $c = 772{,}2...$

4.9 $N(t) = 10\,068 \cdot 0{,}976...^t$
Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3070 Personen zu erwarten.

5. Lineare Regression & Ausgleichsfunktionen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Interpolation und Regression

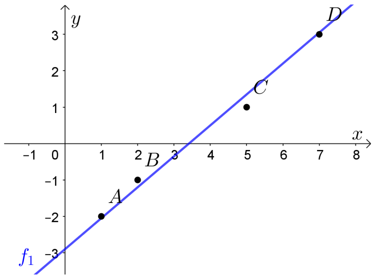
5.1

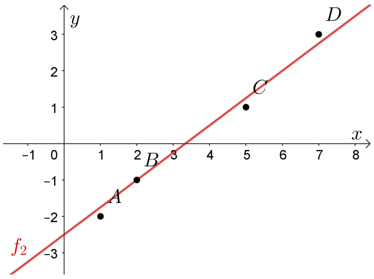
Gegeben sind die Datenpunkte $A = (1 \mid -2)$, $B = (2 \mid -1)$, $C = (5 \mid 1)$ und $D = (7 \mid 3)$.

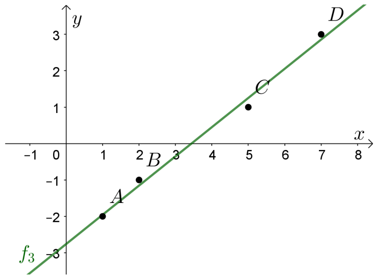
a) Berechne die Fehlerquadratsumme für die lineare Funktion f_1 mit $f_1(x) = 0{,}85 \cdot x - 2{,}9$.

b) Berechne die Fehlerquadratsumme für die lineare Funktion f_2 mit $f_2(x) = 0{,}75 \cdot x - 2{,}5$.

c) Die lineare Regressionsfunktion ist f_3 mit $f_3(x) = \frac{73}{91} \cdot x - \frac{251}{91}$ und Fehlerquadratsumme 0,1098....
Rechne nach, dass ihr Funktionsgraph durch den Schwerpunkt $S = (\bar{x} \mid \bar{y})$ der Punktwolke verläuft.







5.2

Korrelation und *Kausalität* sind zwei Paar Schuhe. Ein paar Beispiele für tatsächliche Korrelationen:

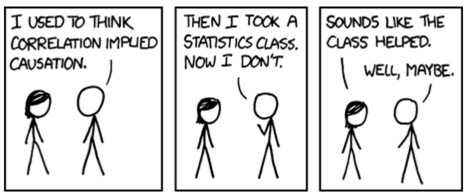
a) „Je mehr Feuerwehrpersonen zum Einsatz kommen, desto größer ist der Schaden.“

b) In veschiedenen Städten wird über mehrere Jahre die Storchpopulation und die Menschenpopulation verglichen: „Je mehr Störche beobachtet werden, desto größer ist die Population.“

c) „Je höher die Verkaufszahlen von Eis in Kalifornien, desto größer ist die Anzahl der Haiattacken.“

Was könnte jeweils ein Grund für die Korrelation sein? Nimm dazu Stellung.

Fazit: Bei Schlagzeilen und Studien immer kritisch bleiben.
Sind Ursache und Wirkung vertauscht?
Könnte es eine andere Ursache geben, die versteckt im Hintergrund mitspielt?
Oder ist die Korrelation vielleicht einfach Zufall?
Aus Korrelation folgt jedenfalls *nicht* automatisch ein kausaler Zusammenhang.



Quelle: https://xkcd.com/552

5.3

An einem Wahlabend werden Hochrechnungen für das Wahlergebnis veröffentlicht, bevor alle Wähler*innenstimmen fertig ausgezählt sind. Ein (vereinfachtes) Modell funktioniert so:

In der linken Tabelle sind die Ergebnisse der Nationalratswahl 2013 nach Bundesländern aufgeschlüsselt.
In der zweiten Spalte steht die Gesamtanzahl der gültigen Stimmen in diesem Bundesland. In der dritten Spalte steht, wie viel Prozent der gültigen Stimmen in diesem Bundesland für die ÖVP abgegeben wurden.

Die rechte Tabelle enthält einen Zwischenstand am Wahlabend der Nationalratswahl 2017.
6 der 9 Bundesländer sind fertig ausgezählt. Für das Burgenland, Niederösterreich und die Steiermark sind die Ergebnisse zu diesem Zeitpunkt noch nicht verfügbar.

Die Anzahl der gültigen Stimmen ist näherungsweise bekannt wegen der bekannten Anzahl der abgegebenen Stimmen.

Nationalratswahl 2013

Bundesland	Gültige Stimmen	ÖVP
Burgenland	188 384	26,8 %
Kärnten	316 006	15,2 %
Niederösterreich	1 013 998	30,6 %
Oberösterreich	839 400	25,4 %
Salzburg	286 606	26,7 %
Steiermark	723 158	20,9 %
Tirol	354 957	32,3 %
Vorarlberg	175 216	26,3 %
Wien	795 182	14,5 %

Nationalratswahl 2017

Bundesland	Gültige Stimmen	ÖVP
Burgenland	194 630	
Kärnten	340 788	26,8 %
Niederösterreich	1 079 539	
Oberösterreich	892 075	31,5 %
Salzburg	315 783	37,7 %
Steiermark	768 135	
Tirol	411 422	38,4 %
Vorarlberg	195 885	34,7 %
Wien	871 672	21,6 %

Es ist davon auszugehen, dass es in den einzelnen Bundesländern einen starken linearen Zusammenhang zwischen dem ÖVP-Wahlergebnis 2013 und dem ÖVP-Wahlergebnis 2017 gibt.

a) Erstelle mit den 6 vorhandenen Datenpunkten eine Gleichung der linearen Regressionsfunktion, die den Zusammenhang zwischen dem ÖVP-Wahlergebnis 2013 (x) und dem ÖVP-Wahlergebnis 2017 (y) beschreibt.

b) Berechne anhand der Regressionsfunktion eine Prognose, wie viel Prozent der gültigen Stimmen für die ÖVP in den verbleibenden 3 Bundesländern zu erwarten sind. „Hochrechnung“

c) Berechne, wie viel Prozent der gültigen Stimmen österreichweit bei der Nationalratswahl 2017 gemäß dieser Hochrechnung für die ÖVP zu erwarten sind.

5.4

Der Zusammenhang zwischen der Absprunggeschwindigkeit und der Sprungweite soll untersucht werden. Es wird vermutet, dass die Sprungweite linear von der Absprunggeschwindigkeit abhängt.
Es stehen folgende Messdaten zur Verfügung:

Absprunggeschwindigkeit in km/h	88,0	89,9	90,2	91,2	91,5	91,9	92,5
Sprungweite in m	110,0	112,5	113,7	115,8	116,6	118,7	120,0

1) Bestimmen Sie für diese Datenpaare eine Gleichung der linearen Regressionsfunktion.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

5.5

Bei hochwertigen Federgabeln (siehe nebenstehendes Foto) wird eine mit Luft gefüllte Kammer zur Federung verwendet. Der erforderliche Druck (in der Einheit psi) hängt von der Masse des Fahrers (in kg) ab (siehe nachstehende Tabelle).

Bildquelle: BMBWF

Masse des Fahrers in kg	55	70	80	90	100
erforderlicher Druck in psi	115	165	200	230	265

Der erforderliche Druck soll in Abhängigkeit von der Masse des Fahrers näherungsweise durch die lineare Funktion p beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion p auf.

Ein bestimmter Fahrer hat eine Masse von 82 kg.
Er berechnet einen Wert für den erforderlichen Druck durch lineare Interpolation mit den Werten der obigen Tabelle bei 80 kg und 90 kg. Den so erhaltenen Wert vergleicht er mit demjenigen Wert, der sich bei Verwendung der linearen Funktion p ergibt.

2) Ermitteln Sie die Differenz dieser beiden Werte.

5.6

In einer Schülergruppe wurden die jeweilige Lernzeit (in Minuten) und die erreichte Punktezahl bei einer Leistungsüberprüfung notiert:

Lernzeit in Minuten	20	34	27	18	16	23	32	22
erreichte Punktezahl	64	84	88	72	61	70	92	77

1) Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die erreichte Punktezahl soll in Abhängigkeit von der Lernzeit beschrieben werden.)

2) Interpretieren Sie die Steigung der Regressionsgeraden in diesem Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie mithilfe dieses Modells, welche Punktezahl man erwarten kann, wenn man 30 Minuten lernt.

5.7

In vielen sportlichen Disziplinen erreichen Athletinnen und Athleten neue Bestmarken und sind dabei oft extremen Belastungen ausgesetzt.
In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Marathon-Weltrekordzeit dargestellt.

Jahr	2002	2003	2007	2008	2011	2013	2014
Marathon-Weltrekordzeit in h:min:s	2:05:38	2:04:55	2:04:26	2:03:59	2:03:38	2:03:23	2:02:57

1) Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung derjenigen Regressionsfunktion, die die Marathon-Weltrekordzeit in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.

2) Ermitteln Sie anhand dieses Modells, in welchem Jahr voraussichtlich die Zwei-Stunden-Marke erreicht werden wird.

5.8

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends auf dem Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.
Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder die Mietpreise in Euro pro m^2 für Wohnungen bis zu 60 m^2 mit gutem Wohnwert erhoben:

Ende des Jahres ...	Mietpreis in Euro pro m^2
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Der Mietpreis in Euro pro m^2 soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 2003.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m^2 für das Ende des Jahres 2018.

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B.

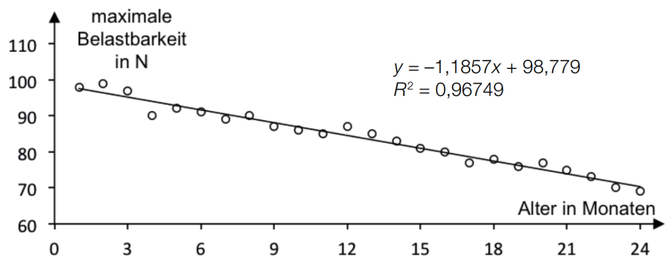
$$B(t) = 7{,}77 \cdot 1{,}035^t$$

$t \dots$ Zeit in Jahren ab Ende des Jahres 2003
$B(t) \dots$ Mietpreis zur Zeit t in Euro pro m^2

4) Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang.

5.9

Ein Unternehmen stellt verschiedene Bauteile her, die einer gewissen Belastung standhalten müssen. Die Belastung, der die Bauteile standhalten, ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ.
In einer Messreihe wurden Bauteile abhängig von ihrem Alter auf ihre maximale Belastbarkeit getestet (siehe nachstehende Abbildung). Anhand der Daten wurde eine lineare Regressionsfunktion erstellt.
Das Tabellenkalkulationsprogramm liefert statt des Korrelationskoeffizienten r sein Quadrat r^2 $(= R^2)$.



1) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r.

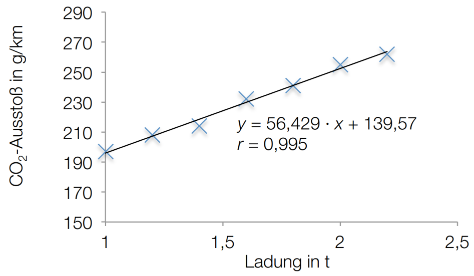
2) Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen dem Alter eines Bauteils und der maximalen Belastbarkeit.

Regressionsfunktionen werden mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate erstellt.

3) Erklären Sie diese Methode.

5.10

Die Firma Cargo-Car führt in der Entwicklungsphase eines neuen Transporters Tests durch. Bei der Auswertung einer Testreihe ergab sich nebenstehende Regressionsgerade y. Ein Mitarbeiter möchte die geschätzte CO_2-Emission bei einer Ladung von 1,5 Tonnen und bei einer Ladung von 2,5 Tonnen ermitteln.



1) Berechnen Sie die gesuchten Werte.

2) Interpretieren Sie den in der Grafik angegebenen Korrelationskoeffizienten r.

5.11

Wien betreibt das fünftgrößte Straßenbahnnetz weltweit und das fünftgrößte U-Bahn-Netz in der Europäischen Union. Seit 1995 steigt die Zahl der Passagiere ständig an.

Jahr	2002	2005	2008	2011
Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen	722,4	746,8	803,7	875,0

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\frac{875{,}0 - 722{,}4}{722{,}4} \approx 0{,}21$$

Es wird angenommen, dass der Zusammenhang zwischen der Zeit t in Jahren und der Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen pro Jahr näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.

3) Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für die Fahrgastzahl im Jahr 2018.

5.12

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt.
Die nebenstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.
Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall $[3; 7]$, so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

1) Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall $[3; 7]$.

2) Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

5.13

Nach der Ausbildung der inneren Organe verwendet man für das ungeborene Kind den Begriff Fötus.
Bei Ultraschalluntersuchungen wird die Scheitel-Steiß-Länge (SSL) von Föten bestimmt. In der nachstehenden Tabelle sind die durchschnittlichen Längen in Zentimetern (cm) in der jeweiligen Schwangerschaftswoche angegeben:

Schwangerschaftswoche	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SSL in cm	4,1	5,4	7,4	8,7	10,1	11,9	13,3	14,1	14,8	16,2

1) Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die Länge soll in Abhängigkeit von der Schwangerschaftswoche beschrieben werden.)

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang.

5.14

Die Marketingabteilung einer Handelskette möchte wissen, ob ihre Werbemaßnahmen wirken. Die Buchhaltung liefert Informationen über die monatlichen Umsätze. Die Umsätze von 10 aufeinanderfolgenden Monaten mit den entsprechenden Marketingausgaben liefern folgende Daten (Beträge in 1000 Euro):

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marketingausgaben	24	16	20	26	14	16	20	12	18	22
Umsatz	200	184	220	230	180	164	185	150	182	210

a) 1) Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen Marketingausgaben und Umsatz.

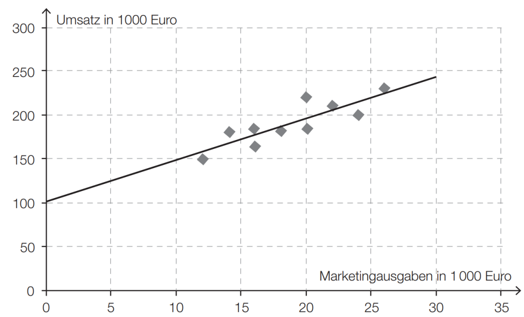
2) Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

b) 1) Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Regressionsgeraden, die den Umsatz in Abhängigkeit von den Marketingausgaben beschreibt.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im Hinblick auf den Umsatz und die Marketingausgaben.

c) In der Grafik sind die Datenpunkte und die dazugehörige Regressionsgerade dargestellt.

1) Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Umsatz ab, den die Handelskette bei Marketingausgaben von 10 000 € erwarten kann.



5.1 **a)** 0,1675 **b)** 0,1875 **c)** $S = (3{,}75 \mid 0{,}25)$ $f_3(3{,}75) = 0{,}25$ ✓

5.2 **a)** Ursache und Wirkung vertauscht: Je größer der Brand, desto größer der Schaden. Bei größeren Bränden kommen natürlich mehr Feuerwehrpersonen zum Einsatz. Sie richten aber nicht den Schaden an.

b) Ursache und Wirkung vertauscht: Je mehr Augen zur Beobachtung, desto mehr Störche werden entdeckt.

c) Andere Ursache: Hohe Temperaturen verursachen hohe Verkaufszahlen von Eis und viele Personen im Wasser.

5.3 **a)** $y = 0{,}8748... \cdot x + 0{,}1131...$ $(= 0{,}8748... \cdot x + 11{,}31...\,\%)$

b) Burgenland: 34,7... % Niederösterreich: 38,0... % Steiermark: 29,5... %

c) 31,7... %

5.4 **1)** $f(x) = 2{,}269... \cdot x - 90{,}57...$
x ... Absprunggeschwindigkeit in km/h
$f(x)$ ... Sprungweite bei einer Absprunggeschwindigkeit x in m

2) Steigt die Absprunggeschwindigkeit um 1 km/h, dann steigt die Sprungweite gemäß diesem Modell um rund 2,3 m.

5.5 **1)** $p(m) = 3{,}319... \cdot m - 67{,}25...$ (m ... Masse des Fahrers in kg, $p(m)$ ... Druck bei der Masse m in psi)

2) $(-)1{,}040...$ psi

5.6 **1)** $y = 1{,}496... \cdot x + 40{,}08...$

2) Pro Minute, die man länger lernt, erreicht man gemäß dem Modell um rund 1,5 Punkte mehr.

3) Gemäß dem Modell erhält man rund 85 Punkte, wenn man 30 Minuten lernt.

5.7 **1)** $y(t) = -0{,}003\,24... \cdot t + 2{,}089...$

2) Gemäß diesem linearen Modell wird im Jahr 2029/2030 die Zwei-Stunden-Marke erreicht werden.

5.8 **1)** $M(t) = 0{,}32 \cdot t + 7{,}69$ (Koeffizienten gerundet)

2) Die Mietpreise pro m^2 sind im angegebenen Zeitraum um durchschnittlich rund € 0,32 pro Jahr angestiegen.

3) Gemäß diesem Modell beträgt der Mietpreis pro m^2 am Ende des Jahres 2018 rund € 12,45.

4) Der Änderungsfaktor 1,035 gibt an, dass die Mietpreise pro m^2 jährlich um 3,5 % steigen.

5.9 **1)** Korrelationskoeffizient: $r \approx -0{,}9836$

2) Im gemessenen Bereich lässt der Korrelationskoeffizient einen starken linearen Zusammenhang zwischen dem Alter der Bauteile und der Belastbarkeit vermuten.

3) Methode der kleinsten Quadrate:
Die Gerade wird so aufgestellt, dass die Summe der quadrierten vertikalen Abstände der Messwerte zur Gerade minimal ist.

5.10 **1)** Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 1,5 t beträgt 224,2... g/km.
Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 2,5 t beträgt 280,6... g/km.

2) Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}995$ liegt sehr nahe bei 1. Das bedeutet, dass der Zusammenhang sehr gut durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. Das positive Vorzeichen deutet auf einen steigenden Trend.

5.11 **1)** Die Fahrgastzahl der Wiener Linien im Jahr 2011 ist um rund 21 % größer als jene im Jahr 2002.

2) $f(t) = 17{,}15... \cdot t + 709{,}7...$

3) 984,2... Millionen Fahrgäste im Jahr 2018

5.12 **1)** $V(t) = 348{,}1 \cdot t - 396{,}5$ t ... Zeit in Wochen $V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

2) In diesem Zeitraum werden nach diesem Modell pro Woche rund 348 Stück verkauft.

5.13 **1)** $y = 1{,}36 \cdot x - 10{,}42$

2) Gemäß dem Modell nimmt die Scheitel-Steiß-Länge durchschnittlich rund 1,36 cm pro Woche zu.

5.14 **a)** $r \approx 0{,}86$
Die gegebenen Daten lassen einen positiven linearen Zusammenhang zwischen Marketingausgaben und Umsatz vermuten.

b) $y = 4{,}786 \cdot x + 100{,}523$ Steigen die Marketingausgaben um 1000 €, dann steigt der Umsatz um ca. 4786 €.

c) ca. 150 000 €

6. Nichtlineare Regression & Ausgleichsfunktionen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Interpolation und Regression

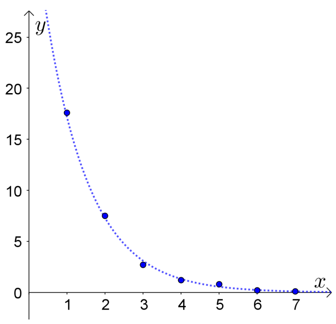
6.1

Wie wird eine *exponentielle* Ausgleichsfunktion berechnet?
Jede Exponentialfunktion $y(x) = a \cdot b^x$ kann durch Logarithmieren in eine lineare Funktion umgewandelt werden. Verwende dazu die Rechenregeln für Logarithmen:

$$\ln(y) = \ln(a \cdot b^x) = \boxed{}$$

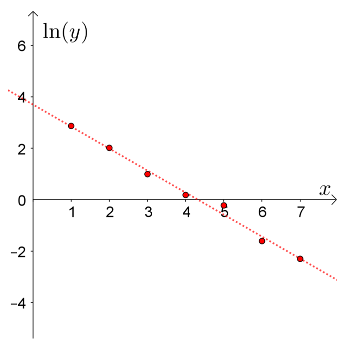
Es gilt also $\ln(y) = k \cdot x + d$ mit $k = \boxed{}$ und $d = \boxed{}$.

Zeichnet man im Koordinatensystem statt allen Wertepaaren $(x \mid y)$ der Exponentialfunktion die Wertepaare $(x \mid \ln(y))$ ein, dann liegen die Punkte also auf einer Gerade.



Die links dargestellten Punkte $(x \mid y)$ liegen näherungsweise auf dem Graphen einer Exponentialfunktion.

Deshalb liegen die rechts dargestellten Punkte $(x \mid \ln(y))$ näherungsweise auf dem Graphen einer linearen Funktion.



x	y	$\ln(y)$
1	17,6	
2	7,5	
3	2,7	
4	1,2	
5	0,8	
6	0,2	
7	0,1	

1) Trage die logarithmierten y-Werte links in der Tabelle ein.

2) Ermittle die lineare Ausgleichsfunktion für die Punkte $(x \mid \ln(y))$.

$$\ln(y) = \boxed{}$$

Methode der kleinsten Quadrate

3) Rechne „e hoch“ auf beiden Seiten und stelle mithilfe der Rechenregeln für Potenzen die Gleichung in der Form $y = c \cdot e^{-k \cdot x}$ dar:

$$y = \boxed{}$$

$e^{\ln(y)} = y$

4) Ermittle zur Kontrolle die exponentielle Ausgleichsfunktion mit Technologieeinsatz.

Es wird also wieder die Summe der quadratischen vertikalen Abstände minimiert. Allerdings werden die quadratischen Abstände von den logarithmierten Werten zur Ausgleichsgerade minimiert.

6.2

Ein Getränk mit einer Temperatur von 12 °C wird aus dem Kühlschrank genommen.
Die Temperatur wird alle 15 Minuten gemessen und über einen Zeitraum von 3 Stunden aufgezeichnet:

Zeit in min	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
Temperatur in °C	12,0	14,5	16,2	17,6	19,0	20,1	20,9	21,7	22,5	23,2	23,7	24,1	24,2

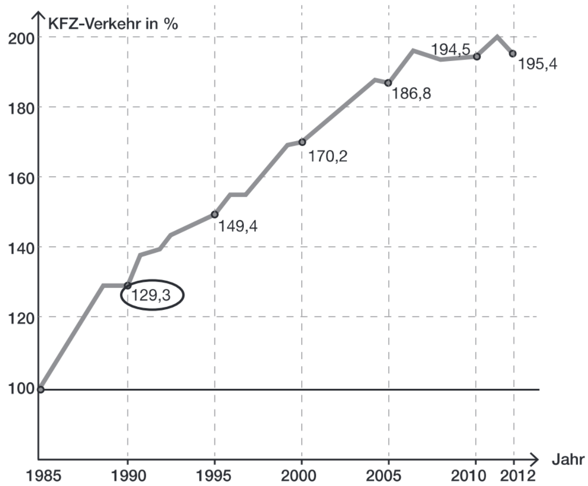
Die Umgebungstemperatur ist (nahezu) konstant bei $T_U = 26{,}1\,°\text{C}$.
Gesucht ist eine Funktion T, die die Temperatur in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t modelliert.
Nach dem Newtonschen Abkühlungs-/Erwärmungsgesetz ist die momentane Änderungsrate der Temperatur direkt proportional zur Differenz zwischen der Umgebungstemperatur und der momentanen Temperatur.
Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist $T(t) = 26{,}1 + c \cdot e^{k \cdot t}$ mit $c, k < 0$.
Die Funktion $f(t) = T(t) - 26{,}1 = c \cdot e^{k \cdot t}$ ist also eine Exponentialfunktion.

a) Verwende die Messwerte, um die exponentielle Ausgleichsfunktion f zu ermitteln. $y = \text{Temperatur} - 26{,}1$
Berechne daraus eine Gleichung der Funktion T.

b) Nach wie viel Minuten ist in diesem Modell die Differenz zur Umgebungstemperatur nur mehr 1 °C?

6.3

Das Verkehrsaufkommen wird seit vielen Jahren statistisch erfasst.
Die Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.



1) Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang.

2) Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$.

3) Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013.

6.4

In der nachstehenden Tabelle ist die jeweilige momentane Änderungsrate des Atemvolumens $V'(t)$ in Litern pro Sekunde zu bestimmten Zeitpunkten t einer Atmungsphase einer Person angegeben.

t in s	0,0	0,5	1,5	2,5	3,0
$V'(t)$ in L/s	0,00	0,33	0,49	0,29	0,00

1) Stellen Sie die Messpunkte in einem Koordinatensystem dar.

2) Ermitteln Sie für diese Atmungsphase eine quadratische Ausgleichsfunktion.

3) Begründen Sie, warum es sich bei diesem Vorgang um eine Einatmungsphase handelt.

6.5

In der nachstehenden Tabelle sind die jährlichen Neuzulassungen von benzinbetriebenen Personenkraftwagen (PKW) in Österreich in den Jahren 1999 bis 2009 dargestellt.

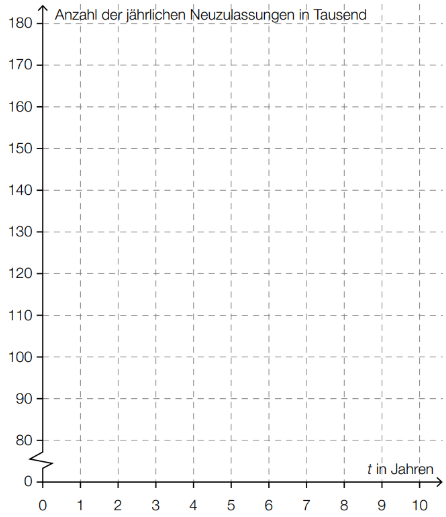
t in Jahren (*t* = 0 entspricht dem Jahr 1999)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der jährlichen Neuzulassungen in Tausend	134	118	101	85	86	91	108	116	120	132	171

(Quelle: STATISTIK AUSTRIA, gerundete Werte http://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/strasse/kraftfahrzeuge_-_neuzulassungen/index.html [22.03.2016])

1) Stellen Sie im Diagramm den Graphen derjenigen quadratischen Regressionsfunktion dar, der die Anzahl der jährlichen Neuzulassungen in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

Im Jahr 2010 wurden 160 000 benzinbetriebene PKW neu zugelassen.

2) Berechnen Sie, wie groß die prozentuelle Abweichung der mithilfe der Regressionsfunktion aufgestellten Prognose vom tatsächlichen Wert ist.



6.6

Ein Thermistor oder Heißleiter ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand R mit zunehmender Temperatur T abnimmt. Für einen bestimmten Heißleiter wurden nebenstehende Werte gemessen. Zur weiteren Auswertung wird eine Polynomfunktion 3. Grades als Ausgleichsfunktion verwendet.

T in K	*R* in Ω
293	510
313	290
333	178
353	120
373	80

1) Ermitteln Sie diese Ausgleichsfunktion.

6.7

An einem Tag im Oktober hat man einen Temperaturverlauf gemessen, der durch eine Polynomfunktion 3. Grades f mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden kann.

t . . . Zeit nach Mitternacht in Stunden

$f(t)$ . . . Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

t	2	5	8	11	14	17	20	23
f(*t*)	5,4	4,3	8,3	12,2	15,3	14	9,1	7,2

1) Erstellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine zu den angegebenen Werten passende Polynomfunktion 3. Grades. (Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.)

2) Berechnen Sie den Differenzenquotient dieser Polynomfunktion für das Intervall $[6; 12]$.

3) Beschreiben Sie, was dieser Differenzenquotient für das Intervall im Sachzusammenhang aussagt.

6.8

Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Anzahl der Bakterien	110	120	156	185	190	245	274	340	360	430

1) Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung näherungsweise beschreibt.

2) Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1000 Bakterien zu erwarten sind.

6.1 $\ln(y) = \ln(a) + x \cdot \ln(b)$, also eine Gerade $y = k \cdot x + d$ mit Steigung $k = \ln(b)$ und $d = \ln(a)$.

x	y	$\ln(y)$
1	17,6	2,867...
2	7,5	2,014...
3	2,7	0,993...
4	1,2	0,182...
5	0,8	−0,223...
6	0,2	−1,609...
7	0,1	−2,302...

$\ln(y) = -0{,}856\ldots \cdot x + 3{,}699\ldots$

$y = 40{,}44\ldots \cdot e^{-0{,}856\ldots \cdot x}$

6.2 **a)** $f(t) = -14{,}11\ldots \cdot e^{-0{,}011\,49\ldots \cdot t}$ $T(t) = 26{,}1 - 14{,}11\ldots \cdot e^{-0{,}011\,49\ldots \cdot t}$ **b)** nach 230,3... min

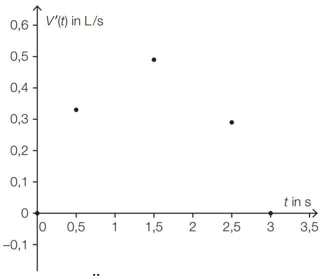
6.3 **1)** 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

2) $r(t) = -0{,}0939\ldots \cdot t^2 + 6{,}114\ldots \cdot t + 99{,}93\ldots$

3) $r(28) = 197{,}4\ldots\,\%$

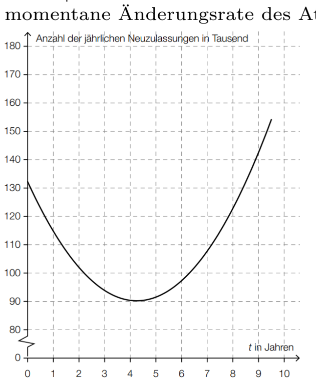
Die Regressionsfunktion prognostiziert für 2013 ein KFZ-Verkehrsaufkommen, das um rund 97,4 % größer ist als 1985.

6.4 **1)**



2) $V'(t) = -0{,}22 \cdot t^2 + 0{,}67 \cdot t + 0{,}018$ **3)** Es handelt sich um eine Einatmungsphase, weil die momentane Änderungsrate des Atemvolumens im betrachteten Intervall immer positiv ist.

6.5



Die Prognose ist um 22,4... % größer als der tatsächliche Wert.

6.6 $P(T) = -9{,}073\ldots \cdot 10^{-4} \cdot T^3 + 0{,}9780\ldots \cdot T^2 - 353{,}2\ldots \cdot T + 4{,}286\ldots \cdot 10^4$

6.7 **1)** $f(t) = -0{,}0057 \cdot t^3 + 0{,}1446 \cdot t^2 - 0{,}2598 \cdot t + 4{,}4186$

2) Differenzenquotient: 0,9138... °C/h

3) Der Differenzenquotient sagt aus, dass die Temperatur im Intervall [6; 12] pro Stunde durchschnittlich um rund 0,91 °C zunimmt.

6.8 **1)** $f(t) = 69{,}43\ldots \cdot e^{0{,}030\,65\ldots \cdot t} = 69{,}43\ldots \cdot 1{,}0311\ldots^t$

$t\ldots$ Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten $f(t)\ldots$ Bakterienanzahl zur Zeit t

2) Rund 87 Minuten nach Beginn der Beobachtung sind 1000 Bakterien zu erwarten.