Mathematik macht Freu(n)de

Dr. Lukas Riegler
Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair

11. Dezember 2019

Ablauf der Fortbildung

Mathematik macht Freu(n)de ...

- ... gibt es seit März 2016.
- ... ist ein leidenschaftliches „Hobby-Projekt“.
- ... ist LehrerInnenbildung.
- ... führt verschiedene Problemfelder lösungsorientiert zusammen.
- ... hat 2018 über 1600 Jugendliche intensiv begleitet.
- ... erreicht mit seinen Materialien Schülerinnen und Schüler in ganz Österreich.
- ... verbindet Schule und Hochschule.

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

MmF für Studierende im UF Mathematik

- Lehrveranstaltung
- Intensiv-Studienclubs
- Vorkurs Mathematik
- StEOP-Tutorien
- Kompetenzmaterialien
- Akademie

Weitere Informationen: mmf.univie.ac.at

Nächster Termin in den Semesterferien:

- Mo., 3.2.2020 - Fr., 7.2.2020
  - PH NÖ, Campus Baden (9-13 Uhr)
    für AHS (12. Schulstufe)
  - Universität Wien, Fakultät für Mathematik (9-13 Uhr)
    für AHS (ab 11. Schulstufe)
  - Universität Wien, Fakultät für Mathematik (14-18 Uhr)
    für BHS (13. Schulstufe)
- Betreuungsverhältnis 1:6 oder besser
- Kostenbeitrag: 140 €
- Anmeldung bis 26.1. online unter mmf.univie.ac.at

MmF für SchülerInnen

- Intensiv-Studienclubs
- Kompetenzmaterialien
- Mathematik-Olympiade
- NÁBOJ

Weitere Informationen: mmf.univie.ac.at

MmF für StudienanfängerInnen

- Vorkurs Mathematik
- StEOP-Tutorien
- Kompetenzmaterialien

Weitere Informationen: mmf.univie.ac.at

MmF für Lehrpersonen

- Fortbildungen
- Kompetenzmaterialien
- Akademie
- Newsletter

Weitere Informationen: mmf.univie.ac.at

Kompetenzmaterialien

- seit 2016 in laufender Entwicklung
- Themenbereiche der Sekundarstufe II
- Orientierung an SRDP-Aufgaben

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

- Praxiserprobung
  - MmF-Förderformate
  - Schulunterricht
- Uneingeschränkter, kostenloser Download
  mmf.univie.ac.at/materialien
- Creative Commons Lizenz

Themenbereiche

Funktionen & Analysis

- Lineare Funktionen
- Quadratische Funktionen & Polynomfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Funktionen & Eigenschaften

Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik

- Folgen und Reihen
- Finanzmathematik
- Statistik
- Wahrscheinlichkeitsrechnung

Algebra & Geometrie

- Termrechnung
- Trigonometrie
- Vektorrechnung & Komplexe Zahlen

In Planung:

- Aussagenlogik & Mengenlehre

Arbeitsblätter / Technologieblätter / Übungsblätter

- 52 Arbeitsblätter (AB)
- 4 Technologieblätter (TB)
- 7 Übungsblätter (UB)

- Unterrichtsgestaltung
- Ausarbeitungen
- Effizienz
- Weiterentwicklung

Fallbeispiel: Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden

Weitere Informationen auf der FAQ-Seite zu den Kompetenzmaterialien

Kompetenzhefte

- 24 Kompetenzhefte (KH)
- Typischer Aufbau der Kompetenzhefte
  - SRDP-Aufgaben
  - Struktur, Erklärungen, zugehörige Materialien
  - Weitere Aufgabenstellungen
- Zielgruppen

Fallbeispiel: Kompetenzheft – Lineare Funktionen

Weitere Informationen auf der FAQ-Seite zu den Kompetenzmaterialien

Modularer Aufbau

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Sprechweise: „*a hoch n*“ oder manchmal die „*n-te Potenz von a*“

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Potenzen von Hand berechnen

Berechne ohne Taschenrechner.

1) $2^3 =$ ____ **2)** $3^2 =$ ____ **3)** $5^1 =$ ____ **4)** $1^5 =$ ____ **5)** $0^2 =$ ____ **6)** $(-1)^3 =$ ____

Rechenregeln für Potenzen

$m, n \in \mathbb{N}$

Die folgenden Rechenregeln gelten für alle natürlichen Exponenten.
Überprüfe die Rechenregeln, wenn $n = 3$ und $m = 2$ ist.

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

4) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

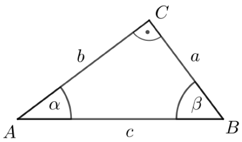
Was kann ich verstehen? **Was soll ich lernen?**

Modularer Aufbau

- „Es ist, was es ist. Das muss ich lernen.“
- „Das kann ich verstehen und erklären.“
- „Hier soll ich aktiv werden.“
- „Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“
- „Hier kommt ein Kochrezept.“
- „Diese Formel finde ich in der Formelsammlung.“
- „In diese Falle tappe ich nicht.“
- „Hier kann ich mich herausfordern.“
- „Hier kann ich eine mathematische Idee nachvollziehen.“

Winkelfunktionen

Die Kathete $\boldsymbol{a}$ liegt gegenüber von α. Sie heißt deshalb **Gegenkathete von $\boldsymbol{\alpha}$**.
Die Kathete $\boldsymbol{b}$ liegt am Winkel α an. Sie heißt deshalb **Ankathete von $\boldsymbol{\alpha}$**.
Die **Winkelfunktionen Sinus**, **Cosinus** und **Tangens** ordnen jedem Winkel α mit $0° < \alpha < 90°$ ein Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α zu:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$ „Sinus von α“

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$ „Cosinus von α“

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b}$$ „Tangens von α“

Arbeitsblatt – Ähnlichkeit und Winkelfunktionen

Funktion f	Ableitungsfunktion f'
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

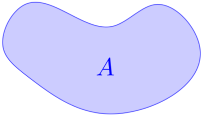
Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ mit $g(x) \neq 0$
Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

SRDP-Formelsammlung

Kompetenzheft – Differenzieren I

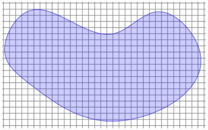
Kurvige Figuren und ihre Fläche



Wir interessieren uns für den Flächeninhalt A der links dargestellten Figur.

Die Formelsammlung hilft nicht.

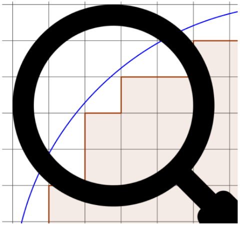
Rechts haben wir ein Raster auf die Figur gelegt. Wie bringt uns das weiter?



Unter der Lupe

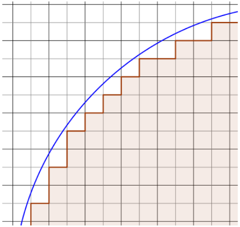
MATHEMATIK macht FREU(N)DE

In den folgenden Bildern liegt immer derselbe Kreisausschnitt unter der Lupe:



Links siehst du ein grobes Raster. Wir haben die Quadrate für die Berechnung der Untersumme markiert.

Rechts ist das Raster verfeinert. Markiere die Quadrate, die wir in diesem feineren Raster zur Berechnung der Untersumme verwenden.



Die Untersumme im feineren Raster ist größer als die Untersumme im groben Raster.

Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration

Minus mal minus

Gegeben ist die Funktion f mit

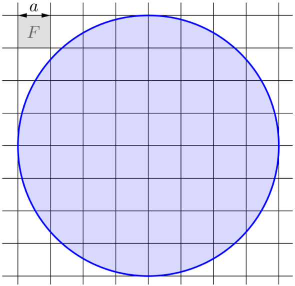
$$f(x) = (x-1)^2 - 4.$$

An welcher Stelle x hat die Funktion ihren *kleinsten* Funktionswert? Wie groß ist dieser Funktionswert?

Quadratur des Kreises?!

Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.
Die Seitenlänge a eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster unten ist $a =$ ________ cm.

Der Flächeninhalt F eines einzelnen Quadrats im Raster ist $F =$ ____________ cm^2.



Die Quadrate im Raster, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt U.

$U =$ ____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

U steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt O.

$O =$ ____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

O steht für **Obersumme**.

Der Flächeninhalt A des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme:

____ $\leq A \leq$ ____

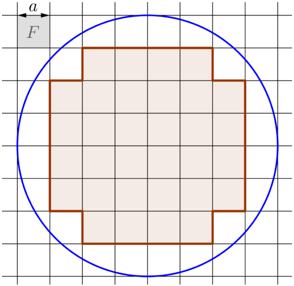
Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?

Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration

Quadratur des Kreises?!

Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.
Die Seitenlänge a eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster unten ist $a =$ __________ cm.

Der Flächeninhalt F eines einzelnen Quadrats im Raster ist $F =$ __________ cm^2.



Die Quadrate im Raster, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt U.

$U = 32 \cdot F =$ __________ cm^2

U steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt O.

$O = 60 \cdot F =$ __________ cm^2

O steht für **Obersumme**.

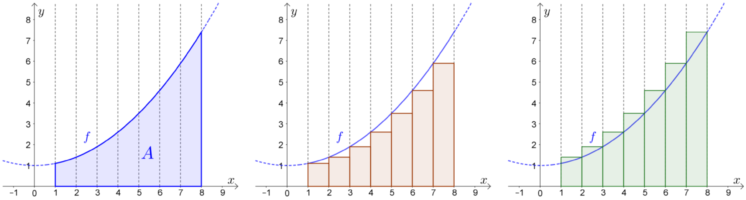
Der Flächeninhalt A des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme:

$U \leq A \leq O$

Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?

Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Den Flächeninhalt eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



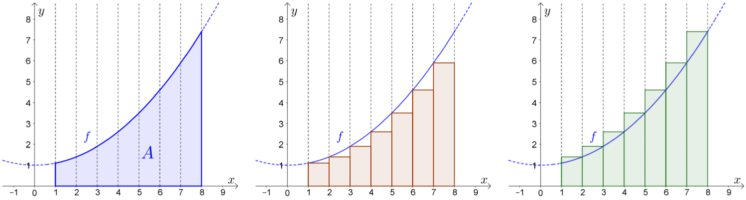
Wie groß ist der Flächeninhalt A also mindestens? Wie groß ist der Flächeninhalt A also höchstens?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

__________ $\leq A \leq$ __________

Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Den Flächeninhalt eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



Wie groß ist der Flächeninhalt A also mindestens? Wie groß ist der Flächeninhalt A also höchstens?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1,1	1,4	1,9	2,6	3,5	4,6	5,9	7,4

$$1{,}1 \cdot 1 + 1{,}4 \cdot 1 + \cdots + 5{,}9 \cdot 1 = 21 \leq A \leq 27{,}3 = 1{,}4 \cdot 1 + 1{,}9 \cdot 1 + \cdots + 7{,}4 \cdot 1$$

Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration

Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ ist

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \binom{v_1}{v_2} \cdot \binom{w_1}{w_2} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2.$$

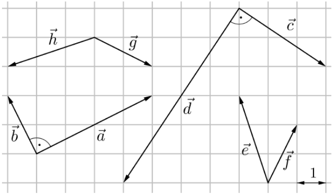
Skalarprodukt und Winkel

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$\vec{c} \cdot \vec{d} =$

$\vec{e} \cdot \vec{f} =$

$\vec{g} \cdot \vec{h} =$



Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Idee?

Arbeitsblatt – Vektorrechnung in der Ebene

„Hier soll ich aktiv werden."

Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ ist

$$\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = \binom{v_1}{v_2} \cdot \binom{w_1}{w_2} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2.}$$

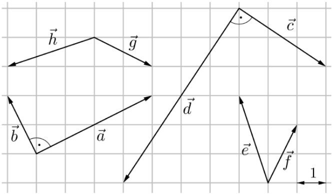
Skalarprodukt und Winkel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \binom{4}{2} \cdot \binom{-1}{2} = -4 + 4 = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \binom{3}{-2} \cdot \binom{-4}{-6} = -12 + 12 = 0$$

$$\vec{e} \cdot \vec{f} = \binom{-1}{3} \cdot \binom{1}{2} = -1 + 6 = 5$$

$$\vec{g} \cdot \vec{h} = \binom{2}{-1} \cdot \binom{-3}{-1} = -6 + 1 = -5$$



Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Idee?

Seiten-Seiten-Winkel-Satz

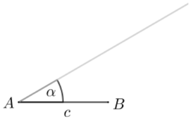
Zwei Seitenlängen a und $c = 8\,\text{cm}$ und ein ***nicht*** **eingeschlossener Winkel** $\alpha = 30°$ sind bekannt.

Dann beginnen wir die Konstruktion folgendermaßen:

1) Seite AB mit Länge c konstruieren.

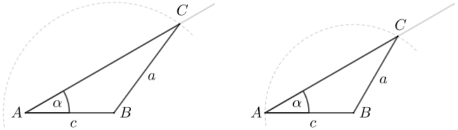
2) Strahl von Punkt A mit Winkel α konstruieren.

3) Kreis mit Radius a im Punkt B konstruieren.



Die Anzahl der Lösungen hängt von der Seitenlänge a ab.

- Wenn a mindestens so lang wie c ist, dann gibt es genau eine Lösung:



- Wenn a kürzer als c ist, dann gibt es zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung:

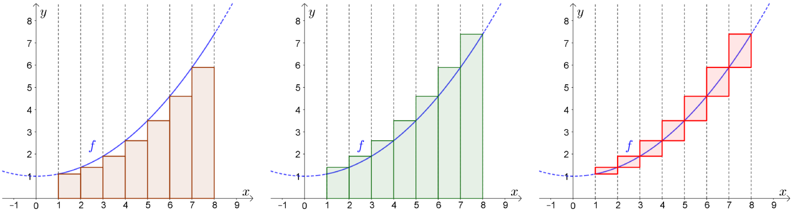
Arbeitsblatt – Dreieckskonstruktionen

„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“

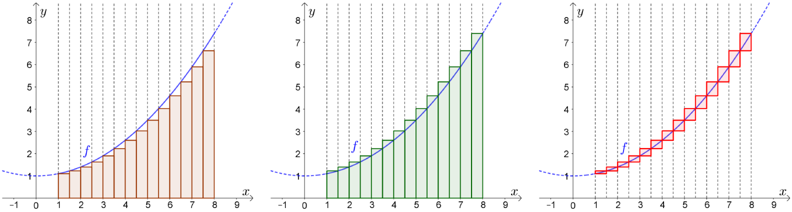
Verfeinerung

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

Die **Untersumme** im linken Bild ist $U = 21$. Die **Obersumme** im mittleren Bild ist $O = 27{,}3$.
Die Gesamtfläche der gefärbten „Fehlerrechtecke“ im rechten Bild ist $E =$ ________________ . *Error*



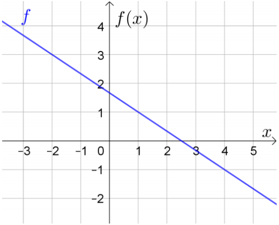
Wir verfeinern die Zerlegung, indem wir die Breite aller Rechtecke halbieren:



Ob wir wohl den Gesamtfehler beliebig klein machen können?

Funktionsgraph → Funktionsgleichung

Rechts ist der Graph einer linearen Funktion f dargestellt.
Eine Funktionsgleichung von f kannst du mit den folgenden Schritten aufstellen:



1) Suche 2 Punkte am Graphen, deren Koordinaten du exakt ablesen kannst. Zeichne das zugehörige Steigungsdreieck ein.

2) Berechne die Steigung k mit dem Differenzenquotienten.

3) Setze die Koordinaten von einem Punkt $(x \mid f(x))$ in die Gleichung $f(x) = k \cdot x + d$ ein. Forme die Gleichung auf d um.

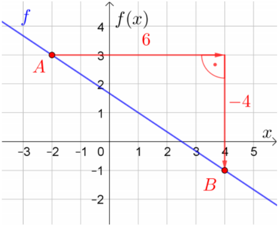
4) Eine Funktionsgleichung von f ist also $f(x) =$ __________________ .

Funktionsgraph → Funktionsgleichung

Rechts ist der Graph einer linearen Funktion f dargestellt.
Eine Funktionsgleichung von f kannst du mit den folgenden Schritten aufstellen:

1) Suche 2 Punkte am Graphen, deren Koordinaten du exakt ablesen kannst. Zeichne das zugehörige Steigungsdreieck ein.

$A = (-2 \mid 3) \quad B = (4 \mid -1)$



2) Berechne die Steigung k mit dem Differenzenquotienten.

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

3) Setze die Koordinaten von einem Punkt $(x \mid f(x))$ in die Gleichung $f(x) = k \cdot x + d$ ein. Forme die Gleichung auf d um.

$$3 = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + d \quad \Longrightarrow \quad d = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

4) Eine Funktionsgleichung von f ist also $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{5}{3}$.

Quadratisches Ergänzen MATHEMATIK macht FREU(N)DE

Bei Gleichungen der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hilft quadratisches Ergänzen weiter.
Rechts sind die zielführenden Umformungen allgemein durchgeführt.
Führe links die gleichen Umformungen für $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ durch.

$x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$	$x^2 + p \cdot x + q = 0$
$x^2 + 2 \cdot x = 15$	$x^2 + p \cdot x = -q$
$(x+1)^2 - 1^2 = 15$	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q$
$(x+1)^2 = 16$	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$x + 1 = \pm\sqrt{16}$	$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$x = -1 \pm 4$	$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

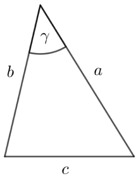
Die quadratische Gleichung $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ hat also die zwei Lösungen 3 und -5.

Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen

Cosinussatz

Cosinussatz: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)}$

Merke: „Pythagoras mit Korrekturterm -2 mal Seite mal Seite mal Cosinus von eingeschlossenem Winkel.“

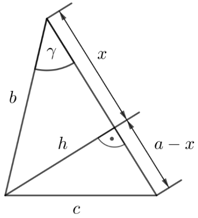


Spezialfall: $\gamma = 90°$

$\Longrightarrow \cos(\gamma) =$ ________

$\Longrightarrow c^2 =$ __________

Erklärung: Die eingezeichnete Höhe teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.
Führe die folgenden 4 Schritte durch:



$c^2 =$ [ ] $=$ (Pythagoras: Unteres Dreieck)

$=$ [ ] $=$ (Binomische Formel)

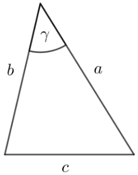
$=$ [ ] $=$ (Pythagoras: Oberes Dreieck)

$=$ [ ] (Cosinus: Oberes Dreieck)

Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck

Cosinussatz: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)}$

Merke: „Pythagoras mit Korrekturterm -2 mal Seite mal Seite mal Cosinus von eingeschlossenem Winkel.“

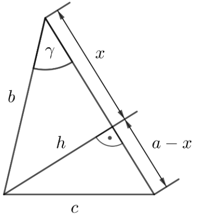


Spezialfall: $\gamma = 90°$

$\implies \cos(\gamma) = 0$

$\implies c^2 = a^2 + b^2$

Erklärung: Die eingezeichnete Höhe teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.
Führe die folgenden 4 Schritte durch:



$$
\begin{aligned}
c^2 &= h^2 + (a-x)^2 = && \text{(Pythagoras: Unteres Dreieck)}\\
&= h^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot x + x^2 = && \text{(Binomische Formel)}\\
&= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot x = && \text{(Pythagoras: Oberes Dreieck)}\\
&= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) && \text{(Cosinus: Oberes Dreieck)}
\end{aligned}
$$

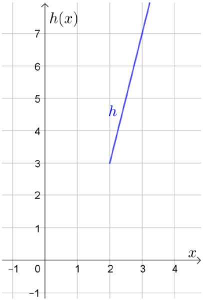
Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck

Schnittpunkt mit senkrechter Achse

Rechts ist der Graph der linearen Funktion h mit

$$h(x) = k \cdot x + d$$

für $x \geq 2$ dargestellt. Ermittle d.



Warum gelten die folgenden Ableitungsregeln?

- $a(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Longrightarrow \quad a'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $b(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Longrightarrow \quad b'(x) = (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
- $c(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
- $d(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad d'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

Hinweis: $(a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) = a^3 - b^3$

„Hier kann ich eine math. Idee nachvollziehen.“

- Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.
- Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleich mächtig.
- Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind *nicht* gleich mächtig.
- Die Winkelsumme im n-Eck ist $(n-2) \cdot 180°$.
- Satz von Thales
- Peripheriewinkelsatz

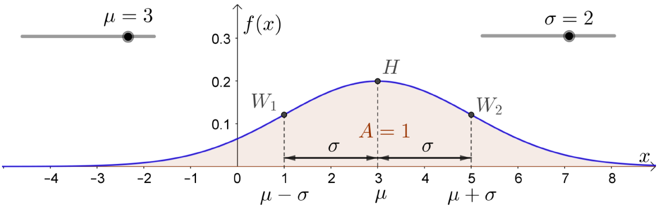
$\vdots$

Ablauf der Fortbildung

1. Kopien des Arbeitsblatts ausdrucken
2. PDF zum Arbeitsblatt projizieren
3. Erarbeitung in kurzen Unterrichtssequenzen
4. Ergebnissicherung mit Ausarbeitung (PDF)

Weitere Informationen auf der FAQ-Seite zu den Kompetenzmaterialien

Fallbeispiel: AB – Normalverteilung (Ausarbeitung)



Gruppenarbeit

1. **Lineare Funktionen**
   - KH – Lineare Funktionen
   - AB – Geradengleichungen
   - AB – Lineare Funktionen
   - AB – Steigungsmessung von Geraden
2. **Wahrscheinlichkeitsrechnung**
   - KH – Stochastik I
   - AB – Laplace-Experimente
   - AB – Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume
   - AB – Zufallsvariablen
3. **Technologieeinsatz**
   - GeoGebra-Kompendium

Ablauf der Fortbildung

Funktionen & Analysis

- Lineare Funktionen
- Quadratische Funktionen & Polynomfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Funktionen & Eigenschaften

Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik

- Folgen und Reihen
- Finanzmathematik
- Statistik
- Wahrscheinlichkeitsrechnung

Algebra & Geometrie

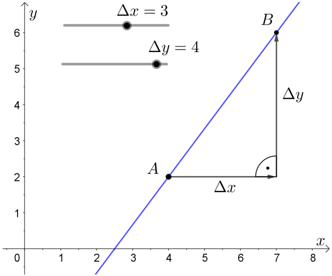
- Termrechnung
- Trigonometrie
- Vektorrechnung & Komplexe Zahlen

In Planung:

- Aussagenlogik & Mengenlehre

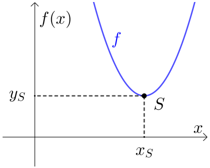
Lineare Funktionen

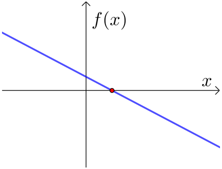
- KH – Lineare Funktionen
- AB – Geradengleichungen
- AB – Lineare Funktionen
- AB – Steigungsmessung von Geraden

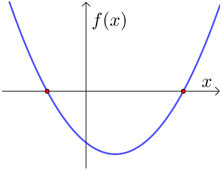


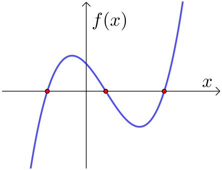
Quadratische Funktionen & Polynomfunktionen

- KH – Quadratische Funktionen
- AB – Quadratische Funktionen
- AB – Quadratische Gleichungen
- AB – Linearfaktoren
- AB – Polynomfunktionen

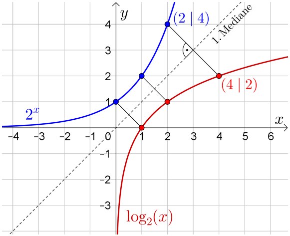


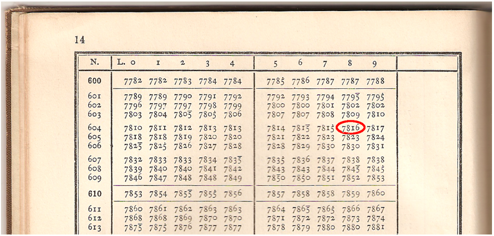






- KH – Exponential- und Logarithmusfunktionen
- AB – Exponentialfunktionen
- AB – Logarithmusfunktionen





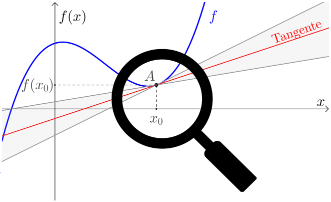
14

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	7782	7782	7783	7784	7784	$778\dot{5}$	7786	7787	7787	7788
601	7789	7789	7790	7791	7792	7792	7793	7794	$779\bar{5}$	$779\dot{5}$
602	7796	7797	7797	7798	7799	7800	7800	7801	7802	7802
603	7803	7804	$780\bar{5}$	$780\dot{5}$	7806	7807	7807	7808	7809	7810
604	7810	7811	7812	7813	7813	7814	$781\bar{5}$	$781\dot{5}$	7816	7817
605	7818	7818	7819	7820	7820	7821	7822	7823	7823	7824
606	$782\bar{5}$	$782\dot{5}$	7826	7827	7828	7828	7829	7830	7830	7831
607	7832	7833	7833	7834	$783\bar{5}$	$783\dot{5}$	7836	7837	7838	7838
608	7839	7840	7840	7841	7842	7843	7843	7844	$784\bar{5}$	$784\dot{5}$
609	7846	7847	7848	7848	7849	$78\bar{5}0$	$78\dot{5}0$	7851	7852	7853
610	7853	7854	$785\bar{5}$	$785\dot{5}$	7856	7857	7858	7858	7859	7860
611	7860	7861	7862	7863	7863	7864	$786\bar{5}$	$786\dot{5}$	7866	7867
612	7868	7868	7869	7870	7870	7871	7872	7872	7873	7874
613	$787\bar{5}$	$787\dot{5}$	7876	7877	7877	7878	7879	7880	7880	7881

In Planung:

- AB - Logarithmische Skalierung

Differentialrechnung

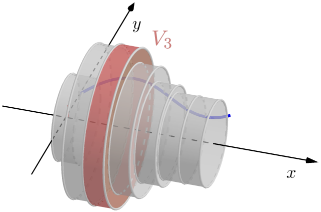


- KH – Differenzieren I
- KH – Differenzieren II
- KH – Stammfunktionen
- AB – Ableitungen höherer Ordnung
- AB – Differentialquotient
- AB – Funktionen in mehreren Variablen
- AB – Mittelwertsatz der Differentialrechnung
- AB – Newtonsches Näherungsverfahren
- AB – Optimierungsaufgaben
- AB – Stammfunktionen
- TB – Kurvenuntersuchungen
- TB – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

In Planung:

- KH – Differentialgleichungen

Integralrechnung



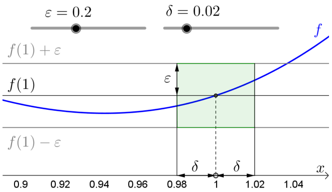
- KH – Integrieren I
- KH – Integrieren II
- KH – Integrieren III
- AB – Bestimmtes Integral
- AB – Bogenlänge
- AB – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- AB – Kulturtechnik Integration
- AB – Mittelwertsatz der Integralrechnung
- AB – Physikalische Anwendungen der Diff.- und Int.rechnung
- AB – Rotationsvolumen

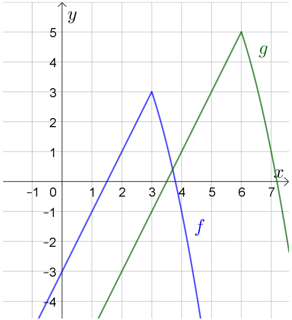
In Planung:

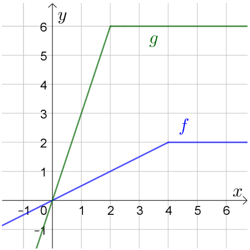
- KH – Differentialgleichungen

Funktionen

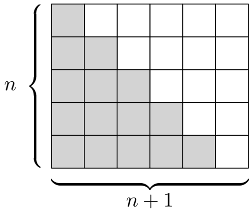
- AB – Funktionen
- AB – Funktionsgraphen
- AB – Stetigkeit

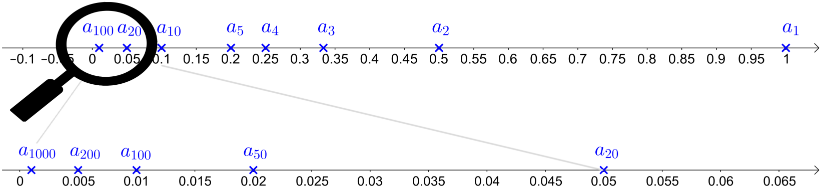






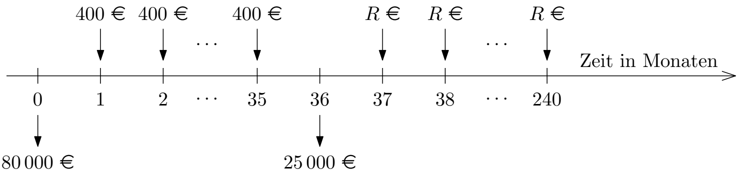
- KH – Folgen und Reihen
- KH – Grenzwerte
- AB – Grenzwerte





Finanzmathematik

- KH – Finanzmathematik I

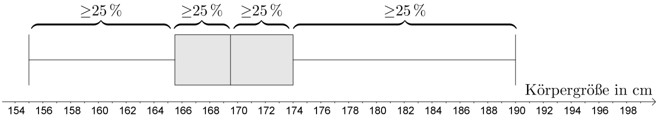


In Planung:

- KH – Finanzmathematik II (Kosten- und Preistheorie)

Statistik

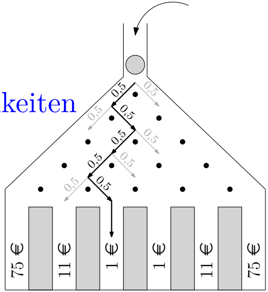
- KH – Statistik I
- AB – Interpolation und Regression
- AB – Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme
- AB – Statistische Kenngrößen und Boxplot
- TB – Regression



In Planung:

- KH – Statistik II
  (Interpolation, Regression, Konfidenzintervalle)

- KH – Kombinatorik
- KH – Stochastik I
- KH – Stochastik II
- KH – Stochastik III
- AB – Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten
- AB – Binomialverteilung
- AB – Kombinatorik
- AB – Laplace-Experimente
- AB – Normalverteilung
- AB – Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume
- AB – Zufallsvariablen
- TB – Zufallssstreubereiche und Konfidenzintervalle



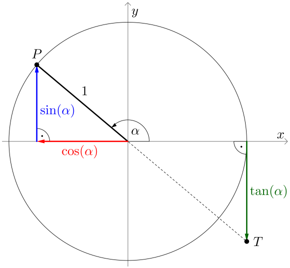
- KH – Termrechnung
- AB – Pascalsches Dreieck I
- AB – Pascalsches Dreieck II
- AB – Polynomdivision
- AB – Potenzen und Wurzeln
- UB – Betrags(un)gleichungen
- UB – Bruchgleichungen
- UB – Bruchrechnung
- UB – Exponential- und Logarithmusgleichungen
- UB – Quadratische Gleichungen
- UB – Ungleichungen
- UB – Wurzelgleichungen

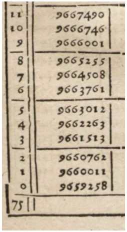
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$\begin{tikzcd}
\cdots & 2^{-3} \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{-2} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{-1} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{0} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{1} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{2} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{3} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{4} \arrow[l, bend right, ":2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

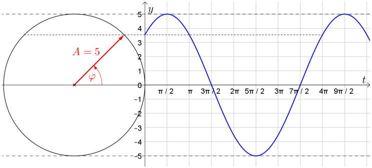
Trigonometrie

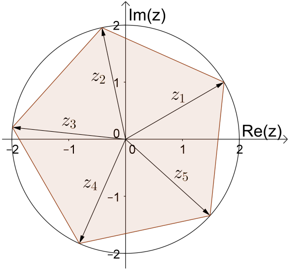
- KH – Trigonometrie I
- KH – Trigonometrie II
- KH – Trigonometrie III
- AB – Ähnlichkeit und Winkelfunktionen
- AB – Allgemeines Dreieck
- AB – Dreieckskonstruktionen
- AB – Graphen der Winkelfunktionen
- AB – Strahlensatz
- AB – Summensätze für Winkelfunktionen
- AB – Winkelfunktionen am Einheitskreis
- AB – Winkelmessung





11	9667490
10	9666746
9	9666001
8	9665255
7	9664508
6	9663761
5	9663012
4	9662263
3	9661513
2	9660762
1	9660011
0	9659258
75	

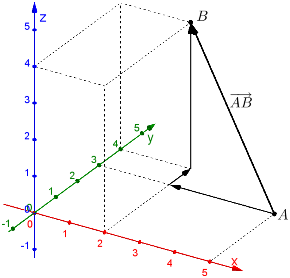




- KH – Komplexe Zahlen
- KH – Vektorrechnung in der Ebene
- KH – Vektorrechnung im Raum
- AB – Komplexe Zahlen
- AB – Vektorrechnung in der Ebene
- AB – Vektorrechnung im Raum

In Planung:

- AB – Parameterdarstellungen



Feedback

1. Feedback zu den Materialien
2. Feedback zur Fortbildung

Vielen herzlichen Dank für das Interesse!

Projekt-Website: mmf.univie.ac.at

E-Mail: lukas.riegler@univie.ac.at