

Grenzwerte

Dmytro Rzhemovskiy, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 21, 2024

STETIGKEITSPUNKTE

Aufgabe 1. Berechne die Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x + 3)$	b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{3}$	c) $\lim_{x \rightarrow 5} (2^x + x^2)$
d) $\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 + x^2 + 2x - 5)$	e) $\lim_{x \rightarrow e} (\ln x + x)$	f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{4x + 3}$
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3 2^x}{e^x}$	h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 6x^2 - 3}{x^2 - 3x + 1}$	i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sin x$

OPERATIONEN MIT GRENZWERTEN

Aufgabe 2. Berechne die Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \frac{1}{x^2})$	c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{x}})$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left(2 + \frac{3}{\ln(x)} \right)$	e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 - \frac{1}{x} \right) \arctan(x)$	f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x \left(3 + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} \right)$
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{4 + \frac{7}{x}}$	h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{1}{x} - \frac{7}{x^2}}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + e^{-x}}$	i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \arctan(x)}{2 + \frac{1}{x}}$

GRENZWERTE IM UNENDLICHEN

Aufgabe 3. Berechne die Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{6 - 5x}$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 5x + 3}{1 - 2x^2}$	c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{4 - x^2}$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 10}{2 - 4x - x^3}$	e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 3}{e^x - 4}$	f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 \ln(x) + 10}{13 - 2 \ln(x)}$
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}{4 - 2x}$	h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^6 + x^4 - x^2}}{x^3 - x - 1}$	i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^3 + 2x^2 + 1}}{x^2 - 3}$

REGEL VON DE L'HOSPITAL

Proposition 1. (Regel von de l'Hospital)

Gegeben ist ein Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$.

Wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aufgabe 4. Berechne den Grenzwert.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{0.2x-2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 10}{e^x - 7x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x)}{\sqrt{x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 \ln^2(x)}{2x + 7}$

Aufgabe 5. Berechne den Grenzwert.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{2x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x) - \ln(1+x)}{x^2}$

Aufgabe 6. Berechne den Grenzwert.

a) $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \ln(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +0} x(\ln^2(x) + \ln(x))$