Allgemeine Form einer Ebenengleichung (Teil 2)

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 20, 2024

DURCHSCHNITTSPUNKTE UND -GERADEN

Aufgabe 1. (Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene)

Gegeben sind eine Ebene in allgemeiner Form und eine Gerade in Parameterform.

1. Ermittle die Anzahl der Schnittpunkte und die Lagebeziehung zwischen der Geraden und der Ebene.

   Hinweis: Überlege, welche Bedingung der Richtungsvektor der Geraden und der Normalvektor der Ebene erfüllen müssen, damit die Gerade und die Ebene parallel sind.

2. Finde die Koordinaten des Schnittpunktes, wenn die Ebene und die Gerade sich nur in einem Punkt schneiden.

a) Die yz-Ebene und die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Die Ebene $x + 2y - z - 5 = 0$ und die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

c) Die Ebene $3x + 2y + 2z + 10 = 0$ und die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

d) Die Ebene $-x + 3y - z - 5 = 0$ und die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (Orthogonale Projektion eines Punktes)

Gegeben sind ein Punkt $A \in \mathbb{R}^3$ und eine Ebene $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ in allgemeiner Form. Ermittle die Koordinaten der orthogonalen Projektion des Punktes A auf die Ebene α.

Hinweis: Bestimme die Parameterdarstellung einer Geraden, die zur Ebene orthogonal steht und durch den Punkt A verläuft.

a) $A(1 \mid 2 \mid 3), \quad \alpha : x - y = 0$

b) $A(-1 \mid 2 \mid -4), \quad \alpha : x + y + 2z = 5.$

c) $A(2 \mid -3 \mid 5), \quad \alpha: -x + 2y + 2z - 7 = 0$

Aufgabe 3. (Symmetrischer Punkt)

Gegeben sind ein Punkt $A \in \mathbb{R}^3$ und eine Ebene $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ in allgemeiner Form. Ermittle die Koordinaten des Punktes A', sodass die Punkte A und A' zur Ebene α symmetrisch liegen.

Hinweis: Bestimme zuerst die orthogonale Projektion des Punktes A auf die Ebene.

a) $A(1 \mid 2 \mid 3), \quad \alpha$ ist die xz-Koordinatenebene

b) $A(-1 \mid 2 \mid -4), \quad \alpha: x + y + 2z - 5 = 0$

c) $A(4 \mid 6 \mid 0), \quad \alpha: 3x - 3y + 2z + 8 = 0$

Aufgabe 4. (Schnittgerade zweier Ebenen)

Gegeben sind zwei Ebenen mit ihren Gleichungen.

1. Zeige, dass die Ebenen sich durch eine Gerade schneiden.

   Hinweis: Überlege, welche Bedingung die Normalvektoren der Ebenen erfüllen müssen, damit die Ebenen parallel zueinander sind.

2. Ermittle die Parameterdarstellung der Schnittgeraden.

   Hinweis: Ermittle zwei Punkte, die auf der Schnittgeraden liegen.

a) Die xz-Ebene und die Ebene $x + y + z - 3 = 0$.

b) Die Ebene $2x + y - z - 1 = 0$ und die Ebene $x + z = 2$.

c) Die Ebene $4x - y + z + 3 = 0$ und die Ebene $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$.

d) Die Ebene $2x + 4y + 5z - 7 = 0$ und die Ebene $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. (Drei Ebenen)

Gegeben sind drei Ebenen. Ermittle, wie viele gemeinsame Punkte sie besitzen.

Hinweis: Ermittle die Parameterdarstellung der Schnittgeraden zweier Ebenen, wenn sie existiert. Dann überlege, ob die Schnittgerade die dritte Ebene schneidet.

a) Die yz-Ebene, die Ebene $x + y + z - 3 = 0$ und die Ebene $2x - 3y + z - 2 = 0$.

b) Die Ebene $x - y = 1$, die Ebene $x + y - z - 2 = 0$ und die Ebene $-x - y + 2z - 5 = 0$.

c) Die Ebene $2x + y = 0$, die Ebene $-2x + y + z - 1 = 0$ und die Ebene $2y + z - 1 = 0$.

Aufgabe 6. (Abstand eines Punktes zu einer Ebene)

Gegeben sind eine Ebene in allgemeiner Form $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$ und ein Punkt $A(x_0 \mid y_0 \mid z_0)$. Beweise die Formel für den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt.

$$d(A,\alpha) = \frac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Berechne mithilfe der Formel den Abstand vom Punkt A zur angegebenen Ebene α.

a) $A(2 \mid 0 \mid 0), \quad \alpha:\ x+2y-z-4=0$

b) $A(-3 \mid 1 \mid 2), \quad \alpha:\ -x+y-2z+2=0$

c) $A(-1 \mid 2 \mid 1), \quad \alpha: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\ t,s\in\mathbb{R}$

d) $A(3 \mid 4 \mid -1), \quad \alpha: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ t,s\in\mathbb{R}$

Aufgabe 7. (Lagebeziehung einer Kugel und einer Ebene)

Gegeben sind eine Kugel und eine Ebene in allgemeiner Form. Bestimme ihre Lagebeziehung zueinander (sich nicht schneidend, berührend, sich schneidend).

a) Die Kugel $x^2+y^2+z^2=1$ und die Ebene $x+y+z+2=0$.

b) Die Kugel $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=2$ und die Ebene $-x+z+4=0$.

c) Die Kugel $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+4)^2=9$ und $2x+3y-2z+10=0$.

Aufgabe 8. Gegeben sind eine Ebene $\alpha\subset\mathbb{R}^3$ und eine Gerade $a\subset\mathbb{R}^3$. Bestimme die Koordinaten des Punktes A, sodass der Punkt A auf der Geraden a liegt und sich im Abstand d von der Ebene α befindet.

a) α ist yz-Koordinatenebene, $\quad a: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}, \quad d=3.$

b) $\alpha: x+y+z=-3$, $\quad a$ ist z-Koordinatenachse, $\quad d=5.$

c) $\alpha: 2x-y+3z=4, \quad a: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}, \quad d=2.$

Aufgabe 9. (Parallele Ebene)

Ermittle die Gleichung einer Ebene in allgemeiner Form, die im Abstand d von der Ebene α liegt.

a) $\alpha: x+y+z-3=0, \quad d=2$

b) $\alpha: 2x-2y+z-1=0, \quad d=3$

Aufgabe 10. (Schnittkreis)

Gegeben sind eine Kugel und eine Ebene.

1. Zeige, dass sie sich in unendlich vielen Punkten schneiden.
2. Ermittle die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius des Schnittkreises.

a) Die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ und die Ebene $x + y + z = 1$.

b) Die Kugel $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$ und die Ebene $2x - y + z - 3 = 0$.