Bedingte Wahrscheinlichkeit. Unabhängigkeit

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 26, 2024

BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Definition 1. Gegeben sind zwei Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Eine **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung von B wird wie folgt berechnet.

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Aufgabe 1. (Corona-Schnelltest)

Ein neuen Corona-Schnelltest wird überprüft. Beim Testen haben 140 Menschen teilgenommen und die Forscher*innen haben die folgenden Daten erhalten.

	krank	gesund
positiv getestet	36	8
negativ getestet	4	92

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) eine positiv getestete Person gesund ist.

Hinweis: A – "Eine Person ist gesund.", B – "Eine Person ist positiv getestet.". Berechne $\mathbb{P}(A \mid B)$.

b) eine negativ getestete Person krank ist.

c) eine gesunde Person positiv getestet wird.

d) eine kranke Person positiv getestet wird.

Aufgabe 2. (Teilbarkeit)

Es wird zufällig eine 2-stellige Zahl x ausgewählt. Betrachte folgende Ereignisse

A – x ist durch 3 teilbar.

B – x ist durch 5 teilbar.

C – x ist durch 6 teilbar.

Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten. Gib zunächst eine intuitive Vermutung über das Ergebnis an.

a) $\mathbb{P}(A)$ b) $\mathbb{P}(B)$ c) $\mathbb{P}(C)$
d) $\mathbb{P}(C \mid A)$ e) $\mathbb{P}(A \mid C)$ f) $\mathbb{P}(A \mid B)$

Aufgabe 3. (Würfel)

Man wirft einen Würfel zweimal und erhält beim ersten Wurf die Zahl Z_1 und beim zweiten Wurf die Zahl Z_2. Betrachte folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten.

a) $\mathbb{P}(Z_1 = k \mid Z_1 + Z_2 = 10)$ für $k = 2, 6$.

b) $\mathbb{P}(Z_1 = k \mid Z_1 + Z_2 \leq 5)$ für $k = 1, 4, 6$.

c) $\mathbb{P}(Z_1 = k \mid Z_1 + Z_2 = 7)$ für $k = 1, 4, 6$.

1. Gib eine intuitive Vermutung, ob die bedingte Wahrscheinlichkeit größer als die dazugehörige Wahrscheinlichkeit ohne Bedingung ist.
2. Berechne die bedingte Wahrscheinlichkeiten und vergleiche jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten ohne Bedingung $\mathbb{P}(Z_1 = k)$, $k = 1, \ldots, 6$.

Aufgabe 4.

a) Gegeben sind die Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A) = 0.6$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.3$. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

a) $\mathbb{P}(A \mid B)$ b) $\mathbb{P}(B \mid A)$ c) $\mathbb{P}(A \mid A \cup B)$ d) $\mathbb{P}(B \mid A^c)$

b) Gegeben sind die Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(B) = 0.3$ und $\mathbb{P}(A \mid B) = 0.9$. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

a) $\mathbb{P}(A \cap B)$ b) $\mathbb{P}(B \mid A)$ c) $\mathbb{P}(A \mid A \cup B)$ d) $\mathbb{P}(B \mid A^c)$

c) Gegeben sind die Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$, $\mathbb{P}(A \mid B) = 0.3$ und $\mathbb{P}(B \mid A) = 0.4$. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

a) $\mathbb{P}(A)$ b) $\mathbb{P}(B)$ c) $\mathbb{P}(A \cap B)$

UNABHÄNGIGKEIT

Definition 2. Zwei Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A) \neq 0$ und $\mathbb{P}(B) \neq 0$ heißen **unabhängig**, wenn

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$$

Proposition 1. *Zwei Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts $A \cap B$ wie folgt berechnet werden kann.*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Aufgabe 5. (Würfel 2)

Man wirft einen Würfel zweimal und erhält beim ersten Wurf die Zahl Z_1 und beim zweiten Wurf die Zahl Z_2.

Beschreibe die folgenden Ereignisse und überlege, ob sie unabhängig sind. Untersuche, ob die Gleichung $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ gilt.

a) $\{Z_1 = 1\}$ und $\{Z_2 = 3\}$

b) $\{Z_1 \leq 2\}$ und $\{Z_2 \geq 4\}$

c) $\{Z_1 + Z_2 = 10\}$ und $\{Z_2 = 4\}$

d) $\{Z_1 + Z_2 = 7\}$ und $\{Z_2 = 4\}$

Berechne unter der Annahme, dass Z_1 und Z_2 unabhängig voneinander sind.

a) $\mathbb{P}(Z_1 = 6, Z_2 = 6)$ b) $\mathbb{P}(Z_1 = 1, Z_2 \geq 4)$ c) $\mathbb{P}(Z_1 > 2, Z_2 > 3)$

Aufgabe 6. (Ziehen mit Zurücklegen)

In einer Urne gibt es 3 weiße und 5 schwarze Kugeln. Man zieht eine Kugel dreimal mit Zurücklegen.

Beschreibe die Ereignismenge Ω dieses Zufallsexperiments.

Beschreibe die folgenden Ereignisse und überlege, ob sie unabhängig sind. Untersuche, ob die Gleichung $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ gilt.

a) "Die erste Kugel ist weiß." und "Die zweite Kugel ist schwarz.".

b) "Die zwei ersten Kugeln sind weiß." und "Die dritte Kugel ist schwarz.".

c) "Es gibt mindestens zwei weiße Kugeln." und "Die erste Kugel ist weiß.".

Berechne unter der Annahme, dass das erste und das zweite Ereignis unabhängig voneinander sind.

1. $\mathbb{P}$("Kugel 1 ist weiß.", "Kugel 3 ist schwarz.")
2. $\mathbb{P}$("Kugel 1 ist weiß.", "Kugel 2 ist schwarz.", "Kugel 3 ist weiß.")
3. $\mathbb{P}$("Kugel 1 ist schwarz.", "Kugel 2 oder Kugel 3 ist weiß.")
4. $\mathbb{P}$("Alle Kugeln haben die gleiche Farbe.")

Aufgabe 7. (Schießen)

Man schießt dreimal. Beim ersten Schuss ist man sehr konzentriert und trifft das Ziel mit der Wahrscheinlichkeit von 0.9. Beim zweiten Schuss trifft man mit der Wahrscheinlichkeit von 0.6 und beim dritten Schuss mit der Wahrscheinlichkeit von 0.3.

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. (Wir bezeichnen das Treffen des Ziels mit X und das Nicht-Treffen mit O.)

a) $\mathbb{P}$("Schuss 1 = X", "Schuss 2 = O", "Schuss 3 = X")

b) $\mathbb{P}$("Schuss 1 = X oder Schuss 2 = X", "Schuss 3 = O")

c) $\mathbb{P}$("Man trifft genau einmal.")

d) $\mathbb{P}$("Man trifft mindestens zweimal.")

Aufgabe 8. (Ziehen ohne Zurücklegen)

In einer Urne liegen 5 rote und 7 blaue Kugeln. Man zieht eine Kugel **ohne Zurücklegen** und dann eine weitere Kugel.

a) Überlege, ob die Ereignisse $A = \{\text{Die Kugel 1 ist blau}\}$ und $B = \{\text{Die Kugel 2 ist rot}\}$ unabhängig sind. Berechne dabei

   i) $\mathbb{P}(\text{"Kugel 2 ist rot"} \mid \text{"Kugel 1 ist blau"})$

   ii) $\mathbb{P}(\text{"Kugel 2 ist rot"} \mid \text{"Kugel 1 ist rot"})$

b) Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A)$$

   Benutze diese Formel, um die folgenden Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

   i) $\mathbb{P}(\text{"Kugel 1 ist blau"}, \text{"Kugel 2 ist blau"})$

   ii) $\mathbb{P}(\text{"Kugel 1 ist rot"}, \text{"Kugel 2 ist blau"})$

Aufgabe 9. Ermittle, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind, wenn

a) $\mathbb{P}(A) = 0.7$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.9$.

b) $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(B) = 0.2$ und $\mathbb{P}(A \setminus B) = 0.4$.

Aufgabe 10. Gebeben sind zwei unabhängige Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A) = 0.5$ und $\mathbb{P}(B) = 0.7$. Berechne

$$\mathbb{P}(A \cap B) \qquad \mathbb{P}(A \cup B) \qquad \mathbb{P}(A^c \cap B) \qquad \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$$

Untersuche, ob $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)$.

Aufgabe 11. $(\star)$

Gegeben sind zwei unabhängige Ereignisse A und B. Beweise, dass

a) die Ereignisse A^c und B unabhängig sind.

b) die Ereignisse A^c und B^c unabhängig sind.