1 Primfaktorzerlegung

Aufgabe 1.1. (A) Bestimme die kleinste positive ganze Zahl, deren Querprodukt (= Produkt der Ziffern) genau 600 beträgt.

Quelle: Naboj 2013, #4J.

Aufgabe 1.2. (A) Die Zahlen a, b und c seien paarweise verschiedene positive ganze Zahlen mit $a+b+c = 2015$. Finde den größtmöglichen Wert, den ein gemeinsamer Teiler von a, b und c annehmen kann.

Quelle: Naboj 2015, #1S

Aufgabe 1.3. (A) Wie viele positive ganze Zahlen teilen $2^{20} \cdot 3^{23}$, aber nicht $2^{10} \cdot 3^{20}$?

Quelle: Känguru der Mathematik 2023, Student, #22.

Aufgabe 1.4. (A) Finde das größte k, für das 2001^k ein Teiler von $2002!$ ist.

Quelle: Känguru der Mathematik 2002, Student, #22.

Aufgabe 1.5. (A) Sei n eine positive ganze Zahl. Nun betrachte alle aufsteigenden Folgen F_n, die mit 1 starten und den konstanten Abstand n zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern haben. Beispielsweise ist F_2 die Folge $1, 3, 5, \ldots$. Fur wie viele n enthält die Folge F_n die Zahl 2021 als Folgenglied?

Quelle: Naboj 2021, #2S.

Aufgabe 1.6. (A) Die positive ganze Zahl N hat genau sechs verschiedene (positive) Teiler, inklusive 1 und N. Das Produkt von fünf dieser Teiler ist 648. Welche der folgenden Zahlen ist der sechste Teiler von N?

Quelle: Känguru der Mathematik 2016, Student, #30.

Aufgabe 1.7. (A) Finde die kleinste positive ganze Zahl, die genau 24 positive Teiler hat, von denen genau 8 ungerade sind.

Quelle: Naboj 2020, #4S.

Aufgabe 1.8. (A) Bestimme alle natürlichen Zahlen n zwischen 1 und 200 mit der Eigenschaft, dass die Summe der unterschiedlichen Primfaktoren von n genau 16 ergibt.

Beispiel: Die Summe der unterschiedlichen Primfaktoren von $12 = 2^2 \cdot 3$ ist $2 + 3 = 5$.

Quelle: Naboj 2014, #15S.

Aufgabe 1.9. (A) Ein Rechteck mit ganzzahligen Seitenlängen wird in zwölf Quadrate zerlegt, die folgende Seitenlängen besitzen: $2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9$ und 9. Welchen Umfang hat dieses Rechteck?

Quelle: Naboj 2015, #12S.

Aufgabe 1.10. (A) Zwei große Adelshäuser trafen sich zu einem Fest, beide vertreten durch mindestens ein männliches und mindestens ein weibliches Mitglied. Jedes Mitglied eines Hauses begrüßte jedes Mitglied des anderen Hauses: Wenn sich zwei Männer begrußten, schüttelten sie sich die Hände, Während sich zwei Frauen oder eine Frau und ein Mann voreinander verbeugten. Insgesamt kam es während der Begrußung zu 85 Handschlägen und 162 Verbeugungen. Wie viele Frauen waren auf dem Fest anwesend?

Quelle: Naboj 2019, #17S.

Aufgabe 1.11. (A) Wie lautet die kleinste positive ganze Zahl mit mindestens zwei Stellen, deren Wert auf 1/29 der ursprunglichen Zahl sinkt, wenn ihre erste (d.h. linke) Ziffer gelöscht wird?

Quelle: Naboj 2018, #7S.

(B) Wie viele 8-stellige Zahlen gibt es, so dass nach dem Streichen der ersten Ziffer (von links) eine Zahl entsteht, die $\frac{1}{35}$ der ursprunglichen beträgt?

Quelle: Naboj 2021, #20S.

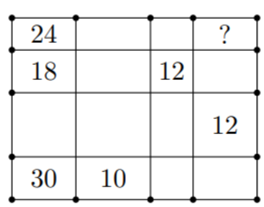
Aufgabe 1.12. (B) Bestimme alle Paare naturlicher Zahlen (n, m), welche die Gleichung $4n + 260 = m^2$ erfullen.

Quelle: Naboj 2018, #24S.

Aufgabe 1.13. (B) Die Schweinezuchterin Lisi hat für ihre Ferkel einen neuen Stall der Größe 252 m^2 mit flexibel verschiebbaren Trennwänden, so dass sie insgesamt 16 voneinander getrennte rechtwinklige Boxen zur Verfügung hat.

Die flexiblen Innenwände können dabei nur uber die ganze Länge bzw. Breite des Gebäudes verschoben werden. Jetzt hat sie die Wände so verschoben, dass die in der Abbildung mit Zahlen gekennzeichneten Boxen die angegebenen Größen in m^2 haben. Als Mathematikliebhaberin achtet Lisi stets darauf, dass nur ganzzahlige positive Boxengrößen entstehen.

Welche Fläche kann dann die Schweinebox in der rechten oberen Ecke, die ein Fragezeichen enthält, in m^2 haben?



Quelle: Naboj 2023, #27S.

Aufgabe 1.14. (B) Auf jede Seitenfläche eines Wurfels wird eine natürliche Zahl geschrieben. Jeder Ecke wird das Produkt der Zahlen auf den drei Flächen zugewiesen, die an dieser Ecke zusammentreffen (Eckenprodukt). Die Summe der Eckenprodukte sei 165. Welche Werte kann die Summe der Zahlen auf den Seitenflächen annehmen?

Quelle: Naboj 2011, #26S.

Aufgabe 1.15. (B) Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen a, für die die Gleichung

$$7an - 3n! = 2020$$

eine positive ganzzahlige Lösung n hat.

Quelle: ÖMO 2020, Junior, #4 (Richard Henner)