

- Опис функцій за допомогою похідних
- Геометричний зміст похідної
- Правила знаходження похідних
  - Сума і множення на число
  - Добуток
  - Частка
  - Композиція функцій
- Знаходження рівняння дотичної
- Монотонність функції
- Локальні екстремуми
- Дослідження поведінки многочленів, раціональних функцій, степеневих функцій

### ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ. ПОХІДНІ ЛІНІЙНИХ, КВАДРАТИЧНИХ І СТЕПЕНЕВИХ ФУНКЦІЙ

**36.1.°** Знайдіть похідну функції:

1)  $y = 5x - 6$ ;

2)  $y = \frac{1-x}{3}$ ;

3)  $y = 9$ .

**36.2.°** Знайдіть похідну функції:

1)  $y = x^4$ ;

3)  $y = x^{-15}$ ;

5)  $y = x^{-2,8}$ ;

2)  $y = x^{20}$ ;

4)  $y = \frac{1}{x^{17}}$ ;

6)  $y = x^{\frac{1}{5}}$ .

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №36.1, 36.2

**36.4.°** Продиференціюйте функцію:

1)  $y = \sqrt[4]{x}$ ;

2)  $y = \sqrt[8]{x^7}$ ;

3)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;

4)  $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$ .

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №36.4

**36.8.°** Обчисліть значення похідної функції  $f$  у точці  $x_0$ :

1)  $f(x) = x\sqrt{x}$ ,  $x_0 = 81$ ;

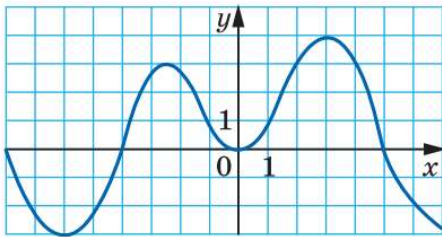
3)  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}}$ ,  $x_0 = 64$ .

2)  $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$ ,  $x_0 = 16$ ;

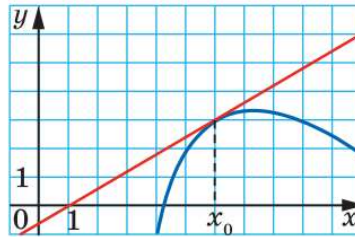
**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №36.8

**36.14.\*** На рисунку 36.9 зображено графік функції  $f$ . Укажіть кілька значень аргументу  $x$ , для яких:

- 1)  $f'(x) > 0$ ;      2)  $f'(x) < 0$ ;      3)  $f'(x) = 0$ .



**Рис. 36.9**



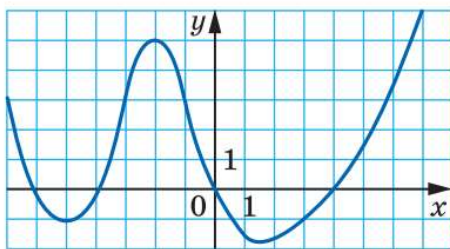
**Рис. 36.10**

**36.15.\*** До графіка функції  $f$  у точці з абсцисою  $x_0$  проведено дотичну (рис. 36.10). Знайдіть  $f'(x_0)$ .

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №36.14, 36.15

**36.19.\*** На рисунку 36.14 зображено графік функції  $f$ . Порівняйте числа:

- 1)  $f'(-5)$  і  $f'(1)$ ;      3)  $f'(-2)$  і  $f'(4)$ ;  
2)  $f'(-1)$  і  $f'(6)$ ;      4)  $f'(0)$  і  $f'(5)$ .



**Рис. 36.14**

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №36.19

## СУМА ФУНКЦІЙ І ДОБУТОК ФУНКЦІЇ НА ЧИСЛО

**37.1.°** Знайдіть похідну функції:

1)  $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$ ;

2)  $y = 4x^6 + 20\sqrt{x}$ ;

3)  $y = 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$ ;

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №37.1

Укажіть похідну функції  $y = -\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14$ .

**Джерело:** ЗНО 2018, додаткова сесія, №18

Укажіть похідну функції  $f(x) = x(x^3 + 1)$ .

Джерело: ЗНО 2018, основна сесія, №19

Обчисліть значення похідної функції  $f(x) = 2x^3 - 5$  у точці  $x_0 = -1$ .

Джерело: НМТ 2022, №32

## ПОХІДНА ДОБУТКУ І ЧАСТКИ ФУНКЦІЙ

**37.3.°** Знайдіть похідну функції:

1)  $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$ ;

2)  $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$ ;

**37.4.°** Знайдіть похідну функції:

1)  $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$ ;

2)  $y = (x + 5)\sqrt{x}$ ;

- В кожному завданні обчислити значення функції і значення похідної в точці  $x = 1$  та провести (наближено) дотичну

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10, №37.3, 37.4

**37.6.°** Знайдіть похідну функції:

1)  $y = \frac{3x + 5}{x - 8}$ ;    2)  $y = \frac{2x^2}{1 - 6x}$ ;    3)  $y = \frac{3 - x^2}{4 + 2x}$ ;    4)  $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 7}$ .

- В кожному завданні обчислити значення функції і значення похідної в точці  $x = 0$ ,  $x = 1$  та провести (наближено) дотичну

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10, №37.6

**37.14.\*** Знайдіть похідну функції:

1)  $y = x\sqrt{2x + 1}$ ;

5)  $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ ;

6)  $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ .

- В кожному завданні обчислити значення функції і значення похідної в точці  $x = 1$  та провести (наближено) дотичну

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №37.14, 37.15

Укажіть похідну функції

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x}.$$

**Джерело:** ЗНО 2021, пробний, №12

### ПОХІДНА КОМПОЗИЦІЇ ФУНКЦІЙ

Знайти похідну функції:

- $y = (x + 1)^2$
- $y = (2x + 1)^2$
- $y = (5x - 3)^4$
- $y = \sqrt{3x - 2}$
- $y = \sqrt{x^2 + x}$
- $y = \sqrt{1 - x^2}$

**Джерело:** Projekt MmF

Якщо  $y = (4x - 1)^3$ , то  $y' =$

**Джерело:** ЗНО 2015, додаткова сесія, №19

Обчисліть значення похідної функції  $y = \sqrt{13 - 3x}$  у точці  $x_0 = 3$ .

**Джерело:** ЗНО 2016, основна сесія, №27

### ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ

**38.1.°** Складіть рівняння дотичної до графіка функції  $f$  у точці з абсцисою  $x_0$ , якщо:

- 1)  $f(x) = x^2 + 3x$ ,  $x_0 = -1$ ;
- 2)  $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$ ,  $x_0 = 9$ ;

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №38.1

**38.2.°** Складіть рівняння дотичної до графіка функції  $f$  у точці з абсцисою  $x_0$ , якщо:

1)  $f(x) = 2x^3 - 3x$ ,  $x_0 = 1$ ;                      3)  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$ ,  $x_0 = -1$ ;

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №38.2

**38.3.\*** Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:

1)  $f(x) = x^2 - 3x - 3$ ;

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №38.3

**38.5.\*** Складіть рівняння дотичної до графіка функції  $f$  у точці його перетину з віссю абсцис:

1)  $f(x) = 8x^3 - 1$ ;                                      2)  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ .

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №38.5

**38.7.\*** Знайдіть координати точки параболи  $y = 2x^2 - x + 1$ , у якій дотична до неї паралельна прямій  $y = 7x - 8$ .

**38.8.\*** У яких точках дотичні до графіка функції  $y = \frac{1}{x}$  паралельні прямій  $y = -x$ ?

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №38.7, 38.8

**38.13.\*** Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції:

1)  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ;                                      2)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$ .

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №38.13

**38.15.\*\*** Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1)  $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ , якщо ця дотична паралельна прямій  $y = 3x$ ;  
2)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$ , якщо ця дотична паралельна прямій  $y = 2x + 1$ .

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №38.15

Задано функцію  $f(x) = x^2 + 3x - 10$ .

- 1 Визначте координати точок перетину графіка функції  $f$  з осями координат.
- 2 Побудуйте графік функції  $f$ .
- 3 Знайдіть похідну функції  $f$ .
- 4 Визначте кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції  $f$  у точці з абсцисою  $x_0 = -1$ .

**Джерело:** ЗНО 2017, додаткова сесія, №31

Задано функції  $f(x) = \frac{2}{x}$  і  $g(x) = 5 - 8x$

- 1 Побудуйте графік функції  $f$ .
- 2 Побудуйте графік функції  $g$ .
- 3 Знайдіть похідну функції  $f$ .
- 4 До графіка функції  $f$  проведено дотичні, паралельні графіку функції  $g$ . Визначте абсциси точок дотику.

**Джерело:** ЗНО 2019, основна сесія, №22

Задано функції  $f(x) = \frac{3}{x}$  і  $g(x) = 5 - 3x$ .

- 1 Побудуйте графік функції  $f$ .
- 2 Побудуйте графік функції  $g$ .
- 3 Знайдіть похідну функції  $f$ .
- 4 До графіка функції  $f$  проведено дотичні, паралельні графіку функції  $g$ . Визначте абсциси точок дотику.

**Джерело:** ЗНО 2019, додаткова сесія, №24

## ДОСЛІДЖЕННЯ МОНОТОННОСТІ ФУНКЦІЙ

39.1.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ ;

3)  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ ;

2)  $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$ ;

4)  $f(x) = x^3 + 4x - 8$ .

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10, №39.1

39.3.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$ ;

3)  $f(x) = x + \frac{9}{x}$ ;

2)  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ ;

4)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$ .

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10, №39.3

39.5.° На рисунку 39.11 зображено графік похідної функції  $f$ , диференційовної на  $\mathbb{R}$ . Укажіть проміжки спадання функції  $f$ .

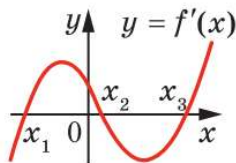


Рис. 39.11

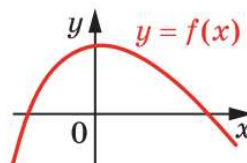


Рис. 39.12

39.6.° На рисунку 39.12 зображено графік функції  $y = f(x)$ , диференційовної на  $\mathbb{R}$ . Серед наведених на рисунку 39.13 графіків укажіть той, який може бути графіком функції  $y = f'(x)$ .

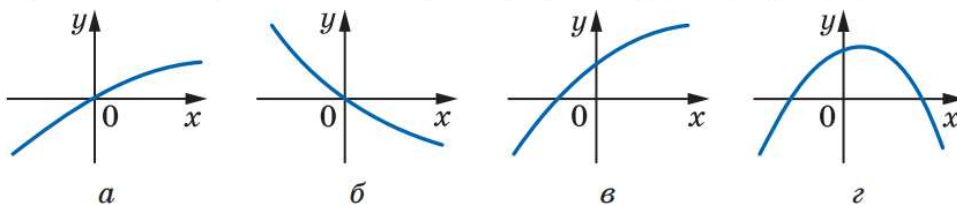
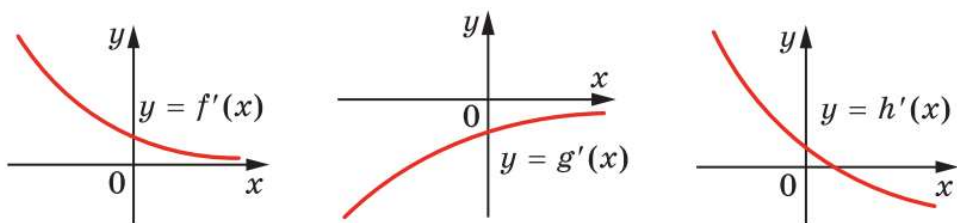


Рис. 39.13

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10, №39.5, 39.6

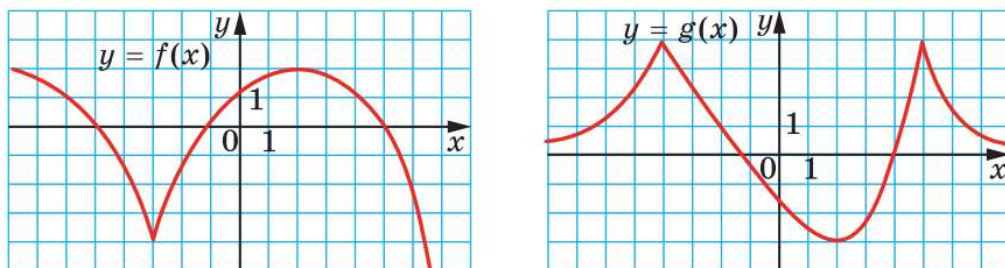
**39.9.\*** На рисунку 39.16 зображено графіки похідних функцій  $f$ ,  $g$  і  $h$ . Яка з функцій  $f$ ,  $g$  і  $h$  спадає на  $\mathbb{R}$ ?



**Рис. 39.16**

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №39.9

**39.16.\*\*** На рисунку 39.17 зображено графіки функцій  $f$  і  $g$ , визначених на  $\mathbb{R}$ . Використовуючи ці графіки, розв'яжіть нерівність:  
 1)  $f'(x) \leq 0$ ;                      2)  $g'(x) \geq 0$ .



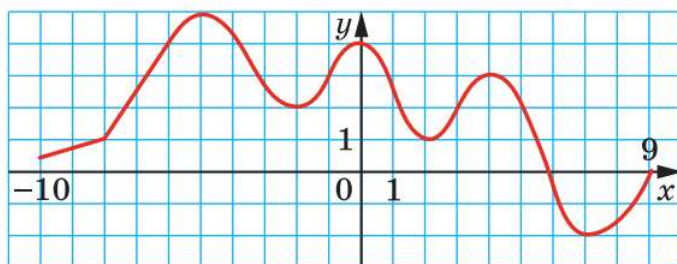
**Рис. 39.17**

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №39.16

## ЛОКАЛЬНІ ЕКСТРЕМУМИ

- Необхідна і достатня умови локального екстремума

**40.1.°** На рисунку 40.18 зображено графік функції  $y = f(x)$ , визначеної на проміжку  $[-10; 9]$ . Укажіть: 1) критичні точки функції; 2) точки мінімуму; 3) точки максимуму.



**Рис. 40.18**



Джерело: Мерзляк, Алгебра 10, №40.1

40.5.° На рисунку 40.21 зображено графік функції  $y = f(x)$ , визначеної на множині дійсних чисел. Чи є правильною рівність:

- |                   |                  |
|-------------------|------------------|
| 1) $f'(-3) = 0$ ; | 4) $f'(1) = 0$ ; |
| 2) $f'(-2) = 0$ ; | 5) $f'(2) = 0$ ; |
| 3) $f'(0) = 0$ ;  | 6) $f'(3) = 0$ ? |

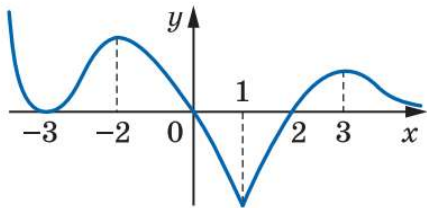


Рис. 40.21

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10, №40.5

40.6.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

- |                              |                                    |
|------------------------------|------------------------------------|
| 1) $f(x) = 12x - x^3$ ;      | 3) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$ ; |
| 2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ ; | 4) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$ .  |

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10, №40.6

## ОПУКЛІСТЬ

42.1.° Знайдіть другу похідну функції:

- 1)  $y = x^2 - 2x + 5$ ;
- 2)  $y = \frac{1}{x}$ ;
- 3)  $y = \sqrt{x}$ ;

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10, №42.1

42.2.° Знайдіть другу похідну функції:

- 1)  $y = x^4$ ;
- 2)  $y = 3 - 5x + x^3$ ;
- 3)  $y = \frac{1}{x-1}$ ;

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №42.2

**42.7.°** Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

- 1)  $y = x^3 - 3x + 2$ ;
- 2)  $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$ .

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №42.7

### ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ФУНКЦІЙ

Задано функцію  $y = x^3 - 12x$ .

1. Для наведених у таблиці значень аргумента  $x$  визначте відповідні їм значення  $y$ .

$x$	$y$
-1	
0	
2	

2. Визначте й запишіть координати точок перетину графіка функції  $y = x^3 - 12x$  із віссю  $x$ .
3. Знайдіть похідну  $f'$  функції  $f(x) = x^3 - 12x$ .
4. Визначте нулі функції  $f'$ .
5. Визначте проміжки зростання і спадання, точки екстремуму й екстремуми функції  $f$ .
6. Побудуйте ескіз графіка функції  $f$ .

**Джерело:** ЗНО 2020, додаткова сесія, №30

**43.1.°** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

- 1)  $f(x) = 3x - x^3 - 2$ ;
- 2)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ ;
- 3)  $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9}$ ;
- 4)  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$ ;
- 5)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ ;
- 6)  $f(x) = (x + 3)^2 (x - 1)^2$ .

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №43.1

**43.3.\*** Побудуйте графік функції:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{4-x}{x+2}; & 4) f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}; \\ 2) f(x) = \frac{2}{x^2-1}; & 5) f(x) = \frac{x}{4-x^2}; \\ 3) f(x) = \frac{6x-6}{x^2+3}; & 6) f(x) = -\frac{2x}{x^2+1}; \end{array}$$

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №43.3

**43.5.\*** Побудуйте графік функції  $f(x) = x^2(2x-3)$  і знайдіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння  $f(x) = a$  залежно від значення параметра  $a$ .

**43.6.\*** Побудуйте графік функції  $f(x) = -x^2(x^2-4)$  і знайдіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння  $f(x) = a$  залежно від значення параметра  $a$ .

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №43.5, 43.6

**43.7.\*** Побудуйте графік функції:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = x + \frac{1}{x}; & 3) f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}; \\ 2) f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}; & 4) f(x) = \frac{x^4-8}{(x+1)^4}. \end{array}$$

**Джерело:** Мерзляк, Алгебра 10, №43.7