Differentialrechnung macht Freu(n)de

Dr. Lukas Riegler
Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair

Fortbildung
18. September 2019

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

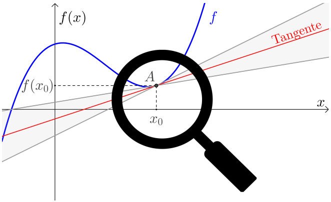
universität wien

Folien online verfügbar: mmf.univie.ac.at (Angebote für Lehrpersonen)

Programmablauf

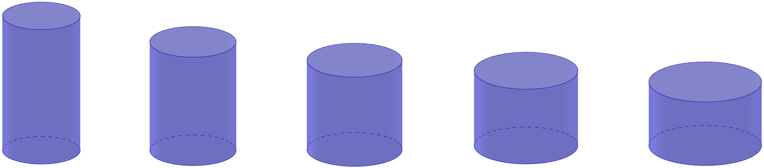
Vormittag:

- Mathematik macht Freu(n)de
- Kompetenzmaterialien
- Einstieg in die Differentialrechnung



Nachmittag:

- Anwendungen der Differentialrechnung
- Differentialrechnung mit Technologieeinsatz



Mathematik macht Freu(n)de – Das Projekt

- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- Kompetenzmaterialien
- Intensiv-Studienclubs
- Vorkurs Mathematik
- Mathematik-Olympiade

Newsletter für Lehrpersonen $\rightsquigarrow$ mmf.univie.ac.at

Angebote für Lehrpersonen → Newsletter

Kompetenzmaterialien

- Themenbereiche der Sekundarstufe II
  - Funktionen & Analysis
  - Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik
  - Algebra & Geometrie
- Orientierung an SRDP-Aufgaben

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

- Praxiserprobung
  - MmF-Förderformate
  - Schulunterricht
- Uneingeschränkter, kostenloser Download
  mmf.univie.ac.at/materialien
- Creative Commons Lizenz

Kompetenzhefte

- 24 Kompetenzhefte (KH)
- Typischer Aufbau der Kompetenzhefte
- Zielgruppen

KOMPETENZHEFT – DIFFERENZIEREN I

INHALTSVERZEICHNIS

- 50 Arbeitsblätter (AB)
- 4 Technologieblätter (TB)
- 5 Übungsblätter (UB)
- Unterrichtsgestaltung
- Ausarbeitungen
- Effizienz

MATHEMATIK MACHT FREU(N)DE — AB – KOMBINATORIK

Schifferl versenken

Wie viele Paare $(☺, \star)$ gibt es, bei denen ☺ ein Buchstabe aus $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ und $\star$ eine Ziffer aus $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ ist?

Im Raster rechts ist zum Beispiel das Paar $(C, 2)$ markiert.

Die Anzahl verschiedener Paare ist ______________ .

	A	B	C	D	⋯	W	X	Y	Z
1					⋯				
2			•		⋯				
3					⋯				
⋮		⋮					⋮		
9					⋯				

Modularer Aufbau

Potenzen mit natürlichen Exponenten 

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Sprechweise: „a *hoch* n“ oder manchmal die „n*-te Potenz von* a“

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Schreibweisen 

Welche ganzen Zahlen verstecken sich hinter den folgenden Potenzen?

$2^3 =$ ________ $3^2 =$ ________ $5^1 =$ ________

$1^5 =$ ________ $0^2 =$ ________ $(-1)^3 =$ ________

Rechenregeln für Potenzen 

Kannst du erklären, weshalb diese Rechenregeln gelten?

Denke zum Beispiel an $n = 3$ und $m = 2$.

1) $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

2) $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Was kann ich verstehen? Was soll ich lernen?

Modularer Aufbau

„Es ist, was es ist. Das muss ich lernen.“

„Das kann ich verstehen und erklären.“

„Hier soll ich aktiv werden.“

„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“

„Hier kommt ein Kochrezept.“

„Diese Formel finde ich in der Formelsammlung.“

„In diese Falle tappe ich nicht.“

„Hier kann ich mich herausfordern.“

„Hier kann ich eine mathematische Idee nachvollziehen.“

Grundkompetenzen

Änderungsmaße

AN 1.1 absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können

AN 1.2 den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differenzialquotient („momentane" bzw. lokale Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und diese Konzepte (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können

AN 1.3 den Differenzen- und Differenzialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differenzialquotienten beschreiben können

Regeln für das Differenzieren

AN 2.1 einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*)

Ableitungsfunktion/Stammfunktion

AN 3.1 die Begriffe *Ableitungsfunktion* und *Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können

AN 3.2 den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können

AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mithilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

Deskriptoren (BHS)

Teil A:

Deskriptor	Formulierung des Deskriptors: Inhalt und Handlung
4.1	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen auf der Basis eines intuitiven Begriffsverständnisses interpretieren und damit argumentieren
4.2	Differenzen- und Differenzialquotient als mittlere bzw. lokale Änderungsraten interpretieren, damit anwendungsbezogen modellieren, rechnen und argumentieren **siehe Kommentar**
4.3	Regeln zum Berechnen von Ableitungsfunktionen von Potenz-, Polynom- und Exponentialfunktionen und Funktionen, die aus diesen zusammengesetzt sind, verstehen und anwenden: Faktorregel, Summenregel, Produktregel, Kettenregel
4.4	Monotonieverhalten, Steigung der Tangente und Steigungswinkel, lokale Extrema, qualitatives Krümmungsverhalten, Wendepunkte von Funktionen am Graphen ablesen, mithilfe der Ableitungen modellieren, berechnen, interpretieren und argumentieren **siehe Kommentar**
4.5	den Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Ableitungsfunktion bzw. einer Stammfunktion interpretieren und erklären; bei gegebenem Graphen einer Funktion den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion skizzieren **siehe Kommentar**

Deskriptoren (BHS)

Teil B (HTL 2):

Deskriptor	Formulierung des Deskriptors: Inhalt und Handlung
Kompetenzen für Teil B (übergreifend über beide HTL-Cluster)	
B_T_4.1	Eigenschaften von Funktionen: asymptotisches Verhalten bei Sättigungs- und Abklingfunktionen beschreiben und erklären; Unstetigkeitsstellen interpretieren
Clusterspezifische Kompetenzen (Cluster HTL 2)	
B_T2_4.2	Ableitungsfunktionen von Winkel- und Logarithmusfunktionen sowie von zusammengesetzten Funktionen berechnen; Quotientenregel anwenden
B_T2_4.3	Stammfunktionen von Winkel- und Exponentialfunktionen berechnen; Methode der linearen Substitution anwenden
B_T2_4.4	Differenzialrechnung im anwendungsbezogenen Kontext anwenden: modellieren, berechnen, interpretieren und damit argumentieren **siehe Kommentar**

$t \ldots$ Zeit in h

$f(t) \ldots$ Temperatur in °C zum Zeitpunkt t

Änderungsmaße

Eine Funktion f ist auf dem Intervall $[a;b]$ definiert.

1) **Absolute Änderung** von f in $[a;b]$: $\boldsymbol{f(b) - f(a)}$

2) **Relative Änderung** von f in $[a;b]$: $\dfrac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{f(a)}}$ mit $f(a) \neq 0$.

3) **Mittlere Änderungsrate** von f in $[a;b]$: $\dfrac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{b - a}}$ mit $a < b$.

1) Wie kann man $f(12) - f(8) = 7\,°\text{C}$ interpretieren?

2) Wie kann man $\dfrac{f(12) - f(8)}{f(8)} = 0{,}35$ interpretieren?

3) Wie kann man $\dfrac{f(12) - f(8)}{12 - 8} = 1{,}75\,°\text{C/h}$ interpretieren?

Beispiel 2.2. Die Fahrt einer U-Bahn zwischen zwei Stationen dauert 70 Sekunden.
Der Fahrtverlauf wird näherungsweise durch eine Weg-Zeit-Funktion s beschrieben:

$$s(t) = -\frac{2}{245} \cdot t^3 + \frac{6}{7} \cdot t^2$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden, $0 \leq t \leq 70$
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg in Metern nach t Sekunden

a) Berechne die Streckenlänge zwischen den Stationen.
b) Berechne die mittlere Änderungsrate von s in $[20; 50]$ und interpretiere sie im Kontext.

Die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v hat die folgende Gleichung:

$$v(t) = -\frac{6}{245} \cdot t^2 + \frac{12}{7} \cdot t$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden, $0 \leq t \leq 70$
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit in m/s nach t Sekunden

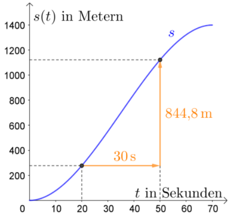
c) Berechne die Geschwindigkeit der U-Bahn nach 20 Sekunden.
d) Berechne die mittlere Geschwindigkeit der U-Bahn in den Zeiträumen
1) $[20; 30]$, **2)** $[20; 21]$, **3)** $[20; 20{,}1]$, **4)** $[20; 20{,}01]$. Vergleiche die Werte mit **c)**. Was fällt dir auf?
e) Berechne die mittlere Änderungsrate von v in $[10; 30]$ und interpretiere sie im Kontext.

a) Es ist $s(70) = 1400\,\text{m}$ und $s(0) = 0\,\text{m}$.
Die U-Bahn legt zwischen den beiden Stationen also $1400\,\text{m}$ zurück.

b) Die mittlere Änderungsrate von s in $[20; 50]$ ist

$$\frac{s(50) - s(20)}{50 - 20} = \frac{1122{,}4\ldots - 277{,}5\ldots}{50 - 20} = \frac{844{,}8\ldots\,\text{m}}{30\,\text{s}} = 28{,}16\ldots\,\text{m/s}.$$

Im Zeitraum $[20; 50]$ legt die U-Bahn pro Sekunde *durchschnittlich* $28{,}16\ldots\,\text{m}$ zurück.
Die *mittlere* Geschwindigkeit der U-Bahn im Zeitraum $[20; 50]$ ist $28{,}16\ldots\,\text{m/s}$.



c) Nach 20 Sekunden fährt die U-Bahn mit der Geschwindigkeit $v(20) = 24{,}48\ldots\,\text{m/s}$.

d) Die gesuchten mittleren Geschwindigkeiten sind

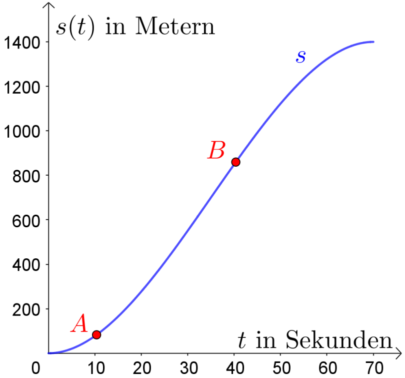
1) $\dfrac{s(30) - s(20)}{30 - 20} = 27{,}34\ldots\,\text{m/s}$, **2)** $24{,}84\ldots\,\text{m/s}$, **3)** $24{,}52\ldots\,\text{m/s}$, **4)** $24{,}49\ldots\,\text{m/s}$.

e) Die mittlere Änderungsrate von v in $[10; 30]$ ist

$$\frac{v(30) - v(10)}{30 - 10} = \frac{14{,}69\ldots\,\text{m/s}}{20\,\text{s}} = 0{,}734\ldots\,\text{m/s}^2.$$

Im Zeitraum $[10; 30]$ steigt die Geschwindigkeit der U-Bahn pro Sekunde *durchschnittlich* um $0{,}734\ldots\,\text{m/s}$. Die *mittlere* Beschleunigung der U-Bahn im Zeitraum $[10; 30]$ ist $0{,}734\ldots\,\text{m/s}^2$. □

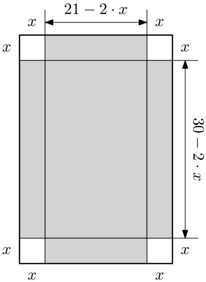
Weg-Geschwindigkeit-Beschleunigung

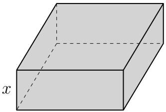


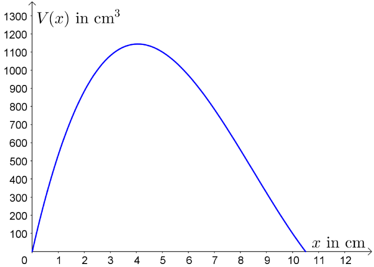
Ist die U-Bahn im Punkt A oder im Punkt B schneller?
Woran erkennst du das?

Optimierungsaufgaben

Rechteckiger Karton mit Seitenlängen $a = 21\,\text{cm}$ und $b = 30\,\text{cm}$







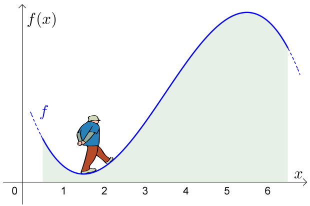
Das Volumen V der gefalteten Schachtel hängt von x ab.

Für welche Zahl x ist das Volumen so groß wie möglich?

Arbeitsblatt – Optimierungsaufgaben

Ein Funktionsgraph modelliert das Profil eines Hügels:

- Wo ist der tiefste Punkt?
- Wo ist der höchste Punkt?
- Wo geht es am steilsten bergauf?



Allgemein:
Wie misst man die **Steigung des Funktionsgraphen** in einem Punkt?

Steigungsmessung von Geraden

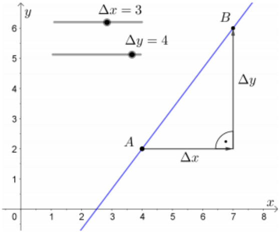
⇝ Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden

Steigungsdreieck

Die Gerade rechts verläuft durch die beiden Punkte

$$A = (4 \mid 2) \quad \text{und} \quad B = (4 + \Delta x \mid 2 + \Delta y).$$

Wir haben das zugehörige **Steigungsdreieck** eingezeichnet.

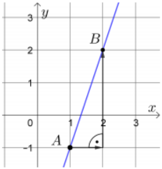


Streiche die falschen Antworten durch: $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$

Je größer Δy, desto steiler/flacher ist die Gerade.

Je größer Δx, desto steiler/flacher ist die Gerade.

Das Seitenverhältnis $\dfrac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}}$ nennen wir die **Steigung** der Geraden.



Bei der Gerade links ist ein Steigungsdreieck mit

$$\Delta x = \_\_\_\_ \quad \text{und} \quad \Delta y = \_\_\_\_$$

eingezeichnet. Welche Steigung hat die Gerade?

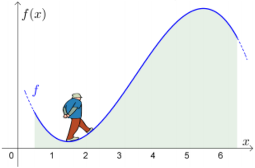
⇝ Arbeitsblatt – Differentialquotient

Steigungen berechnen

Der dargestellte Funktionsgraph modelliert das Profil eines Hügels:

- Wo ist der tiefste Punkt?
- Wo ist der höchste Punkt?
- Wo geht es am steilsten bergauf?

Mithilfe der Differentialrechnung finden wir *exakte* Antworten auf solche Fragestellungen.

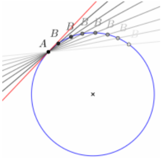


$$f(x) = -\frac{3}{16}\cdot x^3 + \frac{63}{32}\cdot x^2 - \frac{297}{64}\cdot x + \frac{2217}{640}$$

Wie können wir die **Steigung** des Funktionsgraphen in einem Punkt messen bzw. berechnen?

Von den Sekanten zur Tangente am Kreis

Wir stellen uns zwei Personen auf einem Kreis vor.
Anton steht fest. **B**arbara bewegt sich auf dem Kreis auf Anton zu.
Anton behält Barbara dabei fest im Blick.
In welche Richtung blickt Anton in dem Moment, wo Barbara ihn *trifft*?



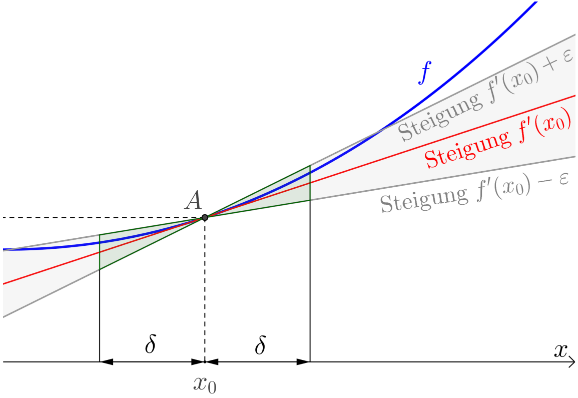
Weitere Ableitungen händisch berechnen

Warum gelten die folgenden Ableitungsregeln?

- $a(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Longrightarrow \quad a'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $b(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Longrightarrow \quad b'(x) = (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
- $c(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
- $d(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad d'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

Hinweis: $(a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) = a^3 - b^3$

Geometrische Interpretation von Differenzierbarkeit



Wie kann eine Funktion *nicht* differenzierbar sein?

Ableitungsregeln

Welche **Regeln** helfen beim Ermitteln von Ableitungen?

Funktion f	Ableitungsfunktion f'
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$$a(x) = 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3$$

$$b(x) = 2 \cdot x \cdot e^x$$

$$c(x) = \ln(x^2 + 42)$$

$$d(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} + 6$$

Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ mit $g(x) \neq 0$
Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

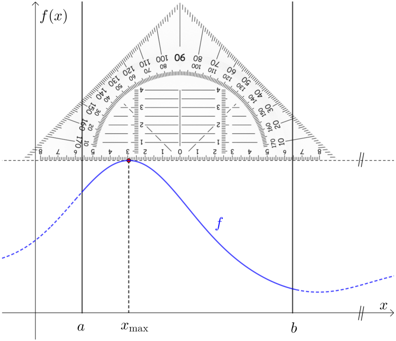
SRDP-Formelsammlung

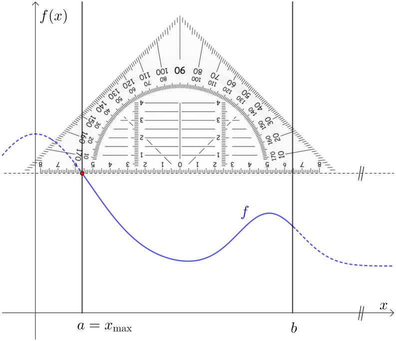
KH – Differenzieren I

First derivative test

f ist eine differenzierbare Funktion.

Gesucht ist eine Stelle $x_{\max}$ in $[a, b]$, an der
die Funktion f den *größten* Funktionswert annimmt.





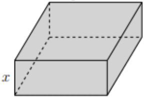
Welche Stellen in $[a, b]$ kommen dafür in Frage?

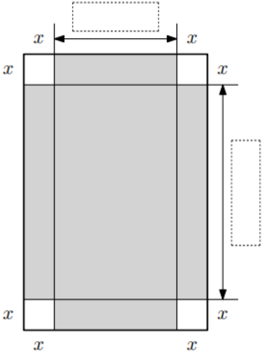
Optimierungsaufgaben

⇝ Arbeitsblatt – Optimierungsaufgaben

Volumen einer Schachtel maximieren

Aus einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen $a = 21\,\text{cm}$ und $b = 30\,\text{cm}$ wollen wir eine Schachtel mit möglichst großem Volumen falten. Dazu schneiden wir von den 4 Ecken jeweils ein Quadrat mit x cm Seitenlänge ab.





1) Ergänze die Längen im Bild links.

2) Für welche Werte von x können wir eine Schachtel falten?

$$\_\_\_\_\_\_ < x < \_\_\_\_\_\_$$

3) $V(x)\ldots$ Volumen der Schachtel in cm^3
Stelle eine Gleichung der Funktion V auf:

$V(x) =$ ____________________

⇝ Arbeitsblatt – Ableitungen höherer Ordnung

MATHEMATIK MACHT FREU(N)DE — AB – ABLEITUNGEN HÖHERER ORDNUNG

1. Ableitung und 2. Ableitung

$\boldsymbol{f'}$ ist die **Ableitungsfunktion von $\boldsymbol{f}$**. Wir sagen auch kurz: „f' ist die Ableitung von f."

Die Ableitung von f' – also $(f')'$ – nennen wir die **2. Ableitung von $\boldsymbol{f}$** und schreiben kurz $\boldsymbol{f''(x)}$.

Steigung und Monotonieverhalten

Mit Hilfe der ersten Ableitung f' untersuchen wir die **Steigung** und das **Monotonieverhalten** von f:

Die Tangente an f an der Stelle x_0 ist waagrecht.

$\iff \quad f'(x_0)$ ____ 0

Die Steigung von f an der Stelle x_0 ist positiv.

$\iff \quad f'(x_0)$ ____ 0

Die Steigung von f an der Stelle x_0 ist negativ.

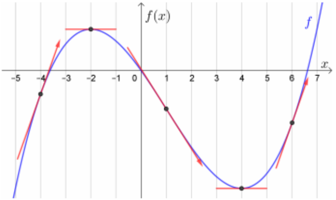
$\iff \quad f'(x_0)$ ____ 0

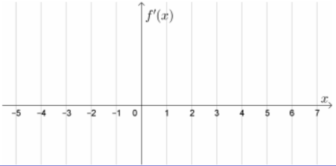
f ist monoton wachsend in $]a;b[$.

$\iff \quad f'(x)$ ____ 0 für alle x in $]a;b[$.

f ist monoton fallend in $]a;b[$.

$\iff \quad f'(x)$ ____ 0 für alle x in $]a;b[$.





⇝ Technologieblatt – Kurvenuntersuchungen

Funktionen definieren

Neue Objekte wie zum Beispiel Funktionen kannst du in GeoGebra in der Eingabezeile definieren:

$$p(x) = 6x^3 - 9x^2 + \tfrac{3}{2}x - 0{,}8$$

```
Eingabe: p(x):=6*x^3-9*x^2+3/2*x-0.8
```

⚠ Definiere Funktionen mit $:=$ und nicht mit $=$. In der Eingabezeile ist beides möglich, in der CAS-Ansicht nur $:=$.

⚠ Komma musst du als Punkt (.) eingeben und nicht als Beistrich (,).

⚠ Mache versteckte Multiplikationen mit Stern (*) sichtbar. $2x$ wird zwar zu $2 \cdot x$, aber ax ist eine Variable „ax".

Funktionswerte, Nullstellen, Minima, Maxima, Wendepunkte

Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = 6 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x - 0{,}8$.

a) Fülle die Wertetabelle aus.

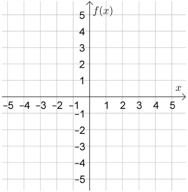
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$p(x)$							

b) Berechne die (reelle) Nullstelle von p.

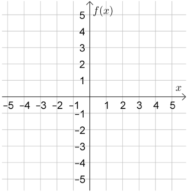
⇝ Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

Gib zu jeder Eigenschaft die zugehörige(n) Gleichung(en) an, und skizziere einen möglichen Funktionsgraphen.

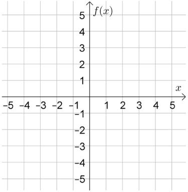
1) Der Funktionsgraph verläuft durch den Punkt $(1 \mid 4)$.



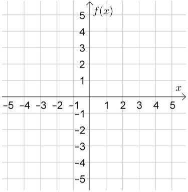
2) Die Funktion hat die Nullstelle $x = 3$.



3) Im Punkt $(2 \mid 1)$ hat f ein lokales Minimum.



4) Im Punkt $(-2 \mid 3)$ hat f ein lokales Maximum.



Newtonsches Näherungsverfahren

⇝ Arbeitsblatt – Newtonsches Näherungsverfahren

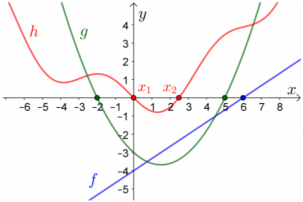
Wozu Näherungsverfahren?

Die Nullstellen von linearen Funktionen und quadratischen Funktionen können wir *exakt* berechnen.

Die Funktion h mit $h(x) = 0{,}1 \cdot x^2 - \sin(x)$ hat 2 Nullstellen. Die zugehörige Gleichung

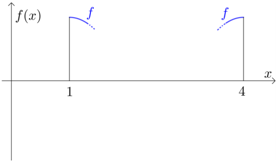
$$0 = 0{,}1 \cdot x^2 - \sin(x)$$

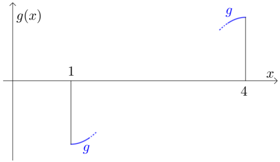
hat die Lösung $x_1 = 0$ und eine zweite Lösung x_2.
Wir können diese Gleichung aber *nicht* auf x umformen.



Zwischenwertsatz

Die Funktionen f und g sind im Intervall $[1;4]$ definiert und haben dort *keine* Nullstelle.
Vervollständige links und rechts die Funktionsgraphen *ohne* den Stift abzusetzen.





Feedback

1. Feedback zu den Materialien
2. Feedback zur Fortbildung
3. Evaluierung der Fortbildung
4. Weitere Fortbildungen?

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

Vielen herzlichen Dank für das Interesse!

Projekt-Homepage: mmf.univie.ac.at

E-Mail: lukas.riegler@univie.ac.at