Mathematik macht Freu(n)de
Kompetenzmaterialien

Dr. Lukas Riegler
Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair

PH NÖ – Pädagogische Hochschulwochen plus
27. August 2018

Mathematik macht Freu(n)de – Das Projekt

- Lehrveranstaltung
- Intensiv-Studienclubs

Karwoche 2018: 270 SchülerInnen, 47 Coaches

- Vorkurs Mathematik
- Akademie für Junglehrpersonen
- Mathematik-Olympiade
- Kompetenzmaterialien

Programmablauf

Vormittag:

- Konzept der Kompetenzmaterialien (Präsentation)
- Fallbeispiel: Arbeitsblatt – Rotationsvolumen
- Fallbeispiel: Technologieblatt – Umgekehrte Kurvendiskussion

Nachmittag:

- Aufbau der Kompetenzhefte
- Praktischer Einsatz der Materialien (Gruppenarbeit)
- Weiterentwicklung (Diskussion)

Warum? Wozu? Meine Erfahrungen...

- Unterrichtsvorbereitung mit Schulbüchern
- Unterrichtsvorbereitung mit Kompetenzheften
- Unterrichtsgestaltung mit Arbeitsblättern
- Effizienz
- Einsatzbereiche

Modularer Aufbau der Kompetenzmaterialien

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.
Sprechweise: „*a hoch n*“ oder manchmal die „*n-te Potenz von a*“

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Schreibweisen

Welche ganzen Zahlen verstecken sich hinter den folgenden Potenzen?

$2^3 =$ ____________ $3^2 =$ ____________ $5^1 =$ ____________

$1^5 =$ ____________ $0^2 =$ ____________ $(-1)^3 =$ ____________

Rechenregeln für Potenzen

Kannst du erklären, weshalb diese Rechenregeln gelten?

Denke zum Beispiel an $n = 3$ und $m = 2$.

1) $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$

2) $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Modularer Aufbau der Kompetenzmaterialien

 „Das muss ich lernen...“

 „Das kann ich verstehen und erklären...“

 „Hier soll ich aktiv werden...“

 „Hier hilft mir Technologie beim Verstehen...“

 „Hier kommt ein Kochrezept...“

 „Hier kann ich mich herausfordern...“

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.
Sprechweise: „*a hoch n*“ oder manchmal die „*n-te Potenz von a*“

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Laplace–Experiment

Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn es

1) nur endlich viele Ergebnisse gibt, also $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, und

2) jedes der endlich vielen Elementarereignisse gleich wahrscheinlich ist, also

$P(\{\omega_i\}) =$ ________ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Quotientenregel

Quotientenregel: $q(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)} \implies q'(x) = \dfrac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b(x)^2}$

Laplace-Experiment?

Welche der folgenden Zufallsexperimente sind Laplace-Experimente?

1) Ein Wurf mit einem Laplace-Würfel. Das Ergebnis des Zufallsexperiments ist die Augenzahl.

$\Omega =$ ____________________

2) So lange einen Laplace-Würfel werfen, bis zum ersten Mal ein Sechser gewürfelt wird. Das Ergebnis ist die Anzahl der benötigten Würfe.

$\Omega =$ ____________________

3) Eine Schachtel enthält 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. Eine Kugel wird blind gezogen. Das Ergebnis ist die Farbe der gezogenen Kugel.

$\Omega =$ ____________________

Rechenregeln für Potenzen

Kannst du erklären, weshalb diese Rechenregeln gelten?

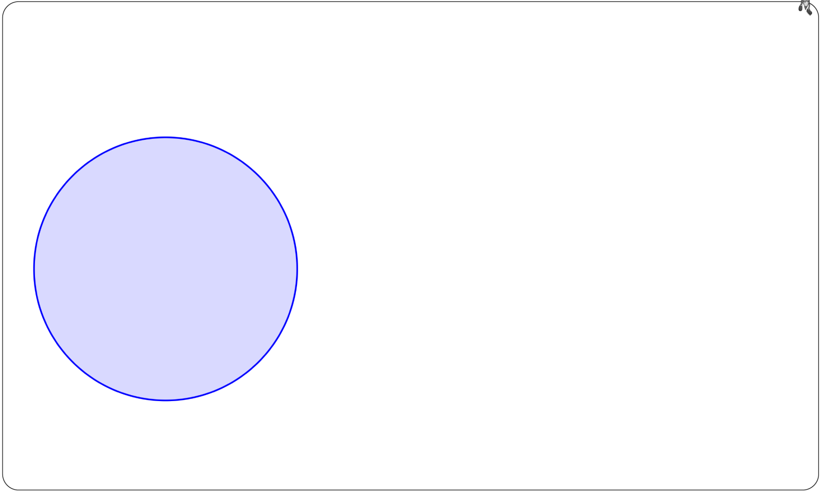
Denke zum Beispiel an $n = 3$ und $m = 2$.

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Quadratur des Kreises?!



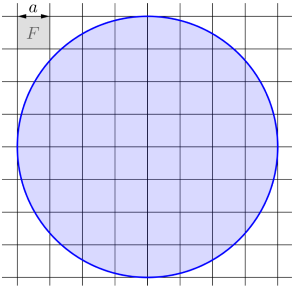
Welchen Flächeninhalt hat der Kreis ungefähr?

„Hier soll ich aktiv werden...“

Quadratur des Kreises?!

Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.
Die Seitenlänge a eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster unten ist $a =$ ________ cm.

Der Flächeninhalt F eines einzelnen Quadrats im Raster ist $F =$ ____________ cm^2.



Die Quadrate im Raster, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt U.

$U =$ ____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

U steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt O.

$O =$ ____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

O steht für **Obersumme**.

Der Flächeninhalt A des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme:

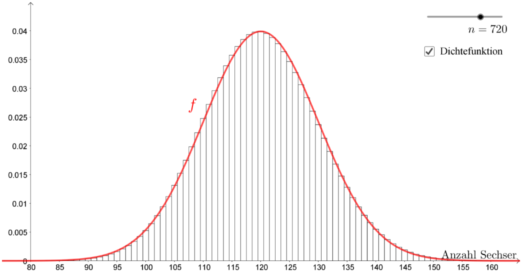
____ $\leq A \leq$ ____

Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung

Bei $n = 720$ Würfen nimmt das Säulendiagramm von S_{720} die folgende Form an:



Markiere eine Fläche, deren Inhalt die WS für mindestens 130 Sechser und höchstens 140 Sechser ist.

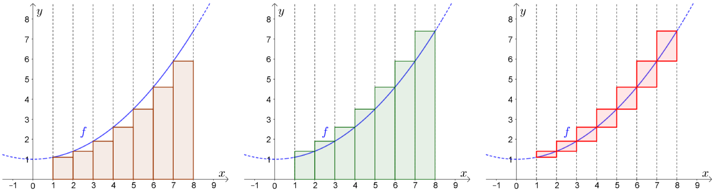
Wir haben hier auch den Graphen einer ganz bestimmten Funktion f eingezeichnet.
Dieser Graph schmiegt sich an das glockenförmige Profil des Säulendiagramms.
Wie würdest du mit f diese Wahrscheinlichkeit näherungsweise berechnen?

$$P(130 \leq S_{720} \leq 140) \approx$$

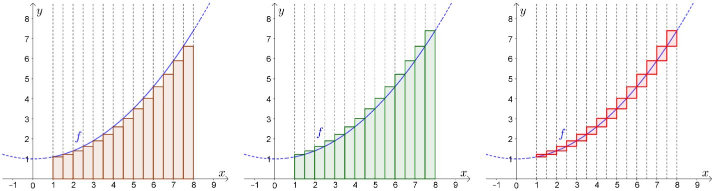
Arbeitsblatt: Normalverteilung

Verfeinerung

Die **Untersumme** im linken Bild ist $U = 21$. Die **Obersumme** im mittleren Bild ist $O = 27{,}3$.
Die Gesamtfläche der gefärbten „Fehlerrechtecke“ im rechten Bild ist $E =$ ____________ . *Error*



Wir verfeinern die Zerlegung, indem wir die Breite aller Rechtecke halbieren:



Ob wir wohl den Gesamtfehler beliebig klein machen können?

Roulette

Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Das Casino bietet folgendes Spiel an:
Man setzt einen Einsatz auf „Rot“ oder „Schwarz“. Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.

Lukas setzt 37 € auf „Rot“. Die Zufallsvariable X gibt seinen Gewinn nach Abzug vom Einsatz an.

1) Trage die möglichen Werte von X und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.

2) Berechne den Erwartungswert von X.

x_i	37 €	−37 €
$P(X = x_i)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

$$E(X) = 37\text{ €} \cdot \frac{18}{37} + (-37\text{ €}) \cdot \frac{19}{37} = 18\text{ €} - 19\text{ €} = -1\text{ €}$$

Interpretation des Erwartungswerts im Sachzusammenhang:
Wenn Lukas immer wieder 37 € auf „Rot“ setzt, dann sollte er auf lange Sicht einen durchschnittlichen Verlust von 1 € pro Spiel erwarten.

Arbeitsblatt: Zufallsvariablen und Erwartungswert

Sekantensteigung mit Technologieeinsatz

$f(x) = x^2$, $x_0 = 1$

h	1	0,5	0,1	0,01
Steigung				

Die Steigung der Sekanten scheint sich auf den Wert ____ hinzubewegen, wenn $h \to 0$.

$f(x) = x^3$, $x_0 = 1$

h	-1	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$
Steigung				

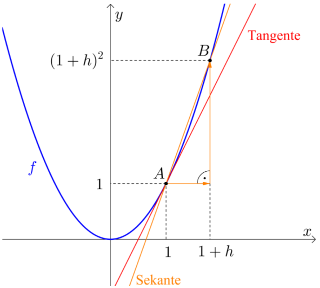
Die Steigung der Sekanten scheint sich auf den Wert ____ hinzubewegen, wenn $h \to 0$.

Tangente an eine Parabel

Welche Steigung hat $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$?

1) Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (1 \mid f(1))$ und $B = (1 + h \mid f(1 + h))$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} =$$



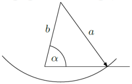
„Hier kommt ein Kochrezept...“

a) Eine Seitenlänge und zwei Winkel bekannt:

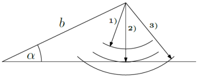
- Dritter Winkel mit Winkelsumme 180°.
- Seitenlängen mit Sinussatz.

b) Zwei Seitenlängen und jener Winkel, der der längeren Seite gegenüberliegt, bekannt:

- Zweiter Winkel mit Sinussatz. Dieser Winkel ist sicher spitz.
- Dritter Winkel mit Winkelsumme 180°.
- Dritte Seitenlänge mit Sinussatz.



c) Zwei Seitenlängen und jener Winkel, der der kürzeren Seite gegenüberliegt, bekannt:



1) Sinussatz $\rightsquigarrow$ DOMAIN Error $\implies$ keine Lösung.

2) Sinussatz $\rightsquigarrow$ $\beta = 90°$ $\implies$ eine Lösung.

3) Sinussatz $\rightsquigarrow$ spitzer Winkel β $\implies$ zwei Lösungen ($\beta_2 = 180° - \beta$).

d) Zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel bekannt:

- Dritte Seitenlänge mit Cosinussatz.
- Spitzer Winkel mit Sinussatz. Der Winkel gegenüber der kürzeren Seite ist sicher spitz.
- Dritter Winkel mit Winkelsumme 180°.

e) Drei Seitenlängen bekannt:

- Größter Winkel mit Cosinussatz.
- Zweiter Winkel mit Sinussatz oder Cosinussatz. Dieser Winkel ist sicher spitz.
- Dritter Winkel mit Winkelsumme 180°.

Arbeitsblatt: Allgemeines Dreieck

„Hier kann ich mich herausfordern…“

Ableitung von $f(x) = x^3$

Welche Steigung hat $f(x) = x^3$ an der Stelle x_0?

1) Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$:

1
1 **1**
1 **2** 1
1 **3** 3 1
1 **4** 6 4 1

2) Steigung der Tangente an der Stelle x_0:

$f'(x_0) =$

3) Die Ableitung der kubischen Funktion $f(x) = x^3$ ist $f'(x) =$ ________ .

Ableitung von $f(x) = x^n$

Michael erkennt ein Muster beim Differenzieren von Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Die Ableitung von $a(x) = x^{42}$ ist $a'(x) =$ ________ .

Kannst du erklären, warum das so ist?

Arbeitsblatt: Differentialquotient

„Hier kann ich mich herausfordern...“

Ableitung von $f(x) = x^3$

Welche Steigung hat $f(x) = x^3$ an der Stelle x_0?

1) Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (x_0 \mid f(x_0))$ und $B = (x_0 + h \mid f(x_0 + h))$:

$$\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{x_0^3 + 3\cdot x_0^2\cdot h + 3\cdot x_0\cdot h^2 + h^3 - x_0^3}{h} =$$

$$= \frac{h\cdot(3\cdot x_0^2 + 3\cdot x_0\cdot h + h^2)}{h} =$$

$$= 3\cdot x_0^2 + 3\cdot x_0\cdot h + h^2$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

2) Steigung der Tangente an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(3\cdot x_0^2 + 3\cdot x_0\cdot h + h^2) = 3\cdot x_0^2$$

3) Die Ableitung der kubischen Funktion $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3\cdot x^2$.

Ableitung von $f(x) = x^n$

Michael erkennt ein Muster beim Differenzieren von Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Die Ableitung von $a(x) = x^{42}$ ist $a'(x) = 42\cdot x^{41}$.

Kannst du erklären, warum das so ist?

Arbeitsblatt: Differentialquotient

Kompetenzmaterialien

- Themenbereiche der Sekundarstufe II

- Uneingeschränkter, kostenloser Download
  https://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at

- Creative Commons Lizenz

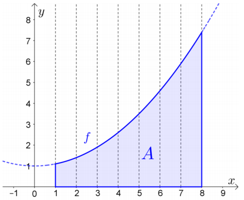
Arbeitsblätter

- 28 Arbeitsblätter
- Unterrichtsgestaltung
- Ausarbeitungen
- Effizienz

Arbeitsblätter	Letzte Änderung
Ähnlichkeit und Winkelfunktionen	03.02.2017
Allgemeines Dreieck (Ausarbeitung)	03.02.2017
Baumdiagramme (Ausarbeitung)	23.03.2018
Bestimmtes Integral (Ausarbeitung)	30.06.2018
Binomialverteilung (Ausarbeitung)	18.04.2018
Differentialquotient (Ausarbeitung)	30.06.2018
Exponentialfunktionen (Ausarbeitung)	19.08.2018
Graphen der Winkelfunktionen (Ausarbeitung)	19.08.2018
Grenzwerte	12.01.2018
Kombinatorik (Ausarbeitung)	08.03.2018
Kulturtechnik Integration (Ausarbeitung)	30.06.2018
Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Ausarbeitung)	30.06.2018
Mittelwertsatz der Integralrechnung (Ausarbeitung)	30.06.2018
Newtonsches Näherungsverfahren	03.02.2017
Normalverteilung (Ausarbeitung)	21.06.2018
Pascalsches Dreieck	27.09.2017
Physikalische Anw. der Diff.- und Int.rechnung (Ausarbeitung)	30.06.2018
Potenzen und Wurzeln (Ausarbeitung)	19.08.2018
Rotationsvolumen (Ausarbeitung)	30.06.2018
Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme (Ausarbeitung)	21.06.2018
Statistische Kenngrößen und Boxplot (Ausarbeitung)	21.06.2018
Steigungsmessung von Geraden	22.08.2017
Stetigkeit (Ausarbeitung)	30.06.2018
Vektorrechnung im Raum (Ausarbeitung)	02.05.2018
Vektorrechnung in der Ebene (Ausarbeitung)	02.05.2018
Winkelfunktionen am Einheitskreis (Ausarbeitung)	19.08.2018
Zufallsexperimente (Ausarbeitung)	23.03.2018
Zufallsvariablen und Erwartungswert (Ausarbeitung)	23.03.2018

Annäherung durch Rechtecksfiguren

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen die Fläche A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Die Fläche eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



Wie groß ist die Fläche A also mindestens? Wie groß ist die Fläche A also höchstens?

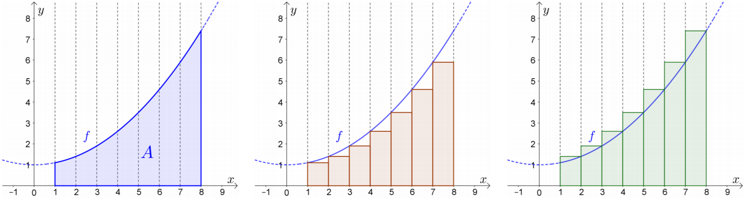
x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

__________ $\leq A \leq$ __________

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

Annäherung durch Rechtecksfiguren

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen die Fläche A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Die Fläche eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



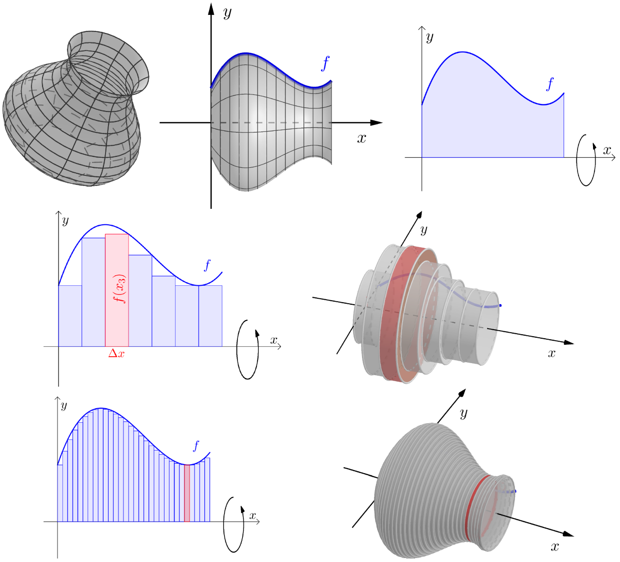
Wie groß ist die Fläche A also mindestens? Wie groß ist die Fläche A also höchstens?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1,1	1,4	1,9	2,6	3,5	4,6	5,9	7,4

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(7) = 21 \leq A \leq f(2) + f(3) + \cdots + f(8) = 27{,}3$$

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

Fallbeispiel: Arbeitsblatt – Rotationsvolumen

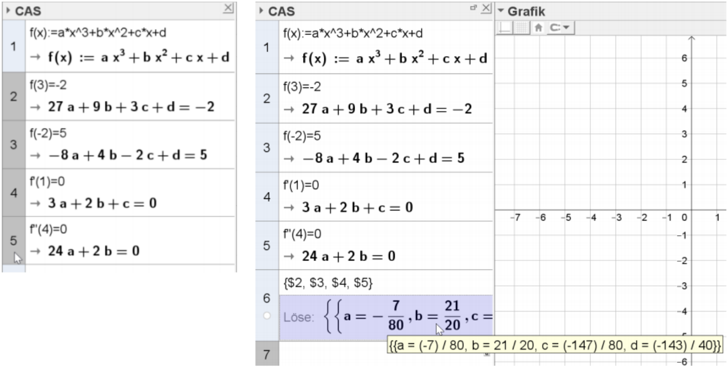


Arbeitsblatt: Rotationsvolumen (Ausarbeitung)

Fallbeispiel: TB – Umgekehrte Kurvendiskussion

1) Unter Ansicht die CAS-Ansicht öffnen. Die Funktionsgleichung und Gleichungen eingeben.

2) Das Gleichungssystem (Zeilen 2-5) mit der Maus markieren (Maustaste gedrückt halten).
GeoGebra löst das Gleichungssystem mit Klick auf $x=$ exakt oder mit Klick auf $x\approx$ näherungsweise.



Um alle Koeffizienten zu sehen, entweder das CAS-Fenster verbreitern oder mit dem Mauszeiger auf die Lösung zeigen.

3) Falls wir den Funktionsgraphen zur Kontrolle sehen möchte oder mit der Funktion weiterrechnen möchten: Lösungsliste (Zeile 6) mit der Maus in die Funktionsgleichung (Zeile 1) ziehen (Drag & Drop).

Technologieblatt: Umgekehrte Kurvendiskussion (Ausarbeitung)

Kompetenzhefte

- 22 Kompetenzhefte
- Unterrichtsvorbereitung
- Zielgruppen
- Unterscheidungen zu Schulbüchern

Kompetenzhefte	Letzte Änderung
Differenzieren I (Sekanten, Tangenten, Ableitungsregeln)	30.06.2018
Differenzieren II (Kurvenuntersuchungen, Phys. Anwendungen)	30.06.2018
Exponential- und Logarithmusfunktionen	19.08.2018
Folgen und Reihen	12.01.2018
Grenzwerte	12.01.2018
Integrieren I (Bestimmtes Integral, Phys. Anwendungen)	30.06.2018
Integrieren II (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)	30.06.2018
Integrieren III (Volumen, Bogenlänge, Linearer Mittelwert)	30.06.2018
Kombinatorik	04.04.2018
Komplexe Zahlen	31.03.2017
Lineare Funktionen	23.09.2017
Quadratische Funktionen	16.03.2017
Stammfunktionen	03.02.2017
Statistik I (Statistische Kenngrößen, Boxplot, Diagramme)	21.06.2018
Stochastik I (Laplace, Zufallsvariablen, Baumdiagramme)	20.04.2018
Stochastik II (Binomialverteilung)	27.03.2018
Stochastik III (Normalverteilung)	21.06.2018
Trigonometrie I (Ähnliche Dreiecke, Rechtwinkliges Dreieck)	21.04.2017
Trigonometrie II (Einheitskreis, Allgemeine Winkelfunktionen)	19.08.2018
Trigonometrie III (Allgemeines Dreieck, Summensätze)	03.02.2017
Vektorrechnung im Raum	05.07.2017
Vektorrechnung in der Ebene	04.04.2018

Aufbau der Kompetenzhefte

- Diagnoseaufgaben
- Erklärungen
- Weitere Aufgabenstellungen
- Orientierung an SRDP-Aufgaben

KOMPETENZHEFT – TRIGONOMETRIE II

INHALTSVERZEICHNIS

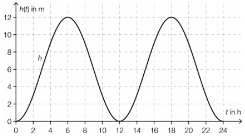
1.	Diagnoseaufgaben	1
2.	Winkelfunktionen am Einheitskreis	6
3.	Funktionsgraphen der Winkelfunktionen	8
4.	Allgemeine Sinusfunktion	11
5.	Goniometrische Gleichungen	13
6.	Weitere Aufgabenstellungen	18

1. DIAGNOSEAUFGABEN

Aufgabe 1.1. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Ebbe und Flut beeinflussen die Höhe des Meeresspiegels.

a) Der tiefste Wasserstand wird als Niedrigwasser bezeichnet.
Die zeitliche Abhängigkeit der Höhe des Wasserstands über diesem Wert kann näherungsweise durch eine Funktion h mit $h(t) = A + B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden.

Dabei ist t die Zeit in Stunden und $B > 0$.
- Lesen Sie aus dem Diagramm die Parameter A und B ab.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms den Parameter ω.
- Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms den Parameter φ.



Kompetenzheft: Trigonometrie II

Praktischer Einsatz der Materialien

Exponential- und Logarithmusfunktionen

- KH – Exponential- und Logarithmusfunktionen
- AB – Potenzen und Wurzeln
- AB – Exponentialfunktionen

Vektorrechnung

- KH – Vektorrechnung in der Ebene
- AB – Vektorrechnung in der Ebene

Trigonometrie II

- KH – Trigonometrie II
- AB – Winkelfunktionen am Einheitskreis
- AB – Graphen der Winkelfunktionen

Stochastik I

- KH – Stochastik I
- AB – Zufallsexperimente
- AB – Zufallsvariablen und Erwartungswert
- AB – Baumdiagramme

Differenzieren I

- KH – Differenzieren I
- AB – Differentialquotient

Integrieren I

- KH – Integrieren I
- AB – Kulturtechnik Integration
- AB – Bestimmtes Integral

Praktischer Einsatz der Materialien

Einteilung in Arbeitsgruppen nach Themengebieten

Arbeitsauftrag:

1. Sichtung der zugehörigen Kompetenzmaterialien
2. Unterrichtskonzept skizzieren
3. Feedback zu den Materialien
4. Präsentation der Ergebnisse

Qualitätssicherung

Zusammenarbeit von

- Mathematik-Forschenden
- Mathematik-Lehrenden
- Mathematik-Lernenden

Diskussion:

- Weiterentwicklung der Materialien
- Fehlende Themenbereiche
- Weitere Einsatzgebiete
- ...

Vielen herzlichen Dank für das Interesse!

Projekt-Homepage: https://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at

E-Mail: lukas.riegler@tgm.ac.at