Wahrscheinlichkeitsrechnung macht Freu(n)de

Dr. Lukas Riegler
Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair

Fortbildung
28. August 2019

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

universität wien

Programmablauf

Vormittag:

- Mathematik macht Freu(n)de
- Kompetenzmaterialien
- Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht
- Kombinatorik
- Laplace-Experimente & Wahrscheinlichkeitsräume

Nachmittag:

Wünsche?

- Zufallsvariablen
- Mehrstufige Zufallsexperimente / Baumdiagramme
- Binomialverteilung
- Normalverteilung
- Konfidenzintervalle

Programmablauf

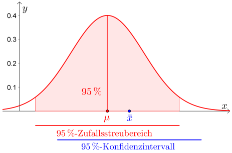
Vormittag:

- Mathematik macht Freu(n)de
- Kompetenzmaterialien
- Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht
- Kombinatorik
- Laplace-Experimente & Wahrscheinlichkeitsräume

Nachmittag:

Wünsche?

- Zufallsvariablen
- Mehrstufige Zufallsexperimente / Baumdiagramme
- Binomialverteilung
- Normalverteilung
- Konfidenzintervalle



Mathematik macht Freu(n)de – Das Projekt

- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- Kompetenzmaterialien
- Intensiv-Studienclubs
- Vorkurs Mathematik
- Mathematik-Olympiade

Newsletter für Lehrpersonen ⇝ http://mmf.univie.ac.at/aktuelles

Kompetenzmaterialien

- Themenbereiche der Sekundarstufe II
  - Funktionen & Analysis
  - Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik
  - Algebra & Geometrie
- Orientierung an SRDP-Aufgaben

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

- Praxiserprobt
  - MmF-Förderformate
  - Schulunterricht
- Uneingeschränkter, kostenloser Download
  https://mmf.univie.ac.at/materialien
- Creative Commons Lizenz

Kompetenzhefte

- 24 Kompetenzhefte (KH)
- Typischer Aufbau der Kompetenzhefte
  - SRDP-Aufgaben
  - Erklärungen
  - Weitere Aufgabenstellungen
- Zielgruppen

KOMPETENZHEFT – STOCHASTIK II

INHALTSVERZEICHNIS

- 50 Arbeitsblätter (AB)
- 4 Technologieblätter (TB)
- 5 Übungsblätter (UB)

- Unterrichtsgestaltung
- Ausarbeitungen
- Effizienz

MATHEMATIK MACHT FREU(N)DE — AB – KOMBINATORIK

Schifferl versenken

Wie viele Paare $(☺, \star)$ gibt es, bei denen ☺ ein Buchstabe aus $\{A, B, C, \dots, Z\}$ und $\star$ eine Ziffer aus $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ist?

Im Raster rechts ist zum Beispiel das Paar $(C, 2)$ markiert.

Die Anzahl verschiedener Paare ist ____________ .

	A	B	C	D	$\cdots$	W	X	Y	Z
1					$\cdots$				
2			•		$\cdots$				
3					$\cdots$				
$\vdots$		$\vdots$					$\vdots$		
9					$\cdots$				

Modularer Aufbau

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Sprechweise: „*a hoch n*“ oder manchmal die „*n-te Potenz von a*“

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Schreibweisen

Welche ganzen Zahlen verstecken sich hinter den folgenden Potenzen?

$2^3 =$ ______ $3^2 =$ ______ $5^1 =$ ______

$1^5 =$ ______ $0^2 =$ ______ $(-1)^3 =$ ______

Rechenregeln für Potenzen

Kannst du erklären, weshalb diese Rechenregeln gelten?

Denke zum Beispiel an $n = 3$ und $m = 2$.

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Was kann ich verstehen? Was soll ich lernen?

Modularer Aufbau

 „Es ist, was es ist. Das muss ich lernen."

 „Das kann ich verstehen und erklären."

 „Hier soll ich aktiv werden."

 „Hier hilft mir Technologie beim Verstehen."

 „Hier kommt ein Kochrezept."

„Diese Formel finde ich in der Formelsammlung."

 „In diese Falle tappe ich nicht."

 „Hier kann ich mich herausfordern."

 „Hier kann ich eine mathematische Idee nachvollziehen."

Vorschlag für Aufbau im Unterricht:

1. Kombinatorik
2. Laplace-Experimente
3. Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume
4. Zufallsvariablen
5. Mehrstufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme
6. Binomialverteilung
7. Normalverteilung
8. Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle

Grundkompetenzen (AHS)

WS 2.1	Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können
WS 2.2	relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können
WS 2.3	Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können
WS 2.4	Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können
WS 3.1	die Begriffe *Zufallsvariable, (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung, Erwartungswert* und *Standardabweichung* verständig deuten und einsetzen können
WS 3.2	Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen
WS 3.3	Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann
WS 3.4	Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können
WS 4.1	Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekannten Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können

Deskriptoren (BHS)

Teil A:

5.3	den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace verstehen und anwenden; den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten verstehen und anwenden
5.4	mehrstufige Zufallsexperimente („Ziehen mit/ohne Zurücklegen") mit Baumdiagrammen modellieren, Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Pfadregeln (Additions- und Multiplikationssatz) berechnen und Baumdiagramme interpretieren und damit argumentieren
5.5	mit der Binomialverteilung modellieren, ihre Anwendung begründen, Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswert berechnen und die Ergebnisse kontextbezogen interpretieren
5.6	mit der Wahrscheinlichkeitsdichte und der Verteilungsfunktion der Normalverteilung modellieren, Wahrscheinlichkeiten und Quantile berechnen* und die Ergebnisse kontextbezogen interpretieren, Erwartungswert μ und Standardabweichung σ interpretieren und deren Auswirkungen auf den Graphen der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte erklären **siehe Kommentar**

Teil B:

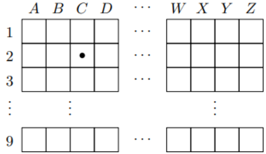
B_T_5.1	Normalverteilung: Zusammenhang zwischen der Dichte- und der Verteilungsfunktion verstehen und anwenden, Erwartungswert μ bzw. Standardabweichung σ bei bekannten Bedingungen (Wahrscheinlichkeit, Intervallgrenzen) ermitteln
B_T_5.2	Verteilung des Stichprobenmittelwertes normalverteilter Werte: modellieren, berechnen, interpretieren und erklären
B_T_5.3[1]	Schätzwerte für Verteilungsparameter (μ, σ) bestimmen; zweiseitige Konfidenzintervalle für den Erwartungswert μ einer normalverteilten Zufallsvariablen: modellieren, berechnen, interpretieren und erklären **siehe Kommentar**

Schifferl versenken

Wie viele Paare $(☺, \star)$ gibt es, bei denen ☺ ein Buchstabe aus $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ und $\star$ eine Ziffer aus $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ ist?

Im Raster rechts ist zum Beispiel das Paar $(C, 2)$ markiert.

Die Anzahl verschiedener Paare ist ____________ .



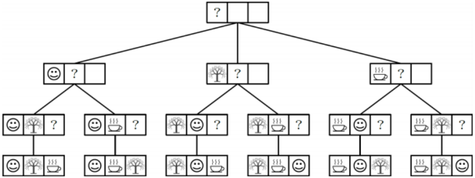
Anordnungen

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 unterscheidbare Objekte ☺, 🌳 und ☕ in einer Reihe anzuordnen?

1) Für die erste Position gibt es **3** Möglichkeiten.

2) *Unabhängig* von der ersten Entscheidung gibt es für die zweite Position **2** Möglichkeiten.

3) *Unabhängig* von den ersten beiden Entscheidungen gibt es **1** Möglichkeit für die dritte Position.



Die Anzahl möglicher Anordnungen von 3 unterscheidbaren Objekten in einer Reihe beträgt also

____

Weitere Aufgaben im . . .

KOMPETENZHEFT – KOMBINATORIK

INHALTSVERZEICHNIS

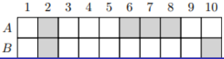
1. AUFGABENSTELLUNGEN

Aufgabe 1.1. Wie viele natürliche Zahlen mit den folgenden Eigenschaften gibt es?

a) Die Zahl hat 9 Stellen, wobei jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal enthalten ist.
b) Die Zahl hat 5 Stellen, wobei alle Ziffern verschieden sind.
c) Die Zahl hat 6 Stellen, wobei die beiden mittleren Ziffern gleich sind.

Aufgabe 1.2. Beim Spiel *Schiffe versenken* zeichnet jeder Spieler in ein 10×10-Raster folgende Schiffe ein: Die Schiffe dürfen (auch diagonal) nicht aneinander grenzen. Eine mögliche Startaufstellung ist dargestellt.

- ein Schiff mit 5 Kästchen
- zwei Schiffe mit 4 Kästchen
- drei Schiffe mit 3 Kästchen



Arbeitsblatt – Laplace-Experimente

Verhältnisse

Verhältnisse „a zu b“ werden bei Glücksspielen auf 2 unterschiedliche Arten verwendet:

1) Gewinnwahrscheinlichkeit $1 : 6$ („günstig zu möglich“)

Zum Beispiel: Du möchtest mit einem gewöhnlichen Spielwürfel einen Sechser würfeln. Es gibt 6 mögliche Würfelergebnisse. Nur 1 Ergebnis davon ist für dich günstig. Umgangssprachlich sagt man: „Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist 1 zu 6.“

2) Chance $50 : 50$ („günstig zu ungünstig“)

Zum Beispiel: Du wirfst eine gewöhnliche Münze und möchtest, dass die Münze auf der Seite „Zahl“ landet. Es gibt also 1 günstige Seite und 1 ungünstige Seite. Umgangssprachlich sagt man: „Die Chancen stehen 50 zu 50.“

In der Wahrscheinlichkeitstheorie meinen wir bei Verhältnissen immer **1)**, also „günstig zu möglich“.

Gewinnwahrscheinlichkeiten

Ein **Laplace-Würfel** ist ein fairer 6-seitiger Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

Wir sagen auch: „Der Würfel hat die *Augenzahlen* von 1 bis 6.“

Fair bedeutet, dass jede der 6 Seiten gleich wahrscheinlich ist: „1 zu 6“ $= 1 : 6$ „günstig zu möglich“

a) Du wirfst einen Laplace-Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, …

…eine gerade Zahl zu würfeln?
„ ____ zu 6 “ = ____ : 6

…mindestens die Augenzahl 2 zu würfeln?
„ ____ zu 6 “ = ____ : 6

b) Du wirfst 2 Laplace-Würfel und berechnest die Summe der beiden Augenzahlen. („Augensumme“)

Trage in der Tabelle rechts die Augensummen ein.

In der ersten Zeile ist die Augenzahl vom 1. Würfel.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀						

Arbeitsblatt – Zufallsexperimente

Ergebnisse & Ereignisse

Ein **Zufallsexperiment** kann verschiedene **Ergebnisse** haben.
Die Menge der möglichen Ergebnisse nennen wir **Ergebnisraum** und schreiben dafür kurz Ω.
Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge von Ω. Ein **Elementarereignis** besteht aus nur einem Ergebnis.

Zufallsexperimente

a) Beim Wurf einer Münze gibt es ____ mögliche Ergebnisse:

$$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$$

Elementarereignis: $A = \{\text{Kopf}\}$ = „Münze zeigt Kopf.“

b) Beim Wurf eines gewöhnlichen Spielwürfels gibt es ____ mögliche Ergebnisse:

Ω = {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

Ereignis: G = {⚁, ⚃, ⚅} = „Würfel zeigt ________ Augenzahl.“

c) Beim Roulette sind auf einer Scheibe 37 Felder mit den Zahlen von 0 bis 36 nummeriert.
Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün.
Mit einer Kugel wird ein Feld zufällig ausgewählt. Es gibt ____ mögliche Ergebnisse:

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$$

Zufallsvariable

Wir führen ein Zufallsexperiment mit Ergebnisraum Ω durch.
Eine **Zufallsvariable** $\boldsymbol{X}$ ordnet jedem möglichen Ergebnis in Ω einen Zahlenwert zu.

Formal ist eine Zufallsvariable eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Der Wert einer Zufallsvariable hängt also vom Ergebnis des Zufallsexperiments ab.

Laplace-Experiment

„Würfle mit einem fairen 6-seitigen Würfel und gewinne das 10-fache der gewürfelten Augenzahl in €.“
Dieses Spiel können wir mathematisch als Zufallsexperiment mit einer Zufallsvariablen modellieren:

Zufall 

$\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$ — mögliche Ergebnisse

z. B. ⚄ — Ergebnis des Zufallsexperiments $\xrightarrow{\text{Zufallsvariable } X}$ $X($⚄$) = 50$ €

Die Zufallsvariable X gibt in unserem Spiel also den Gewinn in € an. Fülle die Tabelle aus:

ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$P(\{\omega_i\})$						
$X(\omega_i)$						

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel genau 50 € zu gewinnen?

$P(X = 50\text{ €}) =$

$X = 50$ € ist formal das Ereignis, dass X den Wert 50 € annimmt: $\{$⚄$\}$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel mehr als 42 € zu gewinnen?

Weitere Aufgaben im . . .

KOMPETENZHEFT – STOCHASTIK I

INHALTSVERZEICHNIS

1. AUFGABENSTELLUNGEN

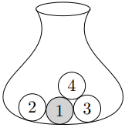
Aufgabe 1.1. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Die Österreichischen Lotterien bieten eine Onlineform des Briefloses an. Ein Online-Brieflos kostet 1 €. Die Höhe und die Anzahl der Gewinne können der nachstehenden Tabelle entnommen werden.

Gewinne in €	100 000	10 000	1 000	500	100	10	2	1
Anzahl	3	10	50	100	2 000	21700	400 000	1 400 000

Insgesamt wurden 6,6 Millionen Online-Lose aufgelegt.

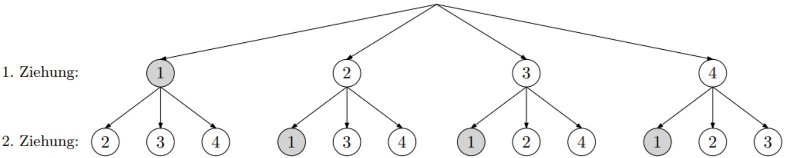
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass jemand beim Online-Kauf eines einzelnen Loses
(i) genau seinen Spieleinsatz in Höhe von 1 € zurückgewinnt,
(ii) einen höheren Gewinn als den Lospreis erzielt.

Bsp: In einer Urne befinden sich eine graue Kugel und drei weiße Kugeln, die durchnummeriert sind. Du ziehst blind zweimal hintereinander eine Kugel. Die gezogenen Kugeln legst du dabei *nicht* zurück. Kurz gesagt: „Ziehen *ohne* Zurücklegen"
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln weiß sind?



Zweistufiges Zufallsexperiment

Die möglichen Abläufe des Zufallsexperiments sind im folgenden Baumdiagramm dargestellt:



Es gibt insgesamt ____________ verschiedene Abläufe, die alle gleich wahrscheinlich sind.

Es handelt sich also um ein Laplace-Experiment.

Markiere alle Abläufe, bei denen beide gezogenen Kugeln weiß sind.

Es gibt insgesamt ____________ verschiedene Abläufe, bei denen beide Kugeln weiß sind.

Berechne damit die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln weiß sind:

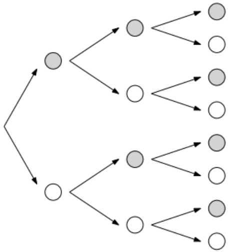
$$\frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}} =$$

Arbeitsblatt – Binomialverteilung

Ziehen mit Zurücklegen

In einer Urne befinden sich 6 graue und 4 weiße Kugeln. Du ziehst 3 Mal hintereinander eine Kugel. Jede gezogene Kugel legst du gleich wieder zurück in die Urne. „Ziehen *mit* Zurücklegen“

a) Beschrifte die Kanten des Baumdiagramms mit den Wahrscheinlichkeiten.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für jeden möglichen Ablauf. 1. Pfadregel



$\Longrightarrow P(\bullet\bullet\bullet) =$

$\Longrightarrow P(\bullet\bullet\circ) =$

$\Longrightarrow P(\bullet\circ\bullet) =$

$\Longrightarrow P(\bullet\circ\circ) =$

$\Longrightarrow P(\circ\bullet\bullet) =$

$\Longrightarrow P(\circ\bullet\circ) =$

$\Longrightarrow P(\circ\circ\bullet) =$

$\Longrightarrow P(\circ\circ\circ) =$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 graue Kugeln zu ziehen? 2. Pfadregel

Weitere Aufgaben im . . .

KOMPETENZHEFT – STOCHASTIK II

INHALTSVERZEICHNIS

1. AUFGABENSTELLUNGEN

Aufgabe 1.1. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG Nach Karl Landsteiner unterscheidet man vier Blutgruppen: 0, A, B und AB. Diese kommen in Österreich annähernd mit folgender relativer Häufigkeit vor:

Blutgruppe	0	A	B	AB
relative Häufigkeit	37 %	41 %	15 %	7 %

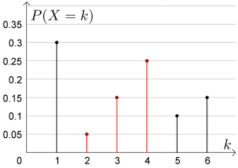
a) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Zufallsstichprobe von 25 Personen in Österreich mindestens 9 Personen die Blutgruppe 0 haben.

b) Zusätzlich wird je nach Vorliegen eines bestimmten Antigens noch zwischen *Rhesus-positiv* und *Rhesus-negativ* unterschieden. 85 % aller Personen in Österreich sind Rhesus-positiv, alle anderen

Arbeitsblatt – Normalverteilung

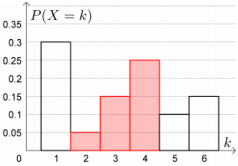
Wahrscheinlichkeiten als Flächeninhalte

Eine Zufallsvariable X kann die Werte 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 annehmen. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind rechts in einem Stabdiagramm dargestellt. Trage die Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle ein.



k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$						

Wir wandeln das Stabdiagramm *clever* in ein Säulendiagramm um. Dazu ersetzen wir jeden Stab jeweils durch ein Rechteck derselben Höhe und der Breite 1. Das Ergebnis ist rechts dargestellt:



Der **Flächeninhalt** jeder Säule ist also genau die entsprechende **Wahrscheinlichkeit**. $1 \cdot P(X = k) = P(X = k)$

Wir können die Achsen unabhängig voneinander skalieren.

Die *tatsächlichen* Breiten und Höhen der Säulen – und damit der Flächeninhalt – bleiben unverändert:

Die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq X \leq 4)$ ist in jedem der drei Bilder rot hervorgehoben. Es gilt:

Weitere Aufgaben im . . .

KOMPETENZHEFT – STOCHASTIK III

INHALTSVERZEICHNIS

1. AUFGABENSTELLUNGEN

Aufgabe 1.1. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

a) Laut einer Umfrage in Deutschland hätten 73,5...% der Autobesitzer/innen auf ihrem Auto gerne ein Wunschkennzeichen. Es werden 8 zufällig ausgewählte Autobesitzer/innen befragt, ob sie ein Wunschkennzeichen wollen.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens die Hälfte der Befragten für ein Wunschkennzeichen ausspricht.

Konfidenzintervalle

1. Ziel: Schätzung eines unbekannten Parameters
   a. AHS: relativer Anteil p einer Grundgesamtheit

      Zum Beispiel: relativer Anteil der WählerInnen einer bestimmten Partei
   b. BHS: Erwartungswert μ einer normalverteilten Zufallsvariable

      Zum Beispiel: Wirkungsdauer eines bestimmten Medikaments
2. Durchführung: repräsentative Stichprobe der Größe n
3. Bestmögliche Schätzung für den Parameter:
   a. AHS: relative Häufigkeit h in der Stichprobe
   b. BHS: Stichprobenmittelwert $\bar{x}$

Welches symmetrische Intervall um den Schätzwert enthält den unbekannten Parameter mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %?

Konfidenzintervalle

1. Ziel: Schätzung eines unbekannten Parameters
   a. AHS: relativer Anteil p einer Grundgesamtheit

      Zum Beispiel: relativer Anteil der WählerInnen einer bestimmten Partei
   b. BHS: Erwartungswert μ einer normalverteilten Zufallsvariable

      Zum Beispiel: Wirkungsdauer eines bestimmten Medikaments
2. Durchführung: repräsentative Stichprobe der Größe n
3. Bestmögliche Schätzung für den Parameter:
   a. AHS: relative Häufigkeit h in der Stichprobe
   b. BHS: Stichprobenmittelwert $\bar{x}$

Welches symmetrische Intervall um den Schätzwert enthält den unbekannten Parameter mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %?

Konfidenzintervalle

1. Ziel: Schätzung eines unbekannten Parameters
   a. AHS: relativer Anteil p einer Grundgesamtheit

      Zum Beispiel: relativer Anteil der WählerInnen einer bestimmten Partei
   b. BHS: Erwartungswert μ einer normalverteilten Zufallsvariable

      Zum Beispiel: Wirkungsdauer eines bestimmten Medikaments
2. Durchführung: repräsentative Stichprobe der Größe n
3. Bestmögliche Schätzung für den Parameter:
   a. AHS: relative Häufigkeit h in der Stichprobe
   b. BHS: Stichprobenmittelwert $\bar{x}$

Welches symmetrische Intervall um den Schätzwert enthält den unbekannten Parameter mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %?

Konfidenzintervalle

1. Ziel: Schätzung eines unbekannten Parameters
   a. AHS: relativer Anteil p einer Grundgesamtheit

      Zum Beispiel: relativer Anteil der WählerInnen einer bestimmten Partei
   b. BHS: Erwartungswert μ einer normalverteilten Zufallsvariable

      Zum Beispiel: Wirkungsdauer eines bestimmten Medikaments
2. Durchführung: repräsentative Stichprobe der Größe n
3. Bestmögliche Schätzung für den Parameter:
   a. AHS: relative Häufigkeit h in der Stichprobe
   b. BHS: Stichprobenmittelwert $\bar{x}$

Welches symmetrische Intervall um den Schätzwert enthält den unbekannten Parameter mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %?

4. „Zauberformeln“:

a. AHS: $\gamma = 95\,\%$

Konfidenzintervall

h ... relative Häufigkeit in einer Stichprobe
p ... unbekannter relativer Anteil in der Grundgesamtheit
γ ... Konfidenzniveau (Vertrauensniveau)

γ-Konfidenzintervall für p (diejenigen Werte p, in deren γ-Schätzbereich der Wert h liegt):

$$\left[h - z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}};\ h + z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right], \text{ wobei für } z \text{ gilt: } \gamma = 2 \cdot \phi(z) - 1$$

b. BHS: $\alpha = 5\,\%$

Zufallsstreubereich und Konfidenzintervall

$\mu, \sigma, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$ und $0 < \alpha < 1$
$\bar{x}$ ... Stichprobenmittelwert
s_{n-1} ... Standardabweichung einer Stichprobe
n ... Stichprobenumfang
$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ... $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Quantil der Standardnormalverteilung
$t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}}$ ... $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Quantil der t-Verteilung mit f Freiheitsgraden

Zweiseitiges $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen

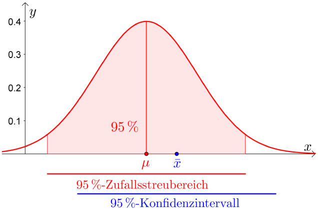
σ bekannt: $\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

σ unbekannt: $\left[\bar{x} - t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\right]$ mit $f = n - 1$

Konfidenzintervalle

BHS: Zufallsstreubereich $\rightarrow$ Konfidenzintervall

Zufallsstreubereich – Konfidenzintervall



Der 95 %-Zufallsstreubereich und das 95 %-Konfidenzintervall sind gleich breit.

Wenn $\bar{x}$ im Zufallsstreubereich von μ liegt, dann enthält das Konfidenzintervall den Wert μ.

Wenn $\bar{x}$ *nicht* im Zufallsstreubereich von μ liegt, dann enthält das Konfidenzintervall den Wert μ *nicht*.

Wenn wir das Konfidenzintervall symmetrisch um $\bar{x}$ mit dieser Breite konstruieren, dann enthält es den Wert μ also mit 95 % Wahrscheinlichkeit.

Konfidenzintervalle

5. Interpretation: Was bedeutet 95 % Wahrscheinlichkeit?
   - 1000 Stichproben der Größe n erzeugen
   - aus jeder Stichprobe das 95 %-Konfidenzintervall berechnen
   - rund 950 der 1000 Konfidenzintervalle sollten den unbekannten Parameter tatsächlich enthalten

   Praktischer Versuch:

NV-Mittelwert	μ	177,8
NV-Standardabw.	σ	6,1
Konfidenzniveau	γ = 1 - α	0,95

Stichprobe	178,68
	169,52
	178,86
	177,57
	175,18
	193,23
	169,84
	180,45
	174,35
	177,41

Stichproben-Mittelwert x̄	177,51
Stichproben-Standardabweichung s	6,643
t-Wert	2,262
Konfidenzintervall (Untere Intervallgrenze)	172,76
Konfidenzintervall (Obere Intervallgrenze)	182,26

NV-Mittelwert	μ	177,8
NV-Standardabw.	σ	6,1
Konfidenzniveau	γ = 1 - α	0,95

Stichprobe	184,07
	188,79
	180,63
	174,35
	181,87
	182,62
	179,48
	178,64
	187,07
	180,07

Stichproben-Mittelwert x̄	181,76
Stichproben-Standardabweichung s	4,184
t-Wert	2,262
Konfidenzintervall (Untere Intervallgrenze)	178,77
Konfidenzintervall (Obere Intervallgrenze)	184,75

6. Breite des Konfidenzintervalls:
   - Je größer die Stichprobengröße n, desto …
   - Je größer das Konfidenzniveau γ, desto …

Konfidenzintervalle

5. Interpretation: Was bedeutet 95 % Wahrscheinlichkeit?
   - 1000 Stichproben der Größe n erzeugen
   - aus jeder Stichprobe das 95 %-Konfidenzintervall berechnen
   - rund 950 der 1000 Konfidenzintervalle sollten den unbekannten Parameter tatsächlich enthalten

   Praktischer Versuch:

NV-Mittelwert	μ	177,8
NV-Standardabw.	σ	6,1
Konfidenzniveau	γ = 1 - α	0,95

Stichprobe	178,68	Stichproben-Mittelwert x̄	177,51
	169,52	Stichproben-Standardabweichung s	6,643
	178,86	t-Wert	2,262
	177,57	Konfidenzintervall (Untere Intervallgrenze)	172,76
	175,18	Konfidenzintervall (Obere Intervallgrenze)	182,26
	193,23		
	169,84		
	180,45		
	174,35		
	177,41		

NV-Mittelwert	μ	177,8
NV-Standardabw.	σ	6,1
Konfidenzniveau	γ = 1 - α	0,95

Stichprobe	184,07	Stichproben-Mittelwert x̄	181,76
	188,79	Stichproben-Standardabweichung s	4,184
	180,63	t-Wert	2,262
	174,35	Konfidenzintervall (Untere Intervallgrenze)	178,77
	181,87	Konfidenzintervall (Obere Intervallgrenze)	184,75
	182,62		
	179,48		
	178,64		
	187,07		
	180,07		

6. Breite des Konfidenzintervalls:
   - Je größer die Stichprobengröße n, desto ...
   - Je größer das Konfidenzniveau γ, desto ...

Technologieblatt – Konfidenzintervalle

Bsp: Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist annähernd normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 177{,}8$ cm und Standardabweichung $\sigma = 6{,}1$ cm.
Ein 42-jähriger Mann wird zufällig ausgewählt.
In welchem um μ symmetrischen Intervall befindet sich seine Körpergröße mit Wahrscheinlichkeit 72 %?

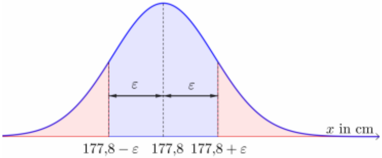
Berechnung ohne Formelsammlung

Wir skizzieren die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable mit $\mu = 177{,}8$ und $\sigma = 6{,}1$.

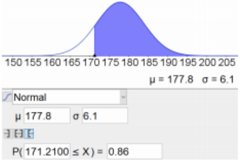
Wir suchen also eine positive Zahl ε mit

$$P(177{,}8-\varepsilon \leq X \leq 177{,}8+\varepsilon) = \underline{\qquad\qquad}.$$

Beschrifte die blaue Fläche und die beiden roten Flächen jeweils mit ihrer Wahrscheinlichkeit.

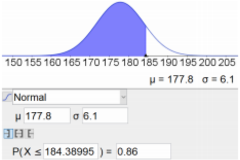


Wir berechnen die beiden Intervallgrenzen mit Technologieeinsatz:



Die Körpergröße eines zufällig ausgewählten 42-jährigen Manns ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 72 % im Intervall

$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$.



Die gleiche Aufgabenstellung kann auch so formuliert sein:

Feedback

1. Feedback zu den Materialien
2. Feedback zur Fortbildung
3. Evaluierung der Fortbildung:
   https://www.ph-online.ac.at/ph-noe
4. Weitere Fortbildungen?

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

Vielen herzlichen Dank für das Interesse!

Projekt-Homepage: https://mmf.univie.ac.at

E-Mail: lukas.riegler@univie.ac.at