Mathematik macht Freu(n)de

Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair
Dr. Lukas Riegler

AG-Tagung AHS Mathematik
06. März 2019

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

universität wien

Mathematik macht Freu(n)de – Das Projekt

- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- Kompetenzmaterialien
- Intensiv-Studienclubs
- Vorkurs Mathematik
- Mathematik-Olympiade

MmF für Studierende im UF Mathematik

- **Lehrveranstaltung**
- Fortbildungen
- **Kompetenzmaterialien**
- **Intensiv-Studienclubs**
- **Vorkurs Mathematik**
- Mathematik-Olympiade

MmF für SchülerInnen

- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- **Kompetenzmaterialien**
- **Intensiv-Studienclubs**
- Vorkurs Mathematik
- **Mathematik-Olympiade**

MmF für StudienanfängerInnen

- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- **Kompetenzmaterialien**
- Intensiv-Studienclubs
- **Vorkurs Mathematik**
- Mathematik-Olympiade

2018: $\sim$1600 SchülerInnen / StudienanfängerInnen

MmF für Lehrpersonen

- Lehrveranstaltung
- **Fortbildungen**
- **Kompetenzmaterialien**
- Intensiv-Studienclubs
- Vorkurs Mathematik
- Mathematik-Olympiade

Newsletter für Lehrpersonen $\rightsquigarrow$ https://mmf.univie.ac.at

Nächster Termin für Intensiv-Studienclubs:

- Montag, 15.4.2019 – Donnerstag, 18.4.2019
- Schwerpunkt Maturavorbereitung
- Universität Wien, Fakultät für Mathematik
  PH Niederösterreich, Campus Baden
- Betreuungsverhältnis 1:6 oder besser
- Kostenbeitrag: 100 €
  für 4×4 Arbeitseinheiten
  als Honorar für die Coaches

Mathematik macht Freu(n)de in Graz

- Aufbau und Leitung durch Univ.-Prof. Dr. Bernd Thaller

- Lehrveranstaltung: Mathematik macht Freu(n)de (SoSe 2019)

Fortbildungen

Nächste Termine für Fortbildungen:

- Mittwoch, 24. April 2019
  Mathematik macht Freu(n)de – Kompetenzmaterialien
  Universität Graz
- Mittwoch, 28. August 2019, 09:00-17:30 Uhr
  Wahrscheinlichkeitsrechnung macht Freu(n)de
  Fakultät für Mathematik, Universität Wien
- Mittwoch, 18. September 2019, 09:00-17:30 Uhr
  Differenzialrechnung macht Freu(n)de
  Fakultät für Mathematik, Universität Wien

Newsletter für Lehrpersonen ⇝ https://mmf.univie.ac.at

Kompetenzmaterialien

- Themenbereiche der Sekundarstufe II
  - Funktionen & Analysis
  - Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik
  - Algebra & Geometrie
- Orientierung an SRDP-Aufgaben

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

- Praxiserprobt
  - MmF-Förderformate
  - Schulunterricht
- Uneingeschränkter, kostenloser Download
  https://mmf.univie.ac.at/materialien
- Creative Commons Lizenz

BY NC ND

Kompetenzhefte

- 23 Kompetenzhefte
- Aufbau
  - Diagnoseaufgaben
  - Erklärungen
  - Weitere Aufgaben
- Zielgruppen
  - Lehrpersonen
  - SchülerInnen
- Weiterentwicklung

Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik

Kompetenzhefte	**Letzte Änderung**
Finanzmathematik I	31.08.2018
Folgen und Reihen	31.08.2018
Kombinatorik	21.12.2018
Statistik I (Statistische Kenngrößen, Boxplot, Diagramme)	21.06.2018
Stochastik I (Laplace, Wahrscheinlichkeitsräume, Zufallsvariablen)	06.02.2019
Stochastik II (Baumdiagramme, Binomialverteilung)	06.02.2019
Stochastik III (Normalverteilung)	06.02.2019

Arbeitsblätter	**Letzte Änderung**
Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten (Ausarbeitung)	06.02.2019
Binomialverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Kombinatorik (Ausarbeitung)	06.02.2019
Laplace-Experimente (Ausarbeitung)	06.02.2019
Normalverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck I (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck II (Ausarbeitung)	06.02.2019
Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme (Ausarbeitung)	06.02.2019
Statistische Kenngrößen und Boxplot (Ausarbeitung)	21.06.2018
Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume (Ausarbeitung)	06.02.2019
Zufallsvariablen (Ausarbeitung)	06.02.2019

Technologieblätter	**Letzte Änderung**
Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle (Ausarbeitung)	08.02.2019

KH - Lineare Funktionen

- 40 Arbeitsblätter
- 4 Technologieblätter
- Unterrichtsgestaltung
- Ausarbeitungen
- Effizienz

Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik

Kompetenzhefte	Letzte Änderung
Finanzmathematik I	31.08.2018
Folgen und Reihen	31.08.2018
Kombinatorik	21.12.2018
Statistik I (Statistische Kenngrößen, Boxplot, Diagramme)	21.06.2018
Stochastik I (Laplace, Wahrscheinlichkeitsräume, Zufallsvariablen)	06.02.2019
Stochastik II (Baumdiagramme, Binomialverteilung)	06.02.2019
Stochastik III (Normalverteilung)	06.02.2019

Arbeitsblätter	Letzte Änderung
Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten (Ausarbeitung)	06.02.2019
Binomialverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Kombinatorik (Ausarbeitung)	06.02.2019
Laplace-Experimente (Ausarbeitung)	06.02.2019
Normalverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck I (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck II (Ausarbeitung)	06.02.2019
Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme (Ausarbeitung)	06.02.2019
Statistische Kenngrößen und Boxplot (Ausarbeitung)	21.06.2018
Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume (Ausarbeitung)	06.02.2019
Zufallsvariablen (Ausarbeitung)	06.02.2019

Technologieblätter	Letzte Änderung
Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle (Ausarbeitung)	08.02.2019

AB - Funktionsgraphen

Modularer Aufbau

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Sprechweise: „*a hoch n*“ oder manchmal die „*n-te Potenz von a*“

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Schreibweisen

Welche ganzen Zahlen verstecken sich hinter den folgenden Potenzen?

$2^3 =$ ________ $3^2 =$ ________ $5^1 =$ ________

$1^5 =$ ________ $0^2 =$ ________ $(-1)^3 =$ ________

Rechenregeln für Potenzen

Kannst du erklären, weshalb diese Rechenregeln gelten? Denke zum Beispiel an $n = 3$ und $m = 2$.

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Was kann ich verstehen? Was soll ich lernen?

Modularer Aufbau

„Es ist, was es ist. Das muss ich lernen.“

„Das kann ich verstehen und erklären.“

„Hier soll ich aktiv werden.“

„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“

„Hier kommt ein Kochrezept.“

„Diese Formel finde ich in der Formelsammlung.“

„In diese Falle tappe ich nicht.“

„Hier kann ich mich herausfordern.“

„Hier soll ich aktiv werden."

Mit der ersten Ableitung f' untersuchen wir die **Steigung** und das **Monotonieverhalten** von f:

Die Tangente an f an der Stelle x_0 ist waagrecht.

$\iff \quad f'(x_0)$ _____ 0

Die Steigung von f an der Stelle x_0 ist positiv.

$\iff \quad f'(x_0)$ _____ 0

Die Steigung von f an der Stelle x_0 ist negativ.

$\iff \quad f'(x_0)$ _____ 0

f ist monoton wachsend in $]a;b[$.

$\iff \quad f'(x)$ _____ 0 für alle x in $]a;b[$.

f ist monoton fallend in $]a;b[$.

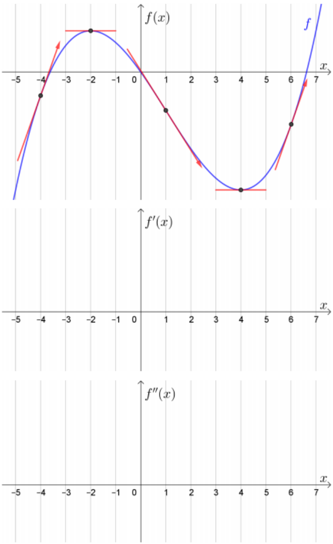
$\iff \quad f'(x)$ _____ 0 für alle x in $]a;b[$.

Im Beispiel rechts ist f eine Polynomfunktion von Grad 3. „Kubische Funktion"

f' ist also eine Polynomfunktion von Grad _____ .

f'' ist also eine Polynomfunktion von Grad _____ .

Skizziere rechts die Graphen von f' und f''.



Mit der ersten Ableitung f' untersuchen wir die **Steigung** und das **Monotonieverhalten** von f:

Die Tangente an f an der Stelle x_0 ist waagrecht.

$\iff \quad f'(x_0) = 0$

Die Steigung von f an der Stelle x_0 ist positiv.

$\iff \quad f'(x_0) > 0$

Die Steigung von f an der Stelle x_0 ist negativ.

$\iff \quad f'(x_0) < 0$

f ist monoton wachsend in $]a;b[$.

$\iff \quad f'(x) \geq 0$ für alle x in $]a;b[$.

f ist monoton fallend in $]a;b[$.

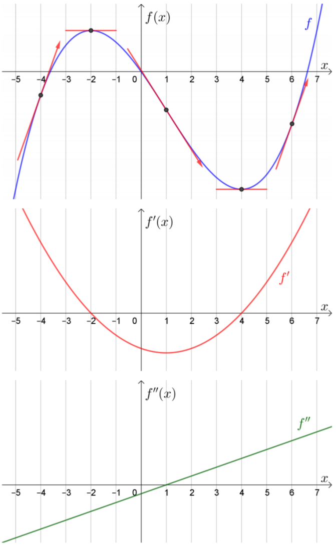
$\iff \quad f'(x) \leq 0$ für alle x in $]a;b[$.

Im Beispiel rechts ist f eine Polynomfunktion von Grad 3. „Kubische Funktion“

f' ist also eine Polynomfunktion von Grad 2.

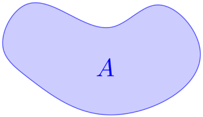
f'' ist also eine Polynomfunktion von Grad 1.

Skizziere rechts die Graphen von f' und f''.



„Das kann ich verstehen und erklären.“

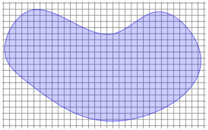
Kurvige Figuren und ihre Fläche



Wir interessieren uns für den Flächeninhalt A der links dargestellten Figur.

Die Formelsammlung hilft nicht.

Rechts haben wir ein Raster auf die Figur gelegt. Wie bringt uns das weiter?



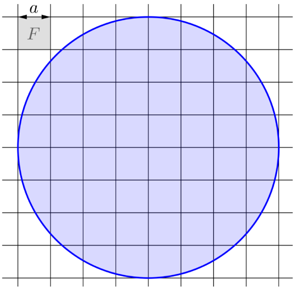
Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

„Hier soll ich aktiv werden.“

Quadratur des Kreises?!

Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.
Die Seitenlänge a eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster unten ist $a =$ ________ cm.

Der Flächeninhalt F eines einzelnen Quadrats im Raster ist $F =$ ____________ cm^2.



Die Quadrate im Raster, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt U.

$U =$ ____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

U steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt O.

$O =$ ____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

O steht für **Obersumme**.

Der Flächeninhalt A des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme:

____ $\leq A \leq$ ____

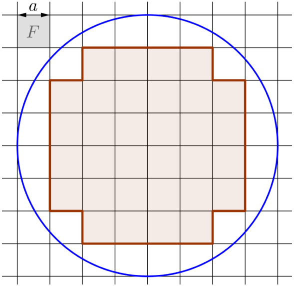
Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

Quadratur des Kreises?!

Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.
Die Seitenlänge a eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster unten ist $a =$ ________ cm.

Der Flächeninhalt F eines einzelnen Quadrats im Raster ist $F =$ ____________ cm^2.



Die Quadrate im Raster, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt U.

$U = 32 \cdot F =$ ____________ cm^2

U steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt O.

$O = 60 \cdot F =$ ____________ cm^2

O steht für **Obersumme**.

Der Flächeninhalt A des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme:

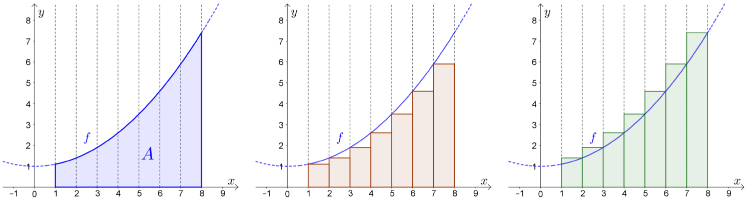
$U \leq A \leq O$

Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

„Hier soll ich aktiv werden.“

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1;8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Den Flächeninhalt eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



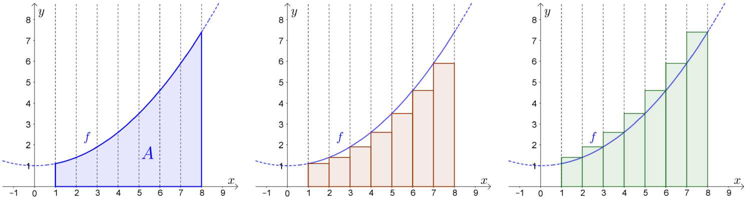
Wie groß ist der Flächeninhalt A also mindestens? Wie groß ist der Flächeninhalt A also höchstens?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

________________ $\leq A \leq$ ________________

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Den Flächeninhalt eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



Wie groß ist der Flächeninhalt A also mindestens? Wie groß ist der Flächeninhalt A also höchstens?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1,1	1,4	1,9	2,6	3,5	4,6	5,9	7,4

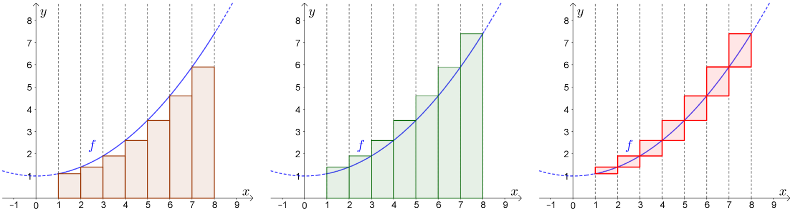
$$1{,}1 \cdot 1 + 1{,}4 \cdot 1 + \cdots + 5{,}9 \cdot 1 = 21 \leq A \leq 27{,}3 = 1{,}4 \cdot 1 + 1{,}9 \cdot 1 + \cdots + 7{,}4 \cdot 1$$

Arbeitsblatt: Kulturtechnik Integration

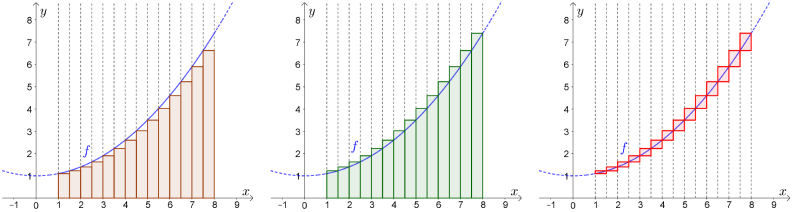
„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“

Verfeinerung

Die **Untersumme** im linken Bild ist $U = 21$. Die **Obersumme** im mittleren Bild ist $O = 27{,}3$. Die Gesamtfläche der gefärbten „Fehlerrechtecke“ im rechten Bild ist $E =$ ______________ . *Error*



Wir verfeinern die Zerlegung, indem wir die Breite aller Rechtecke halbieren:

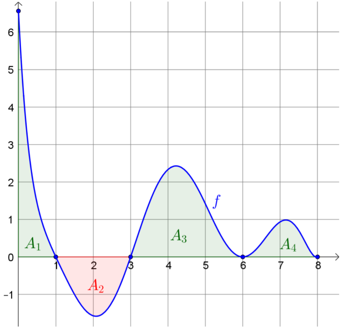


Ob wir wohl den Gesamtfehler beliebig klein machen können?

Konstruktion einer Stammfunktion

Die dargestellten Flächen haben die Inhalte $A_1 = 2$, $A_2 = 2$, $A_3 = 4$ und $A_4 = 1$.

Die Funktion F mit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ist im Intervall $[0;8]$ definiert.



1) Trage 5 verschiedene Wertepaare der Funktion F ein:

x					
$F(x)$					

2) Wenn $f(x) > 0$ in einem Intervall gilt, dann ist F in diesem Intervall streng monton ____________.

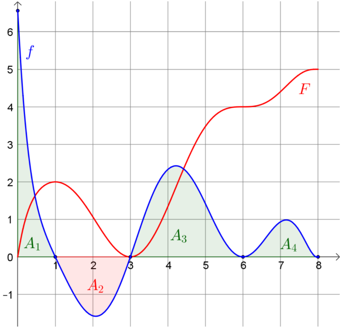
Wenn $f(x) < 0$ in einem Intervall gilt, dann ist F in diesem Intervall streng monton ____________.

Arbeitsblatt: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Konstruktion einer Stammfunktion

Die dargestellten Flächen haben die Inhalte $A_1 = 2,\ A_2 = 2,\ A_3 = 4$ und $A_4 = 1$.

Die Funktion F mit $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist im Intervall $[0; 8]$ definiert.



1) Trage 5 verschiedene Wertepaare der Funktion F ein:

x	0	1	3	6	8
$F(x)$	0	2	0	4	5

2) Wenn $f(x) > 0$ in einem Intervall gilt, dann ist F in diesem Intervall streng monton wachsend.

Wenn $f(x) < 0$ in einem Intervall gilt, dann ist F in diesem Intervall streng monton fallend.

Arbeitsblatt: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz im Einsatz

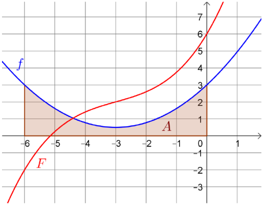
1) Stelle mithilfe von f eine Formel auf, mit der du den rechts dargestellten Flächeninhalt A berechnen kannst.

$A =$ ________________________________

Die dargestellte Funktion F ist eine Stammfunktion von f.

2) Berechne A mit dem Hauptsatz.

$A =$ ________________________________



Der Hauptsatz im Einsatz

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

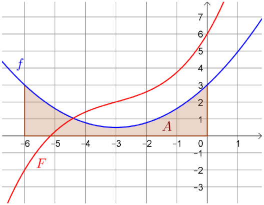
1) Stelle mithilfe von f eine Formel auf, mit der du den rechts dargestellten Flächeninhalt A berechnen kannst.

$$A = \int_{-6}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Die dargestellte Funktion F ist eine Stammfunktion von f.

2) Berechne A mit dem Hauptsatz.

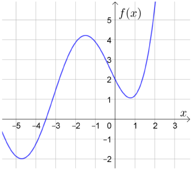
$$A = F(0) - F(-6) = 6 - (-2) = 8$$



„Hier soll ich aktiv werden.“

Untersumme/Obersumme → Verfeinern → Grenzwert *oder* ein Fingerschnipsen mit dem Hauptsatz

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^x - 3 \cdot \sin(x) + 1$ ist dargestellt.



1) Markiere links eine Fläche, deren Inhalt mit

$$A = \int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnet wird.

2) Ermittle eine Stammfunktion F von f.

$$F(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

3) Berechne A mit dem Hauptsatz.

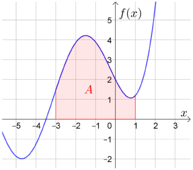
Warum hängt das Ergebnis nicht davon ab, welche Stammfunktion wir wählen?

$$A = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

„Hier soll ich aktiv werden.“

Untersumme/Obersumme → Verfeinern → Grenzwert *oder* ein Fingerschnipsen mit dem Hauptsatz

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^x - 3 \cdot \sin(x) + 1$ ist dargestellt.



1) Markiere links eine Fläche, deren Inhalt mit

$$A = \int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnet wird.

2) Ermittle eine Stammfunktion F von f.

$$F(x) = e^x + 3 \cdot \cos(x) + x$$

3) Berechne A mit dem Hauptsatz. Warum hängt das Ergebnis nicht davon ab, welche Stammfunktion wir wählen?

$$A = F(1) - F(-3) = 5{,}339\ldots - (-5{,}920\ldots) = 11{,}25\ldots$$

Roulette

Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Das Casino bietet folgendes Spiel an:
Man setzt einen Einsatz auf „Rot" oder „Schwarz". Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.

Lukas setzt 37 € auf „Rot". Die Zufallsvariable X gibt seinen Gewinn nach Abzug vom Einsatz an.

1) Trage die möglichen Werte von X und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.

2) Berechne den Erwartungswert von X.

x_i		
$P(X = x_i)$		

$E(X) =$

Interpretation des Erwartungswerts im Sachzusammenhang:

Wenn Lukas immer wieder 37 € auf „Rot" setzt, dann sollte er auf lange Sicht einen durchschnittlichen Verlust von ________ pro Spiel erwarten.

Versuche dein Glück also besser mit Spielgeld.

Arbeitsblatt: Zufallsvariablen

Roulette

Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Das Casino bietet folgendes Spiel an:
Man setzt einen Einsatz auf „Rot“ oder „Schwarz“. Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.

Lukas setzt 37 € auf „Rot“. Die Zufallsvariable X gibt seinen Gewinn nach Abzug vom Einsatz an.

1) Trage die möglichen Werte von X und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.

2) Berechne den Erwartungswert von X.

x_i	37 €	−37 €
$P(X = x_i)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

$$E(X) = 37 \cdot \frac{18}{37} + (-37) \cdot \frac{19}{37} = 18 - 19 = -1\ €$$

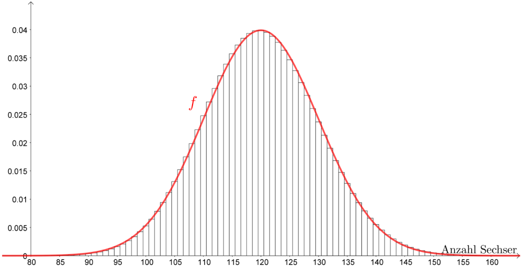
Interpretation des Erwartungswerts im Sachzusammenhang:

Wenn Lukas immer wieder 37 € auf „Rot“ setzt, dann sollte er auf lange Sicht einen durchschnittlichen Verlust von 1 € pro Spiel erwarten.

Versuche dein Glück also besser mit Spielgeld.

Arbeitsblatt: Zufallsvariablen

Bei $n = 720$ Würfen nimmt das Säulendiagramm von S_{720} die folgende Form an:



Animationen:
y-Achse variabel skaliert

y-Achse fix skaliert

Markiere eine Fläche, deren Inhalt die WS für mindestens 130 Sechser und höchstens 140 Sechser ist.

Wir haben hier auch den Graphen einer ganz bestimmten Funktion f eingezeichnet.
Dieser Graph schmiegt sich an das glockenförmige Profil des Säulendiagramms.
Wie würdest du mit f diese Wahrscheinlichkeit näherungsweise berechnen?

$$P(130 \leq S_{720} \leq 140) \approx$$

Arbeitsblatt: Normalverteilung

Vielen herzlichen Dank für das Interesse!

Anmeldung zum Newsletter: https://mmf.univie.ac.at

E-Mail: lukas.riegler@univie.ac.at