

# Mathematik macht Freu(n)de

Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair  
Dr. Lukas Riegler

Universität Graz  
24. April 2019



# Mathematik macht Freu(n)de – Das Projekt

- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- Kompetenzmaterialien
- Akademie für Junglehrpersonen
- Intensiv-Studienclubs
- Vorkurs Mathematik
- Mathematik-Olympiade



- **Lehrveranstaltung**
- Fortbildungen
- **Kompetenzmaterialien**
- **Akademie für Junglehrpersonen**
- **Intensiv-Studienclubs**
- **Vorkurs Mathematik**
- Mathematik-Olympiade



## Aktueller Termin für Intensiv-Studienclubs:

- Montag, 15.4.2019 – Donnerstag, 18.4.2019
- Schwerpunkt Maturavorbereitung
- Universität Wien, Fakultät für Mathematik  
PH Niederösterreich, Campus Baden
- Betreuungsverhältnis 1:6 oder besser
- Kostenbeitrag: 100 €  
für  $4 \times 4$  Arbeitseinheiten  
als Honorar für die Coaches
- ~ 300 SchülerInnen



- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- **Kompetenzmaterialien**
- Akademie für Junglehrpersonen
- **Intensiv-Studienclubs**
- Vorkurs Mathematik
- **Mathematik-Olympiade**



- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- **Kompetenzmaterialien**
- Akademie für Junglehrpersonen
- Intensiv-Studienclubs
- **Vorkurs Mathematik**
- Mathematik-Olympiade



2018: ~ 1600 SchülerInnen / StudienanfängerInnen

- Lehrveranstaltung
- **Fortbildungen**
- **Kompetenzmaterialien**
- **Akademie für Junglehrpersonen**
- Intensiv-Studienclubs
- Vorkurs Mathematik
- Mathematik-Olympiade



**Newsletter für Lehrpersonen**  $\rightsquigarrow$  <https://mmf.univie.ac.at>



- Themenbereiche der Sekundarstufe II

- Orientierung an SRDP-Aufgaben

 Bundesministerium  
Bildung, Wissenschaft  
und Forschung

- Praxiserprobt

- MmF-Förderformate
- Schulunterricht

- Uneingeschränkter, kostenloser Download

<https://mmf.univie.ac.at/materialien>

- Creative Commons Lizenz





- 23 Kompetenzhefte

- Aufbau

- Diagnoseaufgaben
- Erklärungen
- Weitere Aufgaben

- Zielgruppen

- Lehrpersonen
- SchülerInnen

- Weiterentwicklung

## Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik

### Kompetenzhefte

Finanzmathematik I	<b>Letzte Änderung</b> 31.08.2018
Folgen und Reihen	31.08.2018
Kombinatorik	21.12.2018
Statistik I (Statistische Kenngrößen, Boxplot, Diagramme)	21.06.2018
Stochastik I (Laplace, Wahrscheinlichkeitsräume, Zufallsvariablen)	06.02.2019
Stochastik II (Baumdiagramme, Binomialverteilung)	06.02.2019
Stochastik III (Normalverteilung)	06.02.2019

### Arbeitsblätter

Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten (Ausarbeitung)	<b>Letzte Änderung</b> 06.02.2019
Binomialverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Kombinatorik (Ausarbeitung)	06.02.2019
Laplace-Experimente (Ausarbeitung)	06.02.2019
Normalverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck I (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck II (Ausarbeitung)	06.02.2019
Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme (Ausarbeitung)	06.02.2019
Statistische Kenngrößen und Boxplot (Ausarbeitung)	21.06.2018
Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume (Ausarbeitung)	06.02.2019
Zufallsvariablen (Ausarbeitung)	06.02.2019

### Technologieblätter

Zufallsstrebereiche und Konfidenzintervalle (Ausarbeitung)	<b>Letzte Änderung</b> 08.02.2019
--	--------------------------------------



- 43 Arbeitsblätter

- 4 Technologieblätter

- Unterrichtsgestaltung

- Ausarbeitungen

- Effizienz

## Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik

### Kompetenzhefte

Finanzmathematik I	31.08.2018
Folgen und Reihen	31.08.2018
Kombinatorik	21.12.2018
Statistik I (Statistische Kenngrößen, Boxplot, Diagramme)	21.06.2018
Stochastik I (Laplace, Wahrscheinlichkeitsräume, Zufallsvariablen)	06.02.2019
Stochastik II (Baumdiagramme, Binomialverteilung)	06.02.2019
Stochastik III (Normalverteilung)	06.02.2019

### Arbeitsblätter

Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten (Ausarbeitung)	06.02.2019
Binomialverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Kombinatorik (Ausarbeitung)	06.02.2019
Laplace-Experimente (Ausarbeitung)	06.02.2019
Normalverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck I (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck II (Ausarbeitung)	06.02.2019
Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme (Ausarbeitung)	06.02.2019
Statistische Kenngrößen und Boxplot (Ausarbeitung)	21.06.2018
Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume (Ausarbeitung)	06.02.2019
Zufallsvariablen (Ausarbeitung)	06.02.2019

### Technologieblätter

Zufallsstrebereiche und Konfidenzintervalle (Ausarbeitung)	08.02.2019
--	------------





Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise  $a^9$  ist praktischer als  $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ .  
Sprechweise: „a hoch n“ oder manchmal die „n-te Potenz von a“

Die Zahl  $a$  heißt **Basis**, die Zahl  $n$  heißt **Exponent**.



Welche ganzen Zahlen verstecken sich hinter den folgenden Potenzen?

$2^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$3^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$5^1 = \underline{\hspace{2cm}}$

$1^5 = \underline{\hspace{2cm}}$

$0^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$(-1)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$



Kannst du erklären, weshalb diese Rechenregeln gelten?

Denke zum Beispiel an  $n = 3$  und  $m = 2$ .

1)  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2)  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

## Was kann ich verstehen?

## Was soll ich lernen?





„Es ist, was es ist. Das muss ich lernen.“



„Das kann ich verstehen und erklären.“



„Hier soll ich aktiv werden.“



„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“



„Hier kommt ein Kochrezept.“



„Diese Formel finde ich in der Formelsammlung.“



„In diese Falle tappe ich nicht.“



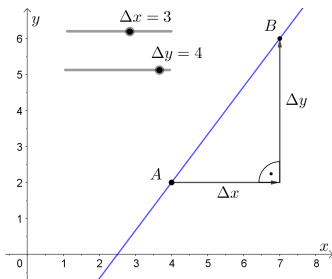
„Hier kann ich mich herausfordern.“



- 1 Lineare Funktionen
- 2 Termrechnung
- 3 Trigonometrie
- 4 Quadratische Funktionen
- 5 Exponential- und Logarithmusfunktionen
- 6 Vektorrechnung
- 7 Statistik
- 8 Folgen und Reihen
- 9 Finanzmathematik
- 10 Differentialrechnung
- 11 Funktionen
- 12 Integralrechnung
- 13 Wahrscheinlichkeitsrechnung



- KH – Lineare Funktionen
- AB – Funktionen
- AB – Geradengleichungen
- AB – Lineare Funktionen
- AB – Steigungsmessung von Geraden





„In diese Falle tappe ich nicht.“

Schnittpunkt mit senkrechter Achse

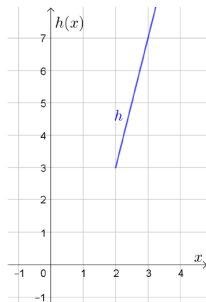


MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Rechts ist der Graph der linearen Funktion  $h$  mit

$$h(x) = k \cdot x + d$$

für  $x \geq 2$  dargestellt. Ermittle  $d$ .





„In diese Falle tappe ich nicht.“

Schnittpunkt mit senkrechter Achse



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Rechts ist der Graph der linearen Funktion  $h$  mit

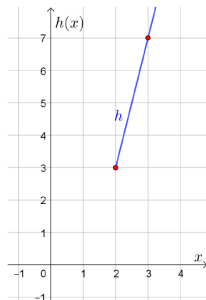
$$h(x) = k \cdot x + d$$

für  $x \geq 2$  dargestellt. Ermittle  $d$ .

$$k = \frac{4}{1} = 4$$

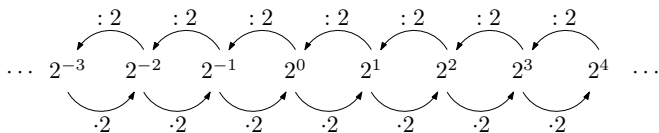
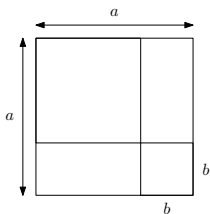
Punkt  $(2 \mid h(2))$  einsetzen und auf  $d$  umformen:

$$d = h(2) - k \cdot 2 = 3 - 4 \cdot 2 = -5$$





- AB – Pascalsches Dreieck I
- AB – Potenzen und Wurzeln
- Aufgabensammlung: Termrechnen & Gleichungen



In Planung:

- AB – Umformen von Formeln und Gleichungen





„Hier soll ich aktiv werden.“

Binome und das Pascalsche Dreieck



MATHEMATIK  
macht  
FREUNDE

Wir haben zuvor berechnet:

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

Siehst du den Zusammenhang mit dem Pascalschen Dreieck rechts? Setze das Muster fort:

			1			
			1		1	
		1		2		1
		1	3	3	1	
	1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1	

$$(a + b)^4 =$$

$$(a + b)^5 =$$





„Hier soll ich aktiv werden.“

Binome und das Pascalsche Dreieck



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Wir haben zuvor berechnet:

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

Siehst du den Zusammenhang mit dem Pascalschen Dreieck rechts? Setze das Muster fort:

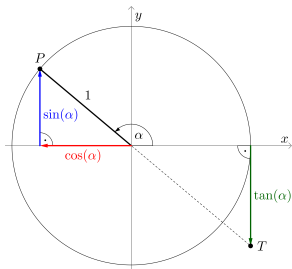
			1							
			1		1					
		1		2		1				
		1	3		3	1				
	1		4		6		4		1	
	1	5		10		10		5		1

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$$

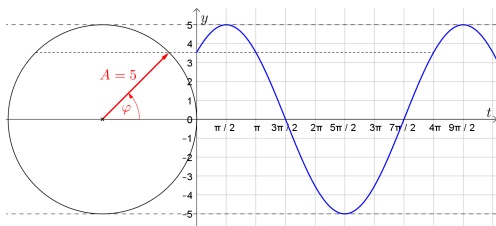
$$(a + b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$



- KH – Trigonometrie I
- KH – Trigonometrie II
- KH – Trigonometrie III
- AB – Ähnlichkeit und Winkelfunktionen
- AB – Allgemeines Dreieck
- AB – Graphen der Winkelfunktionen
- AB – Winkelfunktionen am Einheitskreis

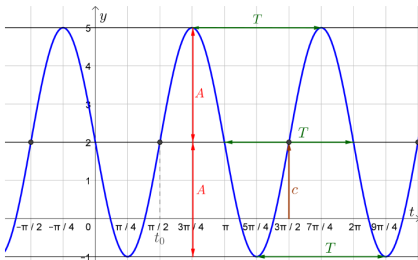


11	9667490
10	9666746
9	9666001
8	9665255
7	9664508
6	9663761
5	9663012
4	9662263
3	9661513
2	9660762
1	9660011
0	9659258
75	





So können wir die Parameter von  $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$  vom Graphen ablesen:



$\Rightarrow y(t) =$  \_\_\_\_\_

1) Amplitude  $A > 0$  ablesen:

$$A = \underline{\hspace{2cm}}$$

2) Verschiebung in  $y$ -Richtung ablesen:

$$c = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Periodendauer  $T > 0$  ablesen:

$$T = \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \underline{\hspace{2cm}}$$

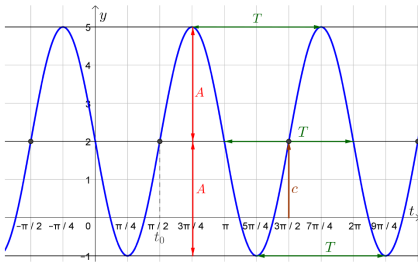
4)  $t_0$  ablesen:

Positive Steigung bei  $t_0$  beachten.

$$t_0 = \underline{\hspace{2cm}} = -\frac{\varphi}{\omega} \Rightarrow \varphi = \underline{\hspace{2cm}}$$



So können wir die Parameter von  $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$  vom Graphen ablesen:



1) Amplitude  $A > 0$  ablesen:

$$A = 3$$

2) Verschiebung in  $y$ -Richtung ablesen:

$$c = 2$$

3) Periodendauer  $T > 0$  ablesen:

$$T = \pi \implies \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2$$

4)  $t_0$  ablesen:

Positive Steigung bei  $t_0$  beachten.

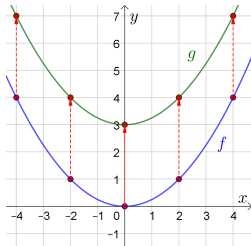
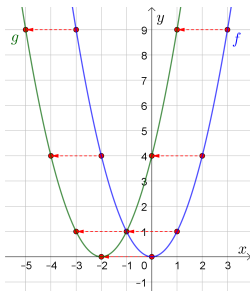
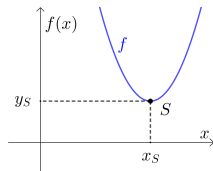
$$t_0 = \frac{\pi}{2} = -\frac{\varphi}{\omega} \implies \varphi = -\omega \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\implies y(t) = 3 \cdot \sin(2 \cdot t - \pi)$$



# Quadratische Funktionen

- KH – Quadratische Funktionen
- AB – Quadratische Funktionen
- AB – Quadratische Gleichungen
- AB – Linearfaktoren





„Hier soll ich aktiv werden.“

Scheitelpunkt



MATHEMATIK  
macht  
FREUNDE

Gegeben ist die quadratische Funktion  $f$  mit

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3.$$

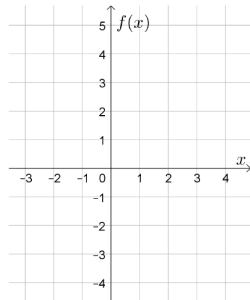
Ergänze die fehlenden Einträge in der Wertetabelle.

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

Skizziere rechts den Funktionsgraphen.

Der Funktionsgraph ist eine **Parabel**.

Der Extrempunkt (1 | -4) heißt auch **Scheitelpunkt**.







„Hier soll ich aktiv werden.“

Gegeben ist die quadratische Funktion  $f$  mit

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3.$$

Ergänze die fehlenden Einträge in der Wertetabelle.

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

Skizziere rechts den Funktionsgraphen.

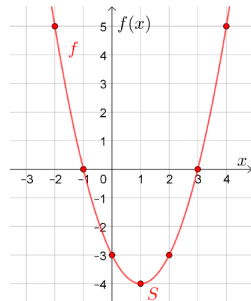
Der Funktionsgraph ist eine **Parabel**.

Der Extrempunkt (1 | -4) heißt auch **Scheitelpunkt**.

Scheitelpunkt



MATHEMATIK  
macht  
FREUNDE





Minus mal minus



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4.$$

An welcher Stelle  $x$  hat die Funktion ihren *kleinsten* Funktionswert? Wie groß ist dieser Funktionswert?





Minus mal minus



Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4.$$

An welcher Stelle  $x$  hat die Funktion ihren *kleinsten* Funktionswert? Wie groß ist dieser Funktionswert?

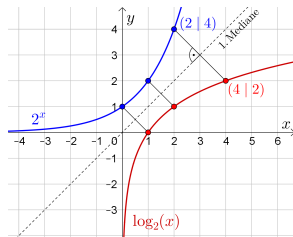
Es gilt  $(x - 1)^2 \geq 0$  und  $(x - 1)^2 = 0$ , falls  $x = 1$  ist.

An der Stelle  $x = 1$  ist also der kleinste Funktionswert  $f(1) = 0 - 4 = -4$ .



# Exponential- und Logarithmusfunktionen

- KH – Exponential- und Logarithmusfunktionen
- AB – Exponentialfunktionen
- AB – Logarithmusfunktionen



14

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
600	7782	7783	7783	7784	7784		7785	7786	7787	7787	7788	
601	7789	7789	7790	7791	7792		7792	7793	7794	7795	7795	
602	7796	7797	7797	7798	7799		7800	7800	7801	7802	7802	
603	7803	7804	7805	7805	7806		7807	7807	7808	7809	7810	
604	7810	7811	7812	7813	7813		7814	7815	7815	7817	7817	
605	7818	7818	7819	7820	7820		7821	7822	7823	7823	7824	
606	7825	7825	7826	7827	7828		7828	7829	7830	7830	7831	
607	7832	7833	7833	7834	7835		7835	7836	7837	7838	7838	
608	7839	7840	7840	7841	7842		7843	7843	7844	7845	7845	
609	7846	7847	7848	7848	7849		7850	7850	7851	7852	7853	
610	7853	7854	7855	7855	7856		7857	7858	7858	7859	7860	
611	7860	7861	7862	7863	7863		7864	7865	7865	7866	7867	
612	7868	7868	7869	7870	7870		7871	7872	7872	7873	7874	
613	7875	7875	7876	7877	7877		7878	7879	7880	7880	7881	





# „Es ist, was es ist. Das muss ich lernen.“

Logarithmus



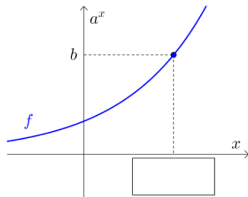
MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Die Lösung  $x$  der Gleichung  $a^x = b$  heißt **Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$** :

$$a^x = b \iff x = \log_a(b) \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Sprechweise: „ $x$  ist der Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$ .“

Rechts siehst du den Graphen der Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$ .  
Beschrifte die markierte Stelle.



Logarithmen händisch berechnen



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Wenn wir  $\log_a(b)$  berechnen, denken wir: „ $a$  hoch welche Zahl ergibt  $b$ ?“

$$a^? = b$$

a)  $\log_{10}(1000) = \underline{\quad}$ , weil  $10^{\square} = 1000$ .      e)  $\log_{11}(\sqrt{11}) = \underline{\quad}$ , weil  $\underline{\quad}$ .

b)  $\log_7(49) = \underline{\quad}$ , weil  $\underline{\quad}$ .      f)  $\log_e(e^2) = \underline{\quad}$ , weil  $\underline{\quad}$ .

c)  $\log_2(16) = \underline{\quad}$ , weil  $\underline{\quad}$ .      g)  $\log_b(b) = \underline{\quad}$ , weil  $\underline{\quad}$ .

d)  $\log_2(0,5) = \underline{\quad}$ , weil  $\underline{\quad}$ .      h)  $\log_b(1) = \underline{\quad}$ , weil  $\underline{\quad}$ .



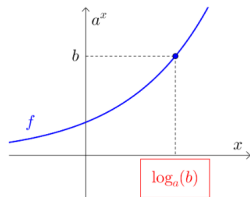


Die Lösung  $x$  der Gleichung  $a^x = b$  heißt **Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$** :

$$a^x = b \iff x = \log_a(b) \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Sprechweise: „ $x$  ist der Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$ .“

Rechts siehst du den Graphen der Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$ .  
Beschrifte die markierte Stelle.



## Logarithmen händisch berechnen



Wenn wir  $\log_a(b)$  berechnen, denken wir: „ $a$  hoch welche Zahl ergibt  $b$ ?“

$$a^? = b$$

a)  $\log_{10}(1000) = 3$ , weil  $10^{\boxed{3}} = 1000$ .

e)  $\log_{11}(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}$ , weil  $11^{1/2} = \sqrt{11}$ .

b)  $\log_7(49) = 2$ , weil  $7^2 = 49$ .

f)  $\log_e(e^2) = 2$ , weil  $e^2 = e^2$ .

c)  $\log_2(16) = 4$ , weil  $2^4 = 16$ .

g)  $\log_b(b) = 1$ , weil  $b^1 = b$ .

d)  $\log_2(0,5) = -1$ , weil  $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$ .

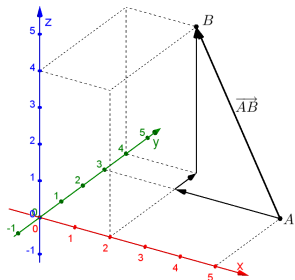
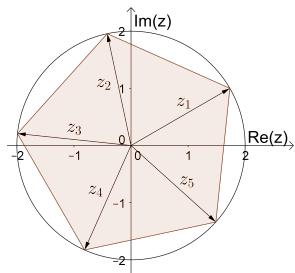
h)  $\log_b(1) = 0$ , weil  $b^0 = 1$ .



- KH – Komplexe Zahlen
- KH – Vektorrechnung in der Ebene
- KH – Vektorrechnung im Raum
- AB – Vektorrechnung in der Ebene
- AB – Vektorrechnung im Raum

In Planung:

- AB – Parameterdarstellungen





„Hier soll ich aktiv werden.“

### Skalarprodukt und Winkel



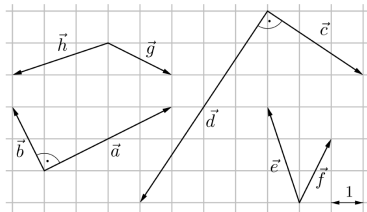
MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} =$$

$$\vec{e} \cdot \vec{f} =$$

$$\vec{g} \cdot \vec{h} =$$



Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Idee?







„Hier soll ich aktiv werden.“

## Skalarprodukt und Winkel



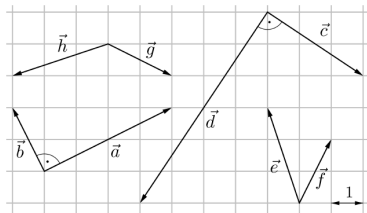
MATHEMATIK  
macht  
FREUNDE

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$$

$$\vec{e} \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 + 6 = 5$$

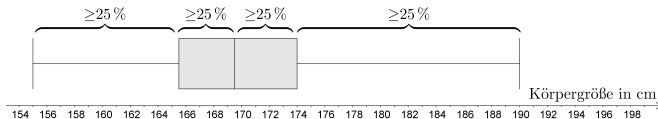
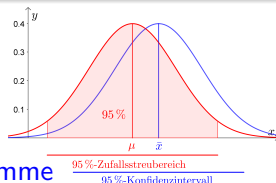
$$\vec{g} \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 + 1 = -5$$



Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Idee?



- KH – Statistik I
- AB – Interpolation und Regression
- AB – Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme
- AB – Statistische Kenngrößen und Boxplot
- TB – Regression
- TB – Zufallsstrebereiche und Konfidenzintervalle



In Planung:

- KH – Statistik II  
(Interpolation, Regression, Konfidenzintervalle)





Wir können Quartile  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_3$  einer aufsteigend sortierten Listen wie folgt berechnen:

- 1) Für  $q_2$  verwenden wir den Median der Werte.
- 2) Dann teilen wir die Liste in zwei gleich große Teillisten wie folgt:
  - Ist  $n$  gerade, dann teilen wir die Liste in der Mitte auf.



- Ist  $n$  ungerade, dann teilen wir die Liste so auf, dass auch beide Teillisten eine *ungerade* Anzahl an Werten enthalten.

Dafür musst du den mittleren Wert entweder zu beiden Teillisten dazunehmen oder jeweils *nicht* dazunehmen.

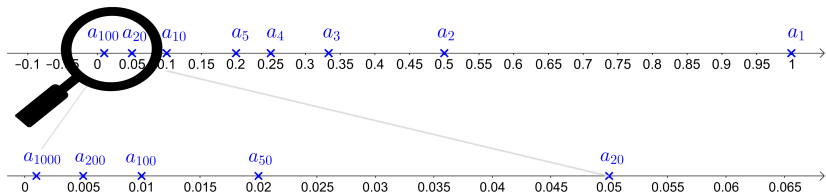
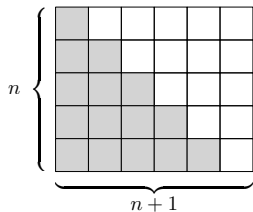


- 3)  $q_1$  ist der Median der linken Teilliste.  
 $q_3$  ist der Median der rechten Teilliste.



# Folgen und Reihen

- KH – Folgen und Reihen
- KH – Grenzwerte
- AB – Grenzwerte





# „Das kann ich verstehen und erklären.“

Unser erster Grenzwert



MATHEMATIK  
macht  
FREUNDE

$\langle a_n \rangle = \langle 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999; \dots \rangle$ , also  $a_n = 0, \underbrace{99 \dots 9}_n$ .

Streiche die falschen Aussagen durch: Die Folge  $\langle a_n \rangle$  ist ...

... streng monoton wachsend.

... streng monoton fallend.

... beschränkt.

... monoton wachsend.

... monoton fallend.

... unbeschränkt.

Gibt es eine Zahl, die größer als alle  $a_n$ , aber kleiner als 1 ist?

Der Grenzwert ist  $0,9 = 1$ .





# „Das kann ich verstehen und erklären.“

Unser erster Grenzwert



MATHEMATIK  
macht  
FREUNDE

$\langle a_n \rangle = \langle 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999; \dots \rangle$ , also  $a_n = 0, \underbrace{99 \dots 9}_n$ .

Streiche die falschen Aussagen durch: Die Folge  $\langle a_n \rangle$  ist ...

... streng monoton wachsend.

~~... streng monoton fallend.~~

... beschränkt.

... monoton wachsend.

~~... monoton fallend.~~

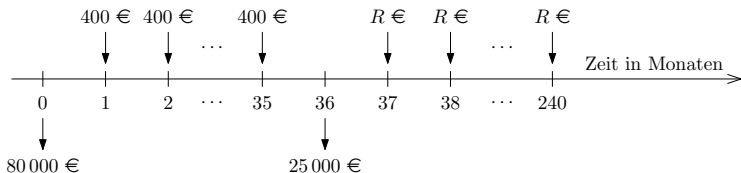
~~... unbeschränkt.~~

Gibt es eine Zahl, die größer als alle  $a_n$ , aber kleiner als 1 ist? **Nein.**

Der Grenzwert ist  $0,9 = 1$ .



- KH – Finanzmathematik I



In Planung:

- KH – Finanzmathematik II (Kosten- und Preistheorie)

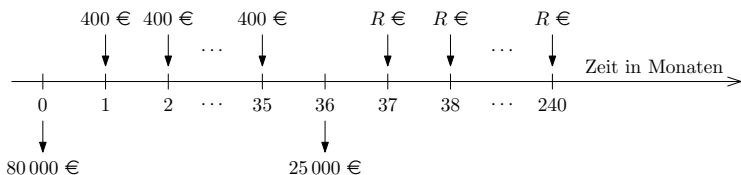




# „Hier kommt ein Kochrezept.“

Effektiver Jahreszinssatz:  $i = 3,75\%$

Zeitachse:



Wie groß muss die Rate  $R$  sein, damit die Schulden nach insgesamt 20 Jahren getilgt sind?

Kochrezept für Spar- und Kreditaufgaben



- 1) Aufzinsungsfaktor(en) berechnen.
- 2) Bezugszeitpunkt wählen. Wähle zum Beispiel den letzten genannten Zeitpunkt in der Aufgabenstellung.  
Den Gesamtwert der Einzahlungen und Auszahlungen zum Bezugszeitpunkt berechnen.  
Bei regelmäßigen Zahlungen über einen längeren Zeitraum kannst du die Rechnung mit einer geometrischen Reihe abkürzen.
- 3) Mit den beiden Gesamtwerten eine Gleichung aufstellen.
- 4) Aus der Gleichung die gesuchte Größe berechnen.

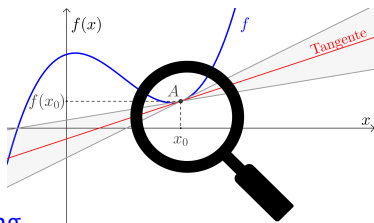




- KH – Differenzieren I
- KH – Differenzieren II
- KH – Stammfunktionen
- AB – Ableitungen höherer Ordnung
- AB – Differentialquotient
- AB – Newtonsches Näherungsverfahren
- AB – Optimierungsaufgaben
- TB – Kurvenuntersuchungen
- TB – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

In Planung:

- KH – Differentialgleichungen

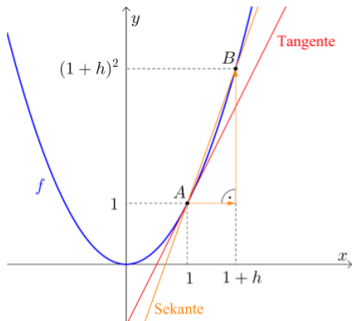




Welche Steigung hat  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x_0 = 1$ ?

- 1) Berechne die Steigung der Sekante durch die Punkte  
 $A = (1 \mid f(1))$  und  $B = (1 + h \mid f(1 + h))$ :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} =$$



- 2) Die Sekantensteigung geht mit  $h$  gegen 0 auf den  
 Wert \_\_\_\_\_ zu.

„Ganz egal, wie sich der Punkt B entlang des Graphen auf den Punkt A hinbewegt, die Steigung der Sekanten strebt immer gegen dieselbe Zahl k. Diese Zahl k ist die Steigung der **Tangente** im Punkt A.“

Wir schreiben dafür auch:  $k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$  \_\_\_\_\_ .





# „Hier soll ich aktiv werden.“



Welche Steigung hat  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x_0 = 1$ ?

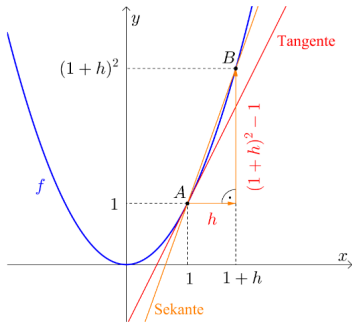
- 1) Berechne die Steigung der Sekante durch die Punkte  
 $A = (1 \mid f(1))$  und  $B = (1 + h \mid f(1 + h))$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} &= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \\ &= \frac{1 + 2 \cdot h + h^2 - 1}{h} = \\ &= \frac{h \cdot (2+h)}{h} = 2 + h \end{aligned}$$

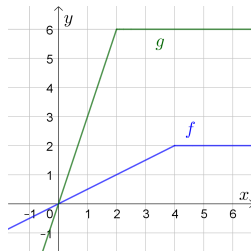
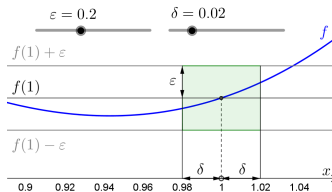
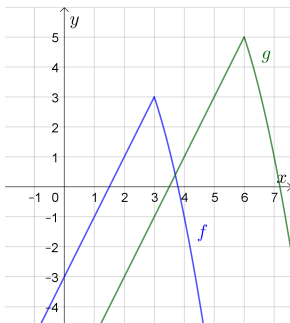
- 2) Die Sekantensteigung geht mit  $h$  gegen 0 auf den Wert **2** zu.

„Ganz egal, wie sich der Punkt  $B$  entlang des Graphen auf den Punkt  $A$  hinbewegt, die Steigung der Sekanten strebt immer gegen dieselbe Zahl  $k$ . Diese Zahl  $k$  ist die Steigung der **Tangente** im Punkt  $A$ .“

Wir schreiben dafür auch:  $k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$ .



- AB – Funktionsgraphen
- AB – Stetigkeit





Die Funktion  $f$  ist **stetig an der Stelle  $x_0$** . Das heißt genau: Damit der Wert  $f(x)$  innerhalb einer gegebenen Fehlertoleranz von  $f(x_0)$  bleibt, haben wir im Argument  $x$  um  $x_0$  immer etwas Spielraum.

Dafür wird zuerst eine Fehlertoleranz  $\varepsilon > 0$  festgelegt.

Ist das Argument  $x$  *nahe genug* an der Stelle  $x_0$ , so bleibt der zugehörige Funktionswert  $f(x)$  innerhalb dieser Fehlertoleranz  $\varepsilon > 0$  vom Funktionswert  $f(x_0)$ :

$$\underline{\hspace{2cm}} < f(x) < \underline{\hspace{2cm}}.$$

Den Spielraum im Argument will man genau kennen.

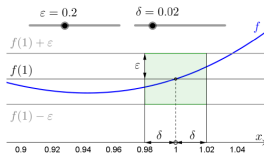
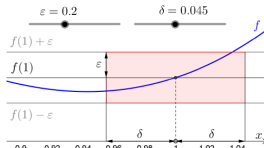
Mit  **$f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$**  meinen wir exakt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein passendes  $\delta > 0$  so, dass

$$\underline{\hspace{2cm}} < x < \underline{\hspace{2cm}}$$

zur Folge hat, dass auch

$$\underline{\hspace{2cm}} < f(x) < \underline{\hspace{2cm}}.$$



Hier ist  $x_0 = 1$ . Oben ist  $\delta > 0$  zu groß.





Die Funktion  $f$  ist **stetig an der Stelle  $x_0$** . Das heißt genau: Damit der Wert  $f(x)$  innerhalb einer gegebenen Fehlertoleranz von  $f(x_0)$  bleibt, haben wir im Argument  $x$  um  $x_0$  immer etwas Spielraum.

Dafür wird zuerst eine Fehlertoleranz  $\varepsilon > 0$  festgelegt.

Ist das Argument  $x$  *nahe genug* an der Stelle  $x_0$ , so bleibt der zugehörige Funktionswert  $f(x)$  innerhalb dieser Fehlertoleranz  $\varepsilon > 0$  vom Funktionswert  $f(x_0)$ :

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Den Spielraum im Argument will man genau kennen.

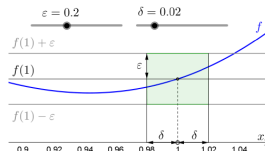
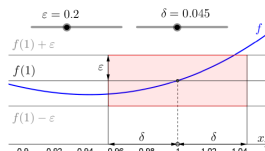
Mit  **$f$  ist stetig an der Stelle  $x_0$**  meinen wir exakt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein passendes  $\delta > 0$  so, dass

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

zur Folge hat, dass auch

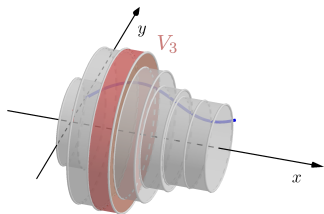
$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$



Hier ist  $x_0 = 1$ . Oben ist  $\delta > 0$  zu groß.



- KH – Integrieren I
- KH – Integrieren II
- KH – Integrieren III
- AB – Bestimmtes Integral
- AB – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- AB – Kulturtechnik Integration
- AB – Mittelwertsatz der Differentialrechnung
- AB – Mittelwertsatz der Integralrechnung
- AB – Physikalische Anwendungen der Diff.- und Int.rechnung
- AB – Rotationsvolumen



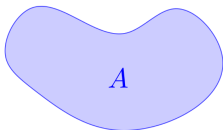
In Planung:

- KH – Differentialgleichungen





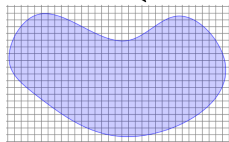
Kurvige Figuren und ihre Fläche



Wir interessieren uns für den Flächeninhalt  $A$  der links dargestellten Figur.

Die Formelsammlung hilft nicht.

Rechts haben wir ein Raster auf die Figur gelegt. Wie bringt uns das weiter?







# „Hier soll ich aktiv werden.“

Quadratur des Kreises?!

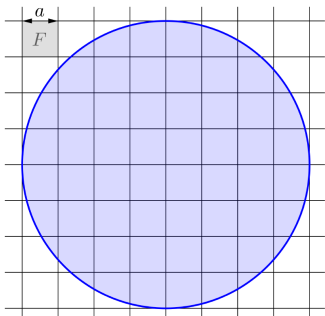


MATHEMATIK  
macht  
FREUNDE

Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.

Die Seitenlänge  $a$  eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster unten ist  $a =$  \_\_\_\_\_ cm.

Der Flächeninhalt  $F$  eines einzelnen Quadrats im Raster ist  $F =$  \_\_\_\_\_ cm<sup>2</sup>.



Die Quadrate im Raster, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt  $U$ .

$$U = \text{_____} \cdot F = \text{_____} \text{ cm}^2$$

$U$  steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt  $O$ .

$$O = \text{_____} \cdot F = \text{_____} \text{ cm}^2$$

$O$  steht für **Obersumme**.

Der Flächeninhalt  $A$  des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme:

$$\text{_____} \leq A \leq \text{_____}$$

Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?





# „Hier soll ich aktiv werden.“

Quadratur des Kreises?!

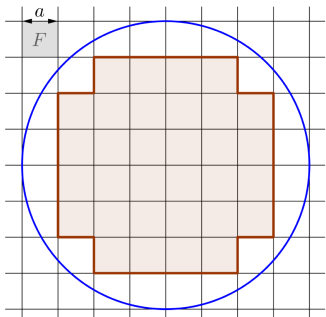


MATHEMATIK  
macht  
FREUNDE

Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.

Die Seitenlänge  $a$  eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster unten ist  $a =$  \_\_\_\_\_ cm.

Der Flächeninhalt  $F$  eines einzelnen Quadrats im Raster ist  $F =$  \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .



Die Quadrate im Raster, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt  $U$ .

$$U = 32 \cdot F = \text{_____} \text{ cm}^2$$

$U$  steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt  $O$ .

$$O = 60 \cdot F = \text{_____} \text{ cm}^2$$

$O$  steht für **Obersumme**.

Der Flächeninhalt  $A$  des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme:

$$U \leq A \leq O$$

Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?





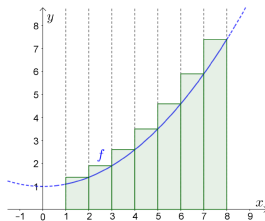
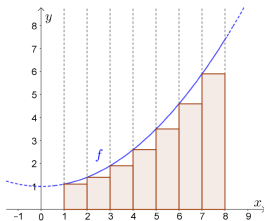
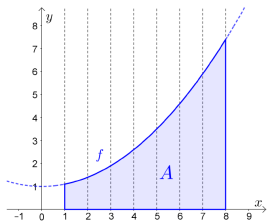
# „Hier soll ich aktiv werden.“



Unten siehst du den Graphen von  $f(x) = 0,1 \cdot x^2 + 1$ .

Wir wollen den Flächeninhalt  $A$  zwischen dem Graphen und der  $x$ -Achse im Intervall  $[1; 8]$  abschätzen. Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.

Den Flächeninhalt eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



Wie groß ist der Flächeninhalt  $A$  also mindestens? Wie groß ist der Flächeninhalt  $A$  also höchstens?

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

\_\_\_\_\_  $\leq A \leq$  \_\_\_\_\_





# „Hier soll ich aktiv werden.“

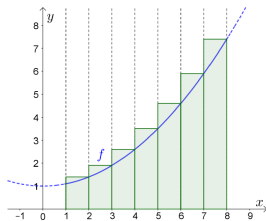
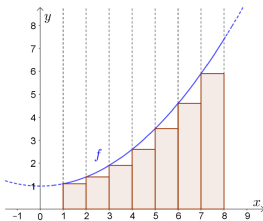
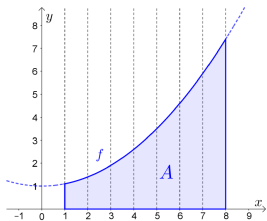


Unten siehst du den Graphen von  $f(x) = 0,1 \cdot x^2 + 1$ .

Wir wollen den Flächeninhalt  $A$  zwischen dem Graphen und der  $x$ -Achse im Intervall  $[1; 8]$  abschätzen.

Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.

Den Flächeninhalt eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



Wie groß ist der Flächeninhalt  $A$  also mindestens? Wie groß ist der Flächeninhalt  $A$  also höchstens?

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1,1	1,4	1,9	2,6	3,5	4,6	5,9	7,4

$$1,1 \cdot 1 + 1,4 \cdot 1 + \dots + 5,9 \cdot 1 = 21 \leq A \leq 27,3 = 1,4 \cdot 1 + 1,9 \cdot 1 + \dots + 7,4 \cdot 1$$





# „Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“

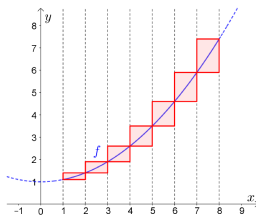
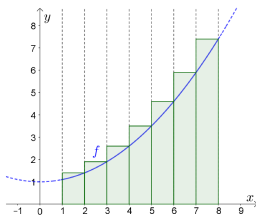
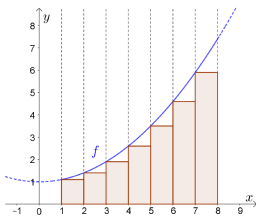
Verfeinerung



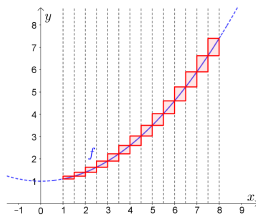
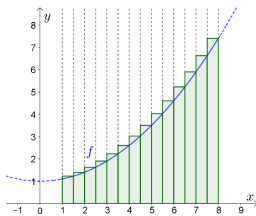
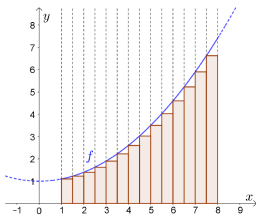
MATHEMATIK  
SIEHT  
FREUNDE

Die **Untersumme** im linken Bild ist  $U = 21$ . Die **Obersumme** im mittleren Bild ist  $O = 27,3$ .

Die Gesamtfläche der gefärbten „Fehlerrechtecke“ im rechten Bild ist  $E =$  \_\_\_\_\_ . Error



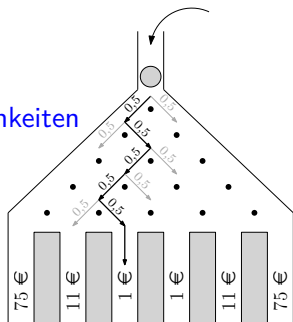
Wir verfeinern die Zerlegung, indem wir die Breite aller Rechtecke halbieren:



Ob wir wohl den Gesamtfehler beliebig klein machen können?



- KH – Kombinatorik
- KH – Stochastik I
- KH – Stochastik II
- KH – Stochastik III
- AB – Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten
- AB – Binomialverteilung
- AB – Kombinatorik
- AB – Laplace-Experimente
- AB – Normalverteilung
- AB – Pascalsches Dreieck II
- AB – Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume
- AB – Zufallsvariablen





Wir würfeln mit einem gezinkten 6-seitigen Würfel:  $\Omega = \{\cdot, \cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}$

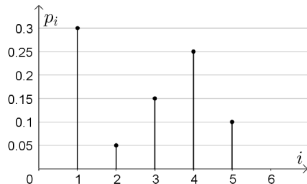
Die 6 möglichen Ergebnisse sind also *nicht* alle gleich wahrscheinlich.

Im folgenden Stabdiagramm sind die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen von 1 bis 5 dargestellt:

- a) Übertrage die Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_5$  aus dem Stabdiagramm in die Tabelle.

Ergebnis $\omega_i$	$\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$
$p_i = P(\{\omega_i\})$						

Ermittle  $p_6$ , und zeichne rechts den zugehörigen Stab ein.



- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Augenzahl mindestens 5 ist.

$$P(\{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}) = P(\{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\} \text{ oder } \{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}) =$$





Wir würfeln mit einem gezinkten 6-seitigen Würfel:  $\Omega = \{\cdot, \cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}$

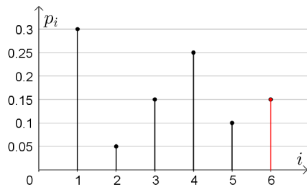
Die 6 möglichen Ergebnisse sind also *nicht* alle gleich wahrscheinlich.

Im folgenden Stabdiagramm sind die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen von 1 bis 5 dargestellt:

- a) Übertrage die Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_5$  aus dem Stabdiagramm in die Tabelle.

Ergebnis $\omega_i$	$\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$
$p_i = P(\{\omega_i\})$	30%	5%	15%	25%	10%	15%

Ermittle  $p_6$ , und zeichne rechts den zugehörigen Stab ein.



- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Augenzahl mindestens 5 ist.

$$P(\{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}) = P(\{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\} \text{ oder } \{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}) = p_5 + p_6 = 10\% + 15\% = 25\%$$







Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Das Casino bietet folgendes Spiel an: Man setzt einen Einsatz auf „Rot“ oder „Schwarz“. Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.



Lukas setzt 37 € auf „Rot“. Die Zufallsvariable  $X$  gibt seinen Gewinn nach Abzug vom Einsatz an.

- 1) Trage die möglichen Werte von  $X$  und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.
- 2) Berechne den Erwartungswert von  $X$ .

$x_i$		
$P(X = x_i)$		

$$E(X) =$$

Interpretation des Erwartungswerts im Sachzusammenhang:

Wenn Lukas immer wieder 37 € auf „Rot“ setzt, dann sollte er auf lange Sicht einen durchschnittlichen Verlust von \_\_\_\_\_ pro Spiel erwarten.

**Versuche** dein Glück also besser mit Spielgeld.

[Arbeitsblatt: Zufallsvariablen](#)





Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Das Casino bietet folgendes Spiel an:

Man setzt einen Einsatz auf „Rot“ oder „Schwarz“. Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.



Lukas setzt 37 € auf „Rot“. Die Zufallsvariable  $X$  gibt seinen Gewinn nach Abzug vom Einsatz an.

- 1) Trage die möglichen Werte von  $X$  und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.
- 2) Berechne den Erwartungswert von  $X$ .

$x_i$	37 €	-37 €
$P(X = x_i)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

$$E(X) = 37 \cdot \frac{18}{37} + (-37) \cdot \frac{19}{37} = 18 - 19 = -1 \text{ €}$$

Interpretation des Erwartungswerts im Sachzusammenhang:

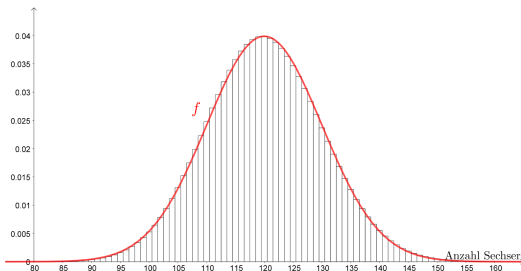
Wenn Lukas immer wieder 37 € auf „Rot“ setzt, dann sollte er auf lange Sicht einen durchschnittlichen Verlust von 1 € pro Spiel erwarten.

*Versuche* dein Glück also besser mit Spielgeld.





Bei  $n = 720$  Würfeln nimmt das Säulendiagramm von  $S_{720}$  die folgende Form an:



Animationen:  
*y*-Achse variabel skaliert

*y*-Achse fix skaliert

Markiere eine Fläche, deren Inhalt die WS für mindestens 130 Sechser und höchstens 140 Sechser ist.

Wir haben hier auch den Graphen einer ganz bestimmten Funktion  $f$  eingezeichnet.

Dieser Graph schmiegt sich an das glockenförmige Profil des Säulendiagramms.

Wie würdest du mit  $f$  diese Wahrscheinlichkeit näherungsweise berechnen?

$$P(130 \leq S_{720} \leq 140) \approx$$





**Vielen herzlichen Dank für das Interesse!**

Anmeldung zum Newsletter: <https://mmf.univie.ac.at>

E-Mail: [lukas.riegler@univie.ac.at](mailto:lukas.riegler@univie.ac.at)

