Mathematik macht Freu(n)de

Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair
Dr. Lukas Riegler

Lehrveranstaltung – Universität Graz
22. März 2019

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE
NIEDERÖSTERREICH

MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

universität
wien

Ablauf

1. Das Projekt
2. Die Kompetenzmaterialien
3. Von den Mathematik-Coaches aus Wien

Ablauf

1. Das Projekt
2. Die Kompetenzmaterialien
3. Von den Mathematik-Coaches aus Wien

Mathematik macht Freu(n)de – Das Projekt

- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- Kompetenzmaterialien
- Akademie für Junglehrpersonen
- Intensiv-Studienclubs
- Vorkurs Mathematik
- Mathematik-Olympiade

MmF für Studierende im UF Mathematik

- **Lehrveranstaltung**
- Fortbildungen
- **Kompetenzmaterialien**
- **Akademie für Junglehrpersonen**
- **Intensiv-Studienclubs**
- **Vorkurs Mathematik**
- Mathematik-Olympiade

MmF für SchülerInnen

- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- **Kompetenzmaterialien**
- Akademie für Junglehrpersonen
- **Intensiv-Studienclubs**
- Vorkurs Mathematik
- **Mathematik-Olympiade**

MmF für StudienanfängerInnen

- Lehrveranstaltung
- Fortbildungen
- **Kompetenzmaterialien**
- Akademie für Junglehrpersonen
- Intensiv-Studienclubs
- **Vorkurs Mathematik**
- Mathematik-Olympiade

2018: ~1600 SchülerInnen / StudienanfängerInnen

MmF für Lehrpersonen

- Lehrveranstaltung
- **Fortbildungen**
- **Kompetenzmaterialien**
- **Akademie für Junglehrpersonen**
- Intensiv-Studienclubs
- Vorkurs Mathematik
- Mathematik-Olympiade

Newsletter für Lehrpersonen $\rightsquigarrow$ https://mmf.univie.ac.at

Ablauf

Kompetenzmaterialien

- Themenbereiche der Sekundarstufe II
- Orientierung an SRDP-Aufgaben

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

- Praxiserprobt
  - MmF-Förderformate
  - Schulunterricht
- Uneingeschränkter, kostenloser Download
  https://mmf.univie.ac.at/materialien
- Creative Commons Lizenz

Kompetenzhefte

- 23 Kompetenzhefte
- Aufbau
  - Diagnoseaufgaben
  - Erklärungen
  - Weitere Aufgaben
- Zielgruppen
  - Lehrpersonen
  - SchülerInnen
- Weiterentwicklung

Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik

Kompetenzhefte	**Letzte Änderung**
Finanzmathematik I	31.08.2018
Folgen und Reihen	31.08.2018
Kombinatorik	21.12.2018
Statistik I (Statistische Kenngrößen, Boxplot, Diagramme)	21.06.2018
Stochastik I (Laplace, Wahrscheinlichkeitsräume, Zufallsvariablen)	06.02.2019
Stochastik II (Baumdiagramme, Binomialverteilung)	06.02.2019
Stochastik III (Normalverteilung)	06.02.2019

Arbeitsblätter	**Letzte Änderung**
Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten (Ausarbeitung)	06.02.2019
Binomialverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Kombinatorik (Ausarbeitung)	06.02.2019
Laplace-Experimente (Ausarbeitung)	06.02.2019
Normalverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck I (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck II (Ausarbeitung)	06.02.2019
Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme (Ausarbeitung)	06.02.2019
Statistische Kenngrößen und Boxplot (Ausarbeitung)	21.06.2018
Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume (Ausarbeitung)	06.02.2019
Zufallsvariablen (Ausarbeitung)	06.02.2019

Technologieblätter	**Letzte Änderung**
Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle (Ausarbeitung)	08.02.2019

- 40 Arbeitsblätter
- 4 Technologieblätter
- Unterrichtsgestaltung
- Ausarbeitungen
- Effizienz

Diskrete Mathematik, Statistik & Stochastik

Kompetenzhefte	**Letzte Änderung**
Finanzmathematik I	31.08.2018
Folgen und Reihen	31.08.2018
Kombinatorik	21.12.2018
Statistik I (Statistische Kenngrößen, Boxplot, Diagramme)	21.06.2018
Stochastik I (Laplace, Wahrscheinlichkeitsräume, Zufallsvariablen)	06.02.2019
Stochastik II (Baumdiagramme, Binomialverteilung)	06.02.2019
Stochastik III (Normalverteilung)	06.02.2019

Arbeitsblätter	**Letzte Änderung**
Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten (Ausarbeitung)	06.02.2019
Binomialverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Kombinatorik (Ausarbeitung)	06.02.2019
Laplace-Experimente (Ausarbeitung)	06.02.2019
Normalverteilung (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck I (Ausarbeitung)	06.02.2019
Pascalsches Dreieck II (Ausarbeitung)	06.02.2019
Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme (Ausarbeitung)	06.02.2019
Statistische Kenngrößen und Boxplot (Ausarbeitung)	21.06.2018
Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume (Ausarbeitung)	06.02.2019
Zufallsvariablen (Ausarbeitung)	06.02.2019

Technologieblätter	**Letzte Änderung**
Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle (Ausarbeitung)	08.02.2019

Modularer Aufbau

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Wir verwenden die Potenzschreibweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Die Schreibweise a^9 ist praktischer als $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.
Sprechweise: „a *hoch* n“ oder manchmal die „n*-te Potenz von* a“

Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl n heißt **Exponent**.

Schreibweisen

Welche ganzen Zahlen verstecken sich hinter den folgenden Potenzen?

$2^3 =$ ______ $3^2 =$ ______ $5^1 =$ ______

$1^5 =$ ______ $0^2 =$ ______ $(-1)^3 =$ ______

Rechenregeln für Potenzen

Kannst du erklären, weshalb diese Rechenregeln gelten?

Denke zum Beispiel an $n = 3$ und $m = 2$.

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Was kann ich verstehen? **Was soll ich lernen?**

Modularer Aufbau

„Es ist, was es ist. Das muss ich lernen.“

„Das kann ich verstehen und erklären.“

„Hier soll ich aktiv werden.“

„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“

„Hier kommt ein Kochrezept.“

„Diese Formel finde ich in der Formelsammlung.“

„In diese Falle tappe ich nicht.“

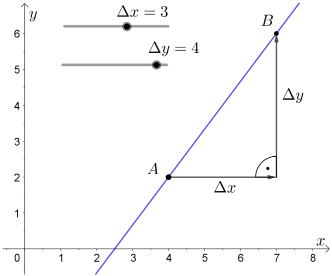
„Hier kann ich mich herausfordern.“

Themenbereiche

1. Lineare Funktionen
2. Termrechnung
3. Trigonometrie
4. Quadratische Funktionen
5. Exponential- und Logarithmusfunktionen
6. Vektorrechnung
7. Statistik
8. Folgen und Reihen
9. Finanzmathematik
10. Differentialrechnung
11. Funktionen
12. Integralrechnung
13. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Lineare Funktionen

- KH – Lineare Funktionen
- AB – Funktionen
- AB – Geradengleichungen
- AB – Lineare Funktionen
- AB – Steigungsmessung von Geraden

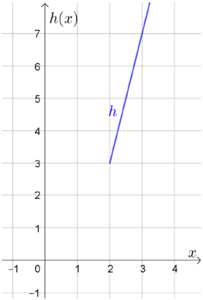


Schnittpunkt mit senkrechter Achse

Rechts ist der Graph der linearen Funktion h mit

$$h(x) = k \cdot x + d$$

für $x \geq 2$ dargestellt. Ermittle d.



„In diese Falle tappe ich nicht.“

Schnittpunkt mit senkrechter Achse

Rechts ist der Graph der linearen Funktion h mit

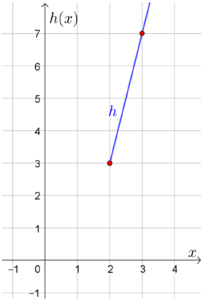
$$h(x) = k \cdot x + d$$

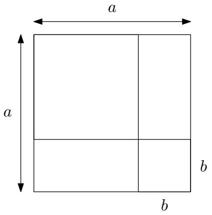
für $x \geq 2$ dargestellt. Ermittle d.

$$k = \frac{4}{1} = 4$$

Punkt $(2 \mid h(2))$ einsetzen und auf d umformen:

$$d = h(2) - k \cdot 2 = 3 - 4 \cdot 2 = -5$$





- AB – Pascalsches Dreieck I
- AB – Potenzen und Wurzeln
- Aufgabensammlung: Termrechnen & Gleichungen

$$\begin{tikzcd}
\cdots & 2^{-3} \arrow[r, bend right, ":2"'] & 2^{-2} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{-1} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{0} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{1} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{2} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{3} \arrow[l, bend right, ":2"'] \arrow[r, bend right, "\cdot 2"'] & 2^{4} \arrow[l, bend right, ":2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

In Planung:

- AB – Formeln und Gleichungen umformen

Wir haben zuvor berechnet:

$$(a+b)^2 = \mathbf{1}\cdot a^2 + \mathbf{2}\cdot a\cdot b + \mathbf{1}\cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = \mathbf{1}\cdot a^3 + \mathbf{3}\cdot a^2\cdot b + \mathbf{3}\cdot a\cdot b^2 + \mathbf{1}\cdot b^3$$

Siehst du den Zusammenhang mit dem Pascalschen Dreieck rechts? Setze das Muster fort:

$$(a+b)^4 =$$

$$(a+b)^5 =$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Wir haben zuvor berechnet:

$$(a+b)^2 = \mathbf{1} \cdot a^2 + \mathbf{2} \cdot a \cdot b + \mathbf{1} \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = \mathbf{1} \cdot a^3 + \mathbf{3} \cdot a^2 \cdot b + \mathbf{3} \cdot a \cdot b^2 + \mathbf{1} \cdot b^3$$

Siehst du den Zusammenhang mit dem Pascalschen Dreieck rechts? Setze das Muster fort:

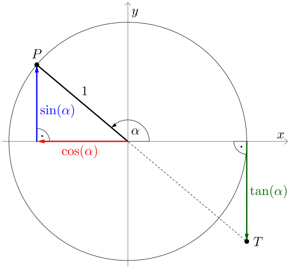
$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1}
\end{array}
$$

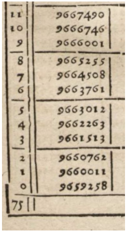
$$(a+b)^4 = \mathbf{1} \cdot a^4 + \mathbf{4} \cdot a^3 \cdot b + \mathbf{6} \cdot a^2 \cdot b^2 + \mathbf{4} \cdot a \cdot b^3 + \mathbf{1} \cdot b^4$$

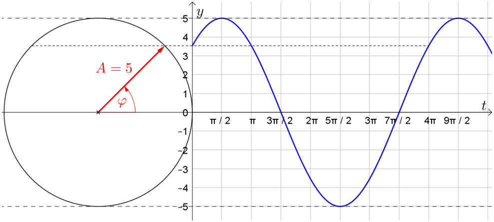
$$(a+b)^5 = \mathbf{1} \cdot a^5 + \mathbf{5} \cdot a^4 \cdot b + \mathbf{10} \cdot a^3 \cdot b^2 + \mathbf{10} \cdot a^2 \cdot b^3 + \mathbf{5} \cdot a \cdot b^4 + \mathbf{1} \cdot b^5$$

Trigonometrie

- KH – Trigonometrie I
- KH – Trigonometrie II
- KH – Trigonometrie III
- AB – Ähnlichkeit und Winkelfunktionen
- AB – Allgemeines Dreieck
- AB – Graphen der Winkelfunktionen
- AB – Winkelfunktionen am Einheitskreis

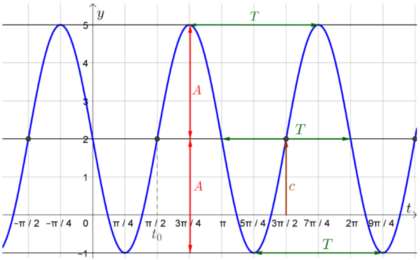






Funktionsgleichung aus Graphen ablesen

So können wir die Parameter von $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$ vom Graphen ablesen:



1) Amplitude $A > 0$ ablesen:

$A =$ ________

2) Verschiebung in y-Richtung ablesen:

$c =$ ________

3) Periodendauer $T > 0$ ablesen:

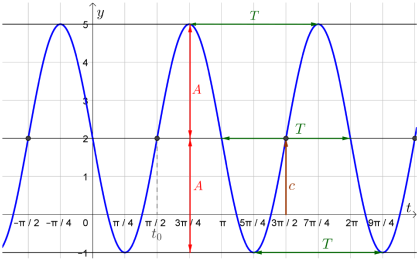
$T =$ ______ $\implies \omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T} =$ ________

4) t_0 ablesen: Positive Steigung bei t_0 beachten.

$t_0 =$ ______ $= -\dfrac{\varphi}{\omega} \implies \varphi =$ ________

$\implies y(t) =$ ________________

So können wir die Parameter von $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$ vom Graphen ablesen:



1) Amplitude $A > 0$ ablesen:

$A = 3$

2) Verschiebung in y-Richtung ablesen:

$c = 2$

3) Periodendauer $T > 0$ ablesen:

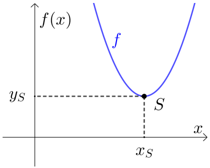
$$T = \pi \implies \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2$$

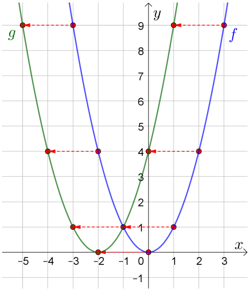
4) t_0 ablesen: Positive Steigung bei t_0 beachten.

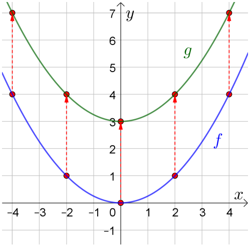
$$t_0 = \frac{\pi}{2} = -\frac{\varphi}{\omega} \implies \varphi = -\omega \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\implies y(t) = 3 \cdot \sin(2 \cdot t - \pi)$$

- KH – Quadratische Funktionen







In Planung:

- AB – Quadratische Funktionen
- AB – Quadratische Gleichungen

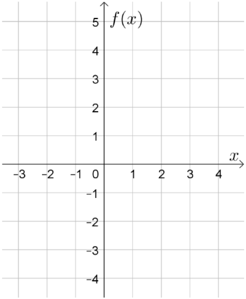
Scheitelpunkt

Gegeben ist die quadratische Funktion f mit

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3.$$

Ergänze die fehlenden Einträge in der Wertetabelle.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							



Skizziere rechts den Funktionsgraphen.
Der Funktionsgraph ist eine **Parabel**.
Der Extrempunkt $(1 \mid -4)$ heißt auch **Scheitelpunkt**.

Scheitelpunkt

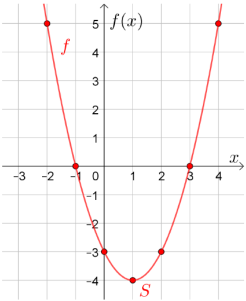
Gegeben ist die quadratische Funktion f mit

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3.$$

Ergänze die fehlenden Einträge in der Wertetabelle.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

Skizziere rechts den Funktionsgraphen.
Der Funktionsgraph ist eine **Parabel**.
Der Extrempunkt $(1 \mid -4)$ heißt auch **Scheitelpunkt**.



Minus mal minus

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = (x-1)^2 - 4.$$

An welcher Stelle x hat die Funktion ihren *kleinsten* Funktionswert? Wie groß ist dieser Funktionswert?

Minus mal minus

Gegeben ist die Funktion f mit

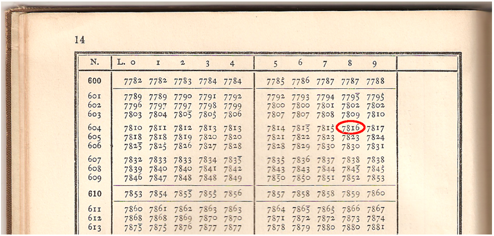
$$f(x) = (x-1)^2 - 4.$$

An welcher Stelle x hat die Funktion ihren *kleinsten* Funktionswert? Wie groß ist dieser Funktionswert?

Es gilt $(x-1)^2 \geq 0$ und $(x-1)^2 = 0$, falls $x = 1$ ist.

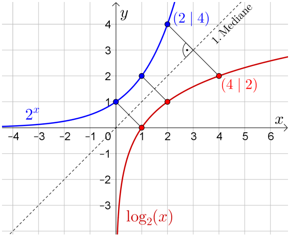
An der Stelle $x = 1$ ist also der kleinste Funktionswert $f(1) = 0 - 4 = -4$.

- KH – Exponential- und Logarithmusfunktionen
- AB – Exponentialfunktionen
- AB – Logarithmusfunktionen



14

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	7782	7782	7783	7784	7784	7785	7786	7787	7787	7788
601	7789	7789	7790	7791	7792	7792	7793	7794	7795	7795
602	7796	7797	7797	7798	7799	7800	7800	7801	7802	7802
603	7803	7804	7805	7805	7806	7807	7807	7808	7809	7810
604	7810	7811	7812	7813	7813	7814	7815	7815	7816	7817
605	7818	7818	7819	7820	7820	7821	7822	7823	7823	7824
606	7825	7825	7826	7827	7828	7828	7829	7830	7830	7831
607	7832	7833	7833	7834	7835	7835	7836	7837	7838	7838
608	7839	7840	7840	7841	7842	7843	7843	7844	7845	7845
609	7846	7847	7848	7848	7849	7850	7850	7851	7852	7853
610	7853	7854	7855	7855	7856	7857	7858	7858	7859	7860
611	7860	7861	7862	7863	7863	7864	7865	7865	7866	7867
612	7868	7868	7869	7870	7870	7871	7872	7872	7873	7874
613	7875	7875	7876	7877	7877	7878	7879	7880	7880	7881



„Es ist, was es ist. Das muss ich lernen.“

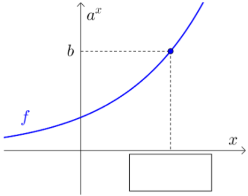
Logarithmus

Die Lösung x der Gleichung $a^x = b$ heißt **Logarithmus von b zur Basis a:**

$$a^x = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a(b) \qquad\qquad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

Sprechweise: *„x ist der Logarithmus von b zur Basis a.“*

Rechts siehst du den Graphen der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$. Beschrifte die markierte Stelle.



Logarithmen händisch berechnen

Wenn wir $\log_a(b)$ berechnen, denken wir: „a hoch welche Zahl ergibt b?“ $a^? = b$

a) $\log_{10}(1000) =$ ____ , weil $10^{\square} = 1000$.

b) $\log_7(49) =$ ____ , weil ____________ .

c) $\log_2(16) =$ ____ , weil ____________ .

d) $\log_2(0{,}5) =$ ____ , weil ____________ .

e) $\log_{11}(\sqrt{11}) =$ ____ , weil ____________ .

f) $\log_e(e^2) =$ ____ , weil ____________ .

g) $\log_b(b) =$ ____ , weil ____________ .

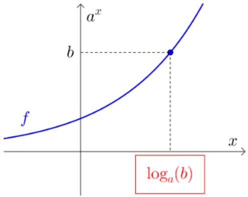
h) $\log_b(1) =$ ____ , weil ____________ .

Die Lösung x der Gleichung $a^x = b$ heißt **Logarithmus von b zur Basis a**:

$$a^x = b \quad \iff \quad x = \log_a(b) \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

Sprechweise: „*x ist der Logarithmus von b zur Basis a.*“

Rechts siehst du den Graphen der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$. Beschrifte die markierte Stelle.



Wenn wir $\log_a(b)$ berechnen, denken wir: „a hoch welche Zahl ergibt b?“ $a^? = b$

a) $\log_{10}(1000) = 3$, weil $10^{\boxed{3}} = 1000$.

b) $\log_7(49) = 2$, weil $7^2 = 49$.

c) $\log_2(16) = 4$, weil $2^4 = 16$.

d) $\log_2(0{,}5) = -1$, weil $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$.

e) $\log_{11}(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}$, weil $11^{1/2} = \sqrt{11}$.

f) $\log_e(e^2) = 2$, weil $e^2 = e^2$.

g) $\log_b(b) = 1$, weil $b^1 = b$.

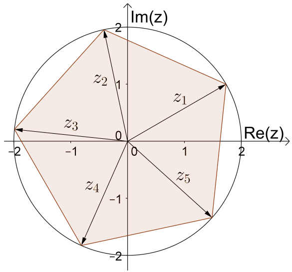
h) $\log_b(1) = 0$, weil $b^0 = 1$.

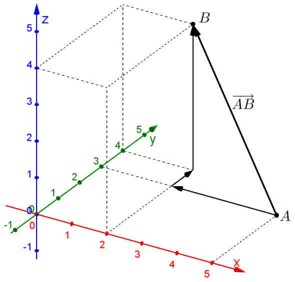
Vektorrechnung

- KH – Komplexe Zahlen
- KH – Vektorrechnung in der Ebene
- KH – Vektorrechnung im Raum
- AB – Vektorrechnung in der Ebene
- AB – Vektorrechnung im Raum

In Planung:

- AB – Parameterdarstellungen





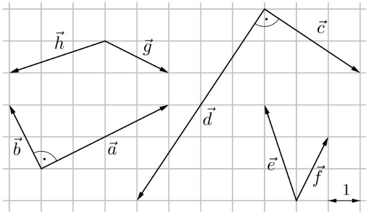
Skalarprodukt und Winkel

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$\vec{c} \cdot \vec{d} =$

$\vec{e} \cdot \vec{f} =$

$\vec{g} \cdot \vec{h} =$



Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Idee?

„Hier soll ich aktiv werden.“

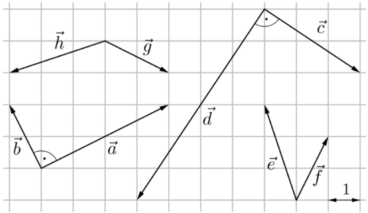
Skalarprodukt und Winkel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$$

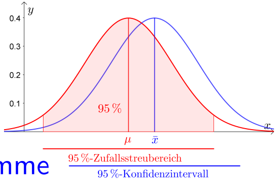
$$\vec{e} \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 + 6 = 5$$

$$\vec{g} \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -6 + 1 = -5$$

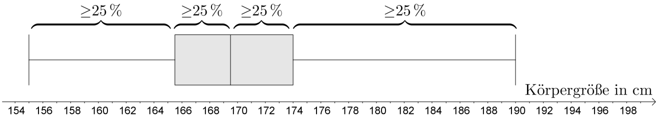


Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Idee?

Statistik



- KH – Statistik I
- AB – Interpolation und Regression
- AB – Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme
- AB – Statistische Kenngrößen und Boxplot
- TB – Regression
- TB – Zufallssstreubereiche und Konfidenzintervalle



In Planung:

- KH – Statistik II
  (Interpolation, Regression, Konfidenzintervalle)

„Hier kommt ein Kochrezept.“

Wir können Quartile q_1, q_2 und q_3 einer aufsteigend sortierten Listen wie folgt berechnen:

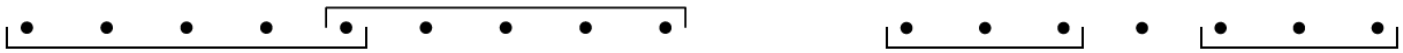
1) Für q_2 verwenden wir den Median der Werte.

2) Dann teilen wir die Liste in zwei gleich große Teillisten wie folgt:

- Ist $\boldsymbol{n}$ **gerade**, dann teilen wir die Liste in der Mitte auf.

- Ist $\boldsymbol{n}$ **ungerade**, dann teilen wir die Liste so auf, dass auch beide Teillisten eine *ungerade* Anzahl an Werten enthalten.

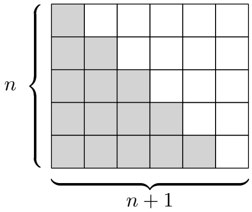
Dafür musst du den mittleren Wert entweder zu beiden Teillisten dazunehmen oder jeweils *nicht* dazunehmen.

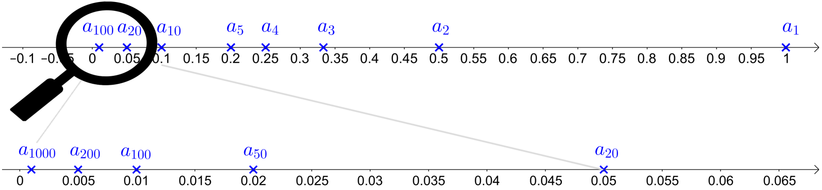


3) q_1 ist der Median der linken Teilliste.
q_3 ist der Median der rechten Teilliste.

Folgen und Reihen

- KH – Folgen und Reihen
- KH – Grenzwerte
- AB – Grenzwerte





Unser erster Grenzwert

$\langle a_n \rangle = \langle 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999;\ 0{,}99999;\ ...\rangle$, also $a_n = 0{,}\underbrace{99\cdots9}_{n \text{ Ziffern}}$.

Streiche die falschen Aussagen durch: Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist …

… streng monoton wachsend.	… streng monoton fallend.	… beschränkt.
… monoton wachsend.	… monoton fallend.	… unbeschränkt.

Gibt es eine Zahl, die größer als alle a_n, aber kleiner als 1 ist?

Der Grenzwert ist $0{,}\dot{9} = 1$.

„Das kann ich verstehen und erklären.“

Unser erster Grenzwert

$\langle a_n \rangle = \langle 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999;\ 0{,}99999;\ \ldots \rangle$, also $a_n = 0{,}\underbrace{99\cdots 9}_{n \text{ Ziffern}}$.

Streiche die falschen Aussagen durch: Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist …

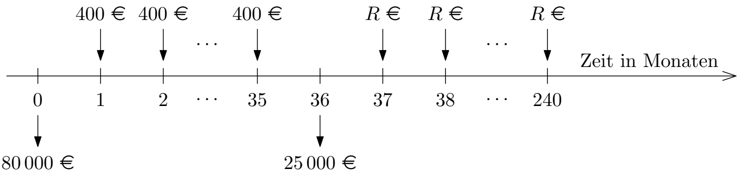
… streng monoton wachsend. ~~… streng monoton fallend.~~ … beschränkt.

… monoton wachsend. ~~… monoton fallend.~~ ~~… unbeschränkt.~~

Gibt es eine Zahl, die größer als alle a_n, aber kleiner als 1 ist? Nein.

Der Grenzwert ist $0{,}\dot{9} = 1$.

- KH – Finanzmathematik I



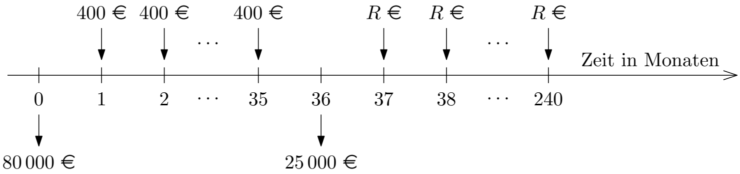
In Planung:

- KH – Finanzmathematik II (Kosten- und Preistheorie)

„Hier kommt ein Kochrezept.“

Effektiver Jahreszinsssatz: $i = 3{,}75\,\%$

Zeitachse:



Wie groß muss die Rate R sein, damit die Schulden nach insgesamt 20 Jahren getilgt sind?

Kochrezept für Spar- und Kreditaufgaben

1) Aufzinsungsfaktor(en) berechnen.

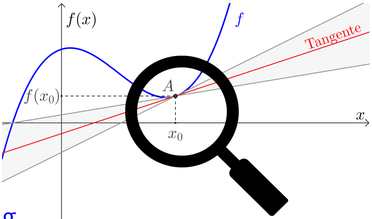
2) Bezugszeitpunkt wählen. Wähle zum Beispiel den letzten genannten Zeitpunkt in der Aufgabenstellung.

Den Gesamtwert der Einzahlungen und Auszahlungen zum Bezugszeitpunkt berechnen.

Bei regelmäßigen Zahlungen über einen längeren Zeitraum kannst du die Rechnung mit einer geometrischen Reihe abkürzen.

3) Mit den beiden Gesamtwerten eine Gleichung aufstellen.

4) Aus der Gleichung die gesuchte Größe berechnen.



- KH – Differenzieren I
- KH – Differenzieren II
- KH – Stammfunktionen
- AB – Ableitungen höherer Ordnung
- AB – Differentialquotient
- AB – Newtonsches Näherungsverfahren
- AB – Optimierungsaufgaben
- TB – Kurvenuntersuchungen
- TB – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

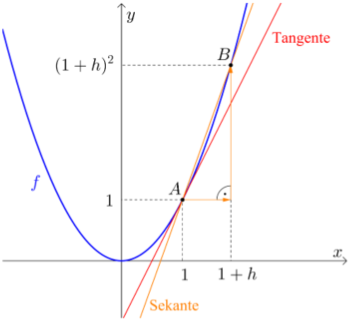
In Planung:

- KH – Differentialgleichungen

Welche Steigung hat $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$?

1) Berechne die Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (1 \mid f(1))$ und $B = (1+h \mid f(1+h))$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} =$$



2) Die Sekantensteigung geht mit h gegen 0 auf den Wert ______ zu.

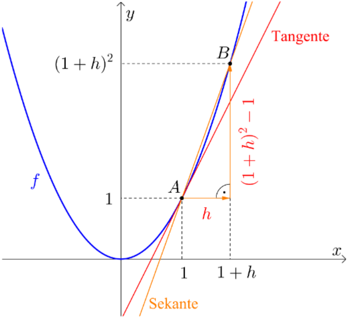
„Ganz egal, wie sich der Punkt B entlang des Graphen auf den Punkt A hinbewegt, die Steigung der Sekanten strebt immer gegen dieselbe Zahl k. Diese Zahl k ist die Steigung der ***Tangente*** *im Punkt A.“*

Wir schreiben dafür auch: $k = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$ ____________________ .

Welche Steigung hat $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$?

1) Berechne die Steigung der Sekante durch die Punkte $A = (1 \mid f(1))$ und $B = (1+h \mid f(1+h))$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2\cdot h+h^2-1}{h} = \frac{h\cdot(2+h)}{h} = 2+h$$

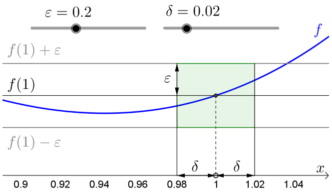


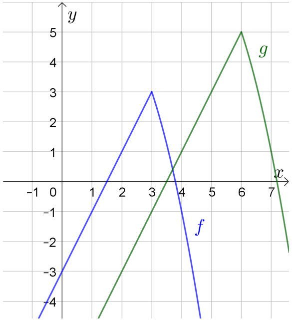
2) Die Sekantensteigung geht mit h gegen 0 auf den Wert 2 zu.

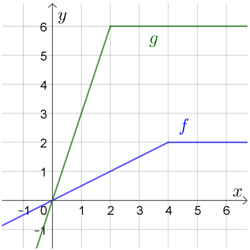
„Ganz egal, wie sich der Punkt B entlang des Graphen auf den Punkt A hinbewegt, die Steigung der Sekanten strebt immer gegen dieselbe Zahl k. Diese Zahl k ist die Steigung der ***Tangente*** *im Punkt A."*

Wir schreiben dafür auch: $k = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2+h) = 2$.

- AB – Funktionsgraphen
- AB – Stetigkeit







Stetigkeit

Die Funktion $\boldsymbol{f}$ **ist stetig an der Stelle** $\boldsymbol{x_0}$. Das heißt genau: Damit der Wert $f(x)$ innerhalb einer gegebenen Fehlertoleranz von $f(x_0)$ bleibt, haben wir im Argument x um x_0 immer etwas Spielraum.

Dafür wird zuerst eine Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ festgelegt.

Ist das Argument x *nahe genug* an der Stelle x_0, so bleibt der zugehörige Funktionswert $f(x)$ innerhalb dieser Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ vom Funktionswert $f(x_0)$:

$$\underline{\qquad\qquad} < f(x) < \underline{\qquad\qquad}\,.$$

Den Spielraum im Argument will man genau kennen.

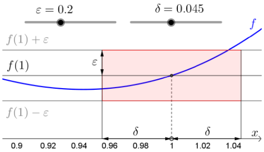
Mit $\boldsymbol{f}$ **ist stetig an der Stelle** $\boldsymbol{x_0}$ meinen wir exakt:

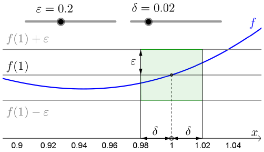
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein passendes $\delta > 0$ so, dass

$$\underline{\qquad\qquad} < x < \underline{\qquad\qquad}$$

zur Folge hat, dass auch

$$\underline{\qquad\qquad} < f(x) < \underline{\qquad\qquad}\,.$$





Hier ist $x_0 = 1$. Oben ist $\delta > 0$ zu groß.

„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“

Die Funktion $\boldsymbol{f}$ **ist stetig an der Stelle** $\boldsymbol{x_0}$. Das heißt genau: Damit der Wert $f(x)$ innerhalb einer gegebenen Fehlertoleranz von $f(x_0)$ bleibt, haben wir im Argument x um x_0 immer etwas Spielraum.

Dafür wird zuerst eine Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ festgelegt.

Ist das Argument x *nahe genug* an der Stelle x_0, so bleibt der zugehörige Funktionswert $f(x)$ innerhalb dieser Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ vom Funktionswert $f(x_0)$:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Den Spielraum im Argument will man genau kennen.

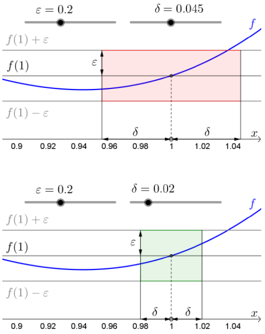
Mit $\boldsymbol{f}$ **ist stetig an der Stelle** $\boldsymbol{x_0}$ meinen wir exakt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein passendes $\delta > 0$ so, dass

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

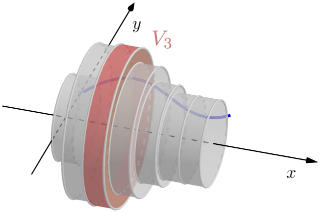
zur Folge hat, dass auch

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$



Hier ist $x_0 = 1$. Oben ist $\delta > 0$ zu groß.

Integralrechnung



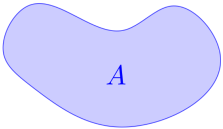
- KH – Integrieren I
- KH – Integrieren II
- KH – Integrieren III
- AB – Bestimmtes Integral
- AB – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- AB – Kulturtechnik Integration
- AB – Mittelwertsatz der Differentialrechnung
- AB – Mittelwertsatz der Integralrechnung
- AB – Physikalische Anwendungen der Diff.- und Int.rechnung
- AB – Rotationsvolumen

In Planung:

- KH – Differentialgleichungen

„Das kann ich verstehen und erklären."

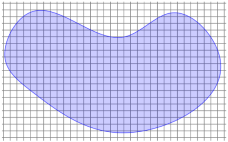
Kurvige Figuren und ihre Fläche



Wir interessieren uns für den Flächeninhalt A der links dargestellten Figur.

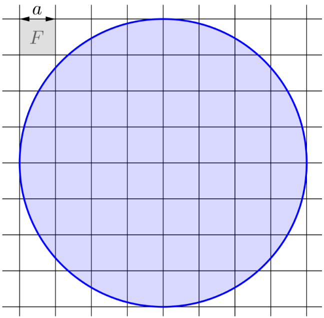
Die Formelsammlung hilft nicht.

Rechts haben wir ein Raster auf die Figur gelegt. Wie bringt uns das weiter?



Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.
Die Seitenlänge a eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster unten ist $a =$ ________ cm.

Der Flächeninhalt F eines einzelnen Quadrats im Raster ist $F =$ ____________ cm^2.



Die Quadrate im Raster, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt U.

$U =$ _____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

U steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt O.

$O =$ _____ $\cdot F =$ ____________ cm^2

O steht für **Obersumme**.

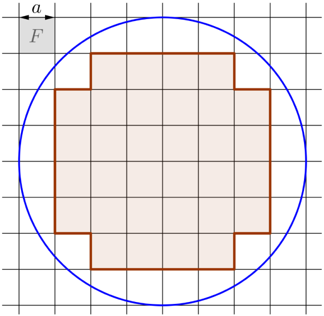
Der Flächeninhalt A des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme:

_____ $\leq A \leq$ _____

Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?

Wir beginnen mit etwas Vertrautem, nämlich dem Kreis.
Die Seitenlänge a eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster unten ist $a =$ ________ cm.

Der Flächeninhalt F eines einzelnen Quadrats im Raster ist $F =$ ________ cm^2.



Die Quadrate im Raster, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt U.

$U = 32 \cdot F =$ ________ cm^2

U steht für **Untersumme**.

Die Quadrate im Raster, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Rechtecksfigur mit Flächeninhalt O.

$O = 60 \cdot F =$ ________ cm^2

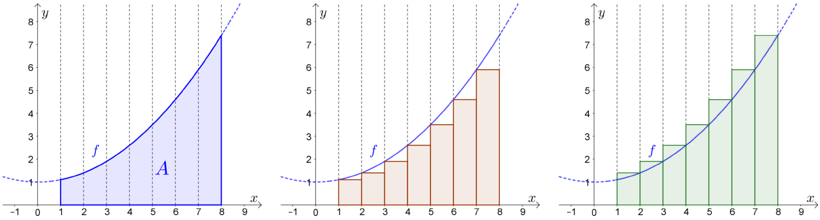
O steht für **Obersumme**.

Der Flächeninhalt A des Kreises liegt irgendwo zwischen der Untersumme und der Obersumme:

$U \leq A \leq O$

Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Den Flächeninhalt eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.

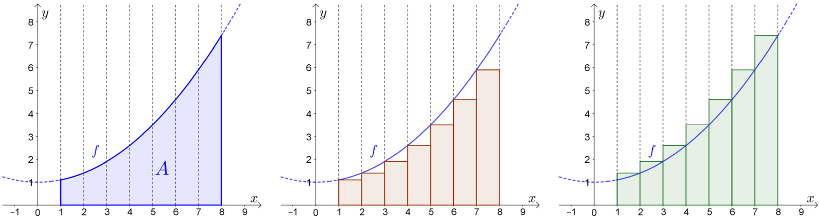


Wie groß ist der Flächeninhalt A also mindestens? Wie groß ist der Flächeninhalt A also höchstens?

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

________________ $\leq A \leq$ ________________

Unten siehst du den Graphen von $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$.
Wir wollen den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ abschätzen.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen.
Den Flächeninhalt eines jeden Streifens schätzen wir mit Rechtecken nach unten und nach oben ab.



Wie groß ist der Flächeninhalt A also mindestens? Wie groß ist der Flächeninhalt A also höchstens?

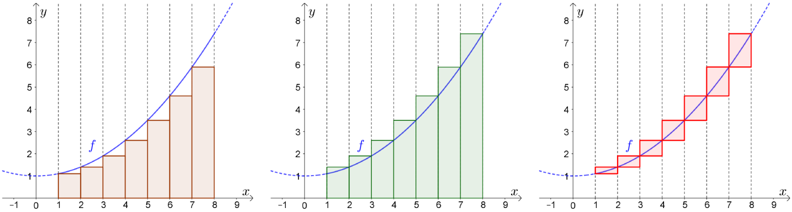
x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1,1	1,4	1,9	2,6	3,5	4,6	5,9	7,4

$$1{,}1 \cdot 1 + 1{,}4 \cdot 1 + \cdots + 5{,}9 \cdot 1 = 21 \leq A \leq 27{,}3 = 1{,}4 \cdot 1 + 1{,}9 \cdot 1 + \cdots + 7{,}4 \cdot 1$$

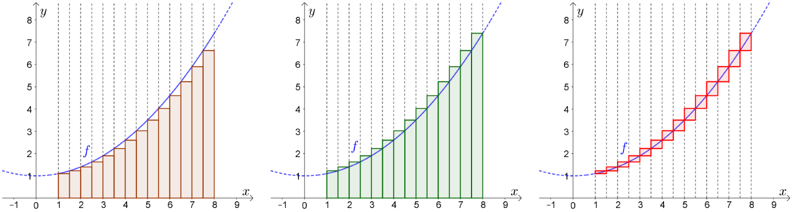
„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen."

Verfeinerung

Die **Untersumme** im linken Bild ist $U = 21$. Die **Obersumme** im mittleren Bild ist $O = 27{,}3$.
Die Gesamtfläche der gefärbten „Fehlerrechtecke" im rechten Bild ist $E =$ ____________ . *Error*



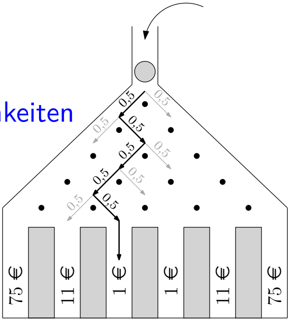
Wir verfeinern die Zerlegung, indem wir die Breite aller Rechtecke halbieren:



Ob wir wohl den Gesamtfehler beliebig klein machen können?

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- KH – Kombinatorik
- KH – Stochastik I
- KH – Stochastik II
- KH – Stochastik III
- AB – Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten
- AB – Binomialverteilung
- AB – Kombinatorik
- AB – Laplace-Experimente
- AB – Normalverteilung
- AB – Pascalsches Dreieck II
- AB – Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume
- AB – Zufallsvariablen



Gezinkter Würfel

Wir würfeln mit einem gezinkten 6-seitigen Würfel: $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

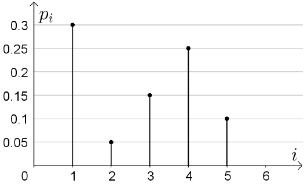
Die 6 möglichen Ergebnisse sind also *nicht* alle gleich wahrscheinlich.

Im folgenden Stabdiagramm sind die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen von 1 bis 5 dargestellt:

a) Übertrage die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_5$ aus dem Stabdiagramm in die Tabelle.

Ergebnis ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$p_i = P(\{\omega_i\})$						

Ermittle p_6, und zeichne rechts den zugehörigen Stab ein.



b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Augenzahl mindestens 5 ist.

$P(\{$⚄, ⚅$\}) = P(\{$⚄$\}$ oder $\{$⚅$\}) =$

Gezinkter Würfel

Wir würfeln mit einem gezinkten 6-seitigen Würfel: $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

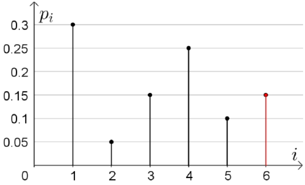
Die 6 möglichen Ergebnisse sind also *nicht* alle gleich wahrscheinlich.

Im folgenden Stabdiagramm sind die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen von 1 bis 5 dargestellt:

a) Übertrage die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_5$ aus dem Stabdiagramm in die Tabelle.

Ergebnis ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$p_i = P(\{\omega_i\})$	30 %	5 %	15 %	25 %	10 %	15 %

Ermittle p_6, und zeichne rechts den zugehörigen Stab ein.



b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Augenzahl mindestens 5 ist.

$P(\{$⚄, ⚅$\}) = P(\{$⚄$\}$ oder $\{$⚅$\}) = p_5 + p_6 = 10\,\% + 15\,\% = 25\,\%$

Roulette

Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Das Casino bietet folgendes Spiel an:
Man setzt einen Einsatz auf „Rot" oder „Schwarz". Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.

Lukas setzt 37 € auf „Rot". Die Zufallsvariable X gibt seinen Gewinn nach Abzug vom Einsatz an.

1) Trage die möglichen Werte von X und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.

2) Berechne den Erwartungswert von X.

x_i		
$P(X = x_i)$		

$E(X) =$

Interpretation des Erwartungswerts im Sachzusammenhang:

Wenn Lukas immer wieder 37 € auf „Rot" setzt, dann sollte er auf lange Sicht einen durchschnittlichen Verlust von __________ pro Spiel erwarten.

Versuche dein Glück also besser mit Spielgeld.

Arbeitsblatt: Zufallsvariablen

„Hier hilft mir Technologie beim Verstehen.“

Roulette

Beim Roulette gibt es 37 durchnummerierte Felder mit den Zahlen von 0 bis 36. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün. Das Casino bietet folgendes Spiel an:
Man setzt einen Einsatz auf „Rot“ oder „Schwarz“. Wenn die Kugel auf einem Feld mit der getippten Farbe landet, erhält man das Doppelte des Einsatzes zurück. Andernfalls verliert man den Einsatz.

Lukas setzt 37 € auf „Rot“. Die Zufallsvariable X gibt seinen Gewinn nach Abzug vom Einsatz an.

1) Trage die möglichen Werte von X und ihre Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle ein.

2) Berechne den Erwartungswert von X.

x_i	37 €	−37 €
$P(X = x_i)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

$$E(X) = 37 \cdot \frac{18}{37} + (-37) \cdot \frac{19}{37} = 18 - 19 = -1\ €$$

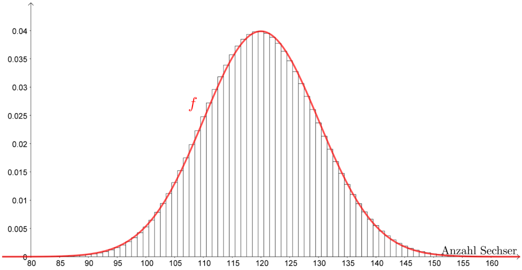
Interpretation des Erwartungswerts im Sachzusammenhang:

Wenn Lukas immer wieder 37 € auf „Rot“ setzt, dann sollte er auf lange Sicht einen durchschnittlichen Verlust von 1 € pro Spiel erwarten.

Versuche dein Glück also besser mit Spielgeld.

Arbeitsblatt: Zufallsvariablen

Bei $n = 720$ Würfen nimmt das Säulendiagramm von S_{720} die folgende Form an:



Animationen:
y-Achse variabel skaliert

y-Achse fix skaliert

Markiere eine Fläche, deren Inhalt die WS für mindestens 130 Sechser und höchstens 140 Sechser ist.

Wir haben hier auch den Graphen einer ganz bestimmten Funktion f eingezeichnet.
Dieser Graph schmiegt sich an das glockenförmige Profil des Säulendiagramms.
Wie würdest du mit f diese Wahrscheinlichkeit näherungsweise berechnen?

$$P(130 \leq S_{720} \leq 140) \approx$$

Arbeitsblatt: Normalverteilung

Ablauf

1. Das Projekt
2. Die Kompetenzmaterialien
3. Von den Mathematik-Coaches aus Wien

Nächster Termin für Intensiv-Studienclubs:

- Montag, 15.4.2019 – Donnerstag, 18.4.2019
- Schwerpunkt Maturavorbereitung
- Universität Wien, Fakultät für Mathematik
  PH Niederösterreich, Campus Baden
- Betreuungsverhältnis 1:6 oder besser
- Kostenbeitrag: 100 €
  für 4×4 Arbeitseinheiten
  als Honorar für die Coaches

Erfahrungen der Mathematik-Coaches

- Gruppeneinteilungen / Räumliche Struktur
- Planung für den ersten Tag
- Regeln aufstellen / Umgang miteinander
- Zeiteinteilung / Pausen / Energizers
- Inhaltliche Fragen / Kompetenzmaterialien
- Kommunikation
- Briefe an die NachfolgerInnen

Vielen herzlichen Dank für das Interesse!

Anmeldung zum Newsletter: https://mmf.univie.ac.at

E-Mail: lukas.riegler@univie.ac.at