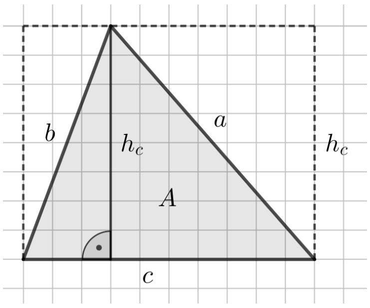
Dreieck – Flächeninhalt

Kennst du von einem Dreieck eine Seitenlänge und eine zugehörige Höhe,
dann kannst du seinen **Flächeninhalt** $\boldsymbol{A}$ mit der folgenden Formel berechnen:

$$\boldsymbol{A = \frac{c \cdot h_c}{2}}$$

„Seite mal zugehöriger Höhe durch 2.“



Begründe, warum die Formel im dargestellten Dreieck stimmt.

Das strichlierte Rechteck hat den Flächeninhalt $A_R = c \cdot h_c$.

Die Seiten a und b sind die Diagonalen der beiden kleinen Rechtecke.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt also: $A = \frac{A_R}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ ✓

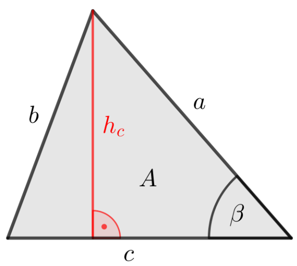
Tatsächlich gilt diese Formel für *alle* Dreiecke, auch für stumpfwinkelige Dreiecke.

Trigonometrische Flächenformel

Kennst du von einem Dreieck zwei Seitenlängen und den eingeschlossenen Winkel,
dann kannst du seinen **Flächeninhalt** $\boldsymbol{A}$ mit der **trigonometrischen Flächenformel** berechnen:

$$\boldsymbol{A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}}$$

„Seite mal Seite mal Sinus des eingeschlossenen Winkels durch 2.“



Zeichne im Dreieck links die Höhe auf c ein.
Begründe damit, dass die Formel im dargestellten Dreieck stimmt.

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \implies h_c = a \cdot \sin(\beta)$$

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} \checkmark$$

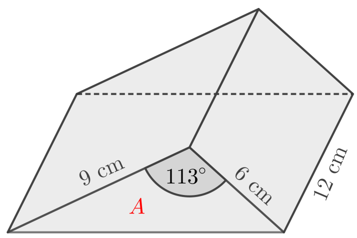
Tatsächlich gilt diese Formel für *alle* Dreiecke, auch für stumpfwinkelige Dreiecke. Was passiert bei $\beta = 90°$?

Prisma

Rechts ist ein gerades Prisma dargestellt. Berechne sein Volumen.

$$A = \frac{6 \cdot 9 \cdot \sin(113°)}{2} = 24{,}85\ldots\ \mathrm{cm}^2$$

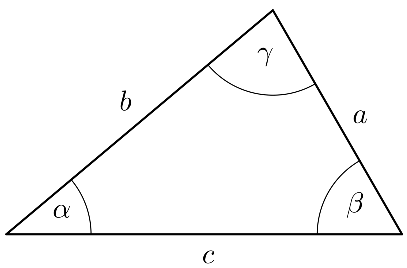
$$V = A \cdot 12 = 298{,}2\ldots\ \mathrm{cm}^3$$



Ein Zufall?

Miss im Dreieck unten die Winkel und Seitenlängen ab.
Berechne dann mit dem Taschenrechner die angegebenen Verhältnisse.

Hast du eine Vermutung?



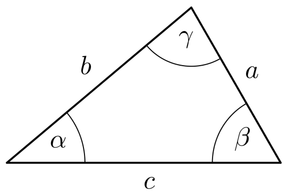
$\alpha = 40°$	$a =$ ☐ mm	$\frac{a}{\sin(\alpha)} =$ ☐
$\beta = 60°$	$b =$ ☐ mm	$\frac{b}{\sin(\beta)} =$ ☐
$\gamma = 80°$	$c =$ ☐ mm	$\frac{c}{\sin(\gamma)} =$ ☐

Sinussatz

In *jedem* Dreieck gilt der **Sinussatz**:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin(\boldsymbol{\alpha})} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin(\boldsymbol{\beta})} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin(\boldsymbol{\gamma})}$$

„Seite durch Sinus des gegenüberliegenden Winkels ist für alle drei Seiten gleich groß.“



Begründe, dass der Sinussatz im dargestellten Dreieck stimmt.

Hinweis: Berechne den Flächeninhalt mit der trigonometrischen Flächenformel auf verschiedene Arten und setze gleich.

$$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} \implies a \cdot c \cdot \sin(\beta) = b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$$

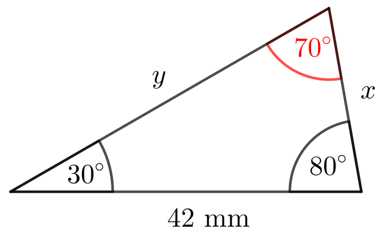
$$\implies a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha) \implies \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Im Spezialfall $\gamma = 90°$ gilt $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(90°)}$, also $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$. Das ist die Definition von Sinus im rechtwinkeligen Dreieck.

Sinussatz: Seitenlängen gesucht

Berechne die Seitenlängen x und y im dargestellten Dreieck.

Wie würdest du dieses Dreieck konstruieren?



$$180° - 30° - 80° = 70°$$

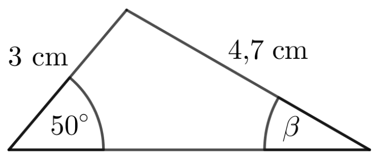
$$\frac{x}{\sin(30°)} = \frac{42}{\sin(70°)} \implies x = \frac{42 \cdot \sin(30°)}{\sin(70°)} = 22{,}3\ldots \text{ mm}$$

$$\frac{y}{\sin(80°)} = \frac{42}{\sin(70°)} \implies y = \frac{42 \cdot \sin(80°)}{\sin(70°)} = 44{,}0\ldots \text{ mm}$$

Sinussatz: Spitzer Winkel gesucht

Berechne den *spitzen* Winkel β im dargestellten Dreieck.

Wie würdest du dieses Dreieck konstruieren?



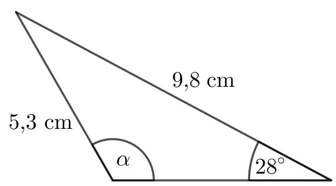
$$\frac{4{,}7}{\sin(50°)} = \frac{3}{\sin(\beta)} \implies \sin(\beta) = \underbrace{\frac{3 \cdot \sin(50°)}{4{,}7}}_{=0{,}4889\ldots}$$

$$\beta = \arcsin(0{,}4889\ldots) = 29{,}27\ldots°$$

Sinussatz: Stumpfer Winkel gesucht

Diesmal versuchen wir den dargestellten *stumpfen* Winkel α mit dem Sinussatz zu berechnen:

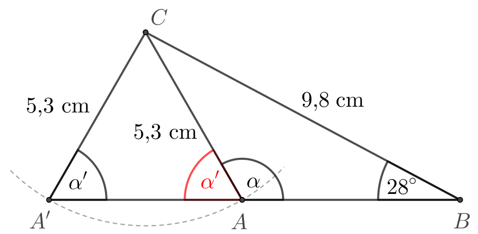
$$\frac{5{,}3}{\sin(28°)} = \frac{9{,}8}{\sin(\alpha)} \iff \sin(\alpha) = \underbrace{\frac{9{,}8 \cdot \sin(28°)}{5{,}3}}_{=0{,}868\ldots}$$



Berechne mit dem Taschenrechner: $\arcsin(0{,}868\ldots) = 60{,}23\ldots°$

Tatsächlich gibt es zwei verschiedene Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'BC$ mit den drei oben eingezeichneten Abmessungen. Wir haben oben nicht α, sondern den unten dargestellten spitzen Winkel α' berechnet.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen α' und α?
Berechne den stumpfen Winkel α.



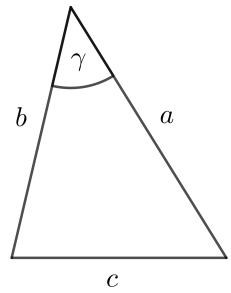
$$\alpha + \alpha' = 180° \implies \alpha = 180° - \alpha' = 119{,}7\ldots°$$

Wenn du mit dem Sinussatz einen Winkel berechnest,
musst du also wissen, ob dieser spitz oder stumpf ist.
Wenn er stumpf ist, musst du den vom Taschenrechner gelieferten spitzen Winkel auf 180° ergänzen.

Cosinussatz

In *jedem* Dreieck gilt der **Cosinussatz**:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)}$$

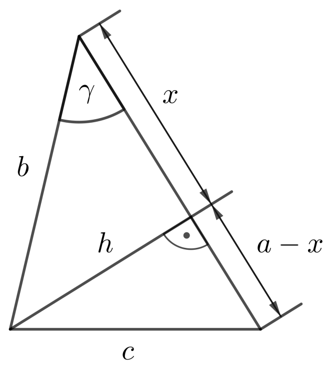


„Pythagoras mit Korrekturterm −2 mal Seite mal Seite mal Cosinus des eingeschlossenen Winkels.“

Tatsächlich ist der Satz von Pythagoras ein *Spezialfall* vom Cosinussatz, denn:

$$\gamma = 90^\circ \implies \cos(\gamma) = 0 \implies c^2 = a^2 + b^2$$

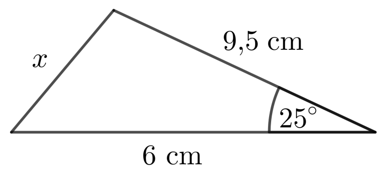
Die unten links eingezeichnete Höhe h teilt das Dreieck in zwei rechtwinkelige Dreiecke.
Begründe in den folgenden 4 Schritten, dass der Cosinussatz stimmt:



$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (a-x)^2 = && \text{(Pythagoras: Unteres Dreieck)} \\ &= h^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot x + x^2 = && \text{(Binomische Formel)} \\ &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot x = && \text{(Pythagoras: Oberes Dreieck)} \\ &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) && \text{(Cosinus: Oberes Dreieck)} \end{aligned}$$

Cosinussatz: Seitenlänge gesucht

Berechne die Seitenlänge x im rechts dargestellten Dreieck.



$$x^2 = \underbrace{6^2 + 9{,}5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9{,}5 \cdot \cos(25^\circ)}_{22{,}93...}$$

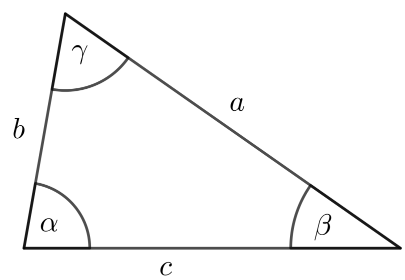
$$x = \sqrt{22{,}93...} = 4{,}78...\text{ cm}$$

Cosinussatz: Winkel gesucht

Berechne alle Winkel im dargestellten Dreieck mit $a = 6{,}5\,\text{cm}$, $b = 3{,}8\,\text{cm}$ und $c = 6\,\text{cm}$.

Hinweis: Jedes Dreieck kann höchstens einen stumpfen Winkel haben. Berechne zuerst den *größten* Winkel mit dem Cosinussatz.

Größten Winkel mit Cosinussatz berechnen:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \underbrace{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}}_{=0{,}179...}$$

$$\alpha = \arccos(0{,}179...) = 79{,}65...^\circ$$

Die beiden kleineren Winkel sind sicher spitz. Zweiten Winkel mit Sinussatz berechnen:

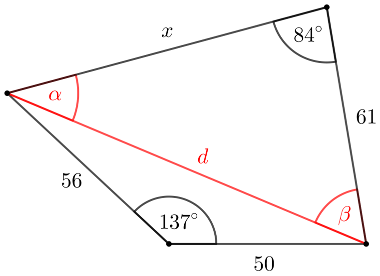
$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \implies \beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}\right) = 35{,}10...^\circ$$

Dritten Winkel mit Winkelsumme 180° berechnen:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 65{,}23...^\circ$$

Allgemeines Viereck

Rechts ist ein allgemeines Viereck dargestellt. (Seitenlängen in mm)
Berechne die Seitenlänge x und den Flächeninhalt des Vierecks.



1) Diagonale d mit Cosinussatz berechnen:

$$d = \sqrt{56^2 + 50^2 - 2 \cdot 56 \cdot 50 \cdot \cos(137°)} = 98{,}64\ldots\,\text{mm}$$

2) Spitzen Winkel α mit Sinussatz berechnen:

$$\frac{d}{\sin(84°)} = \frac{61}{\sin(\alpha)} \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{61 \cdot \sin(84°)}{d}\right) = 37{,}94\ldots°$$

3) Winkel β mit Winkelsumme 180° berechnen:

$$\beta = 180° - 84° - \alpha = 58{,}05\ldots°$$

4) Seitenlänge x mit Sinussatz berechnen:

$$\frac{x}{\sin(\beta)} = \frac{d}{\sin(84°)} \implies x = \frac{d \cdot \sin(\beta)}{\sin(84°)} = 84{,}16\ldots\,\text{mm}$$

5) Flächeninhalt mit trigonometrischer Flächenformel berechnen:

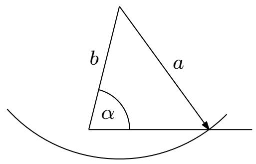
$$A = \frac{56 \cdot 50 \cdot \sin(137°)}{2} + \frac{61 \cdot x \cdot \sin(84°)}{2} = 3507{,}7\ldots\,\text{mm}^2$$

Konstruktion ⇝ Berechnung

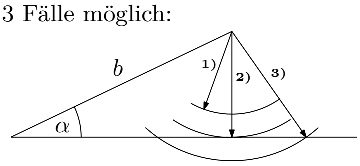
Kannst du ein Dreieck konstruieren, dann kannst du seine Seitenlängen und Winkel auch berechnen:

a) **Eine Seitenlänge** und **zwei Winkel** sind bekannt:
- i) Dritten Winkel mit Winkelsumme 180° berechnen.
- ii) Zweite und dritte Seitenlänge mit Sinussatz berechnen.

b) **Zwei Seitenlängen** und der **Winkel gegenüber der längeren Seite** sind bekannt:
- i) (Spitzen) Winkel gegenüber der kürzeren Seite mit Sinussatz berechnen.
- ii) Dritten Winkel mit Winkelsumme 180° berechnen.
- iii) Dritte Seitenlänge mit Sinussatz berechnen.



c) **Zwei Seitenlängen** und der **Winkel gegenüber der kürzeren Seite** sind bekannt:
- i) Winkel β gegenüber der längeren Seite mit Sinussatz berechnen. Dabei sind 3 Fälle möglich:
  - **1)** $\sin(\beta) > 1 \implies$ keine Lösung
  - **2)** $\sin(\beta) = 1 \implies$ genau eine Lösung ($\beta = 90°$)
  - **3)** $\sin(\beta) < 1 \implies$ zwei Lösungen β und β' ($\beta + \beta' = 180°$)
- ii) Dritten Winkel mit Winkelsumme 180° berechnen.
- iii) Dritte Seitenlänge mit Sinussatz berechnen.



d) **Zwei Seitenlängen** und der **eingeschlossene Winkel** sind bekannt:
- i) Dritte Seitenlänge mit Cosinussatz berechnen.
- ii) Spitzen Winkel mit Sinussatz berechnen. (Der Winkel gegenüber der kürzeren Seite ist sicher spitz.)
- iii) Dritten Winkel mit Winkelsumme 180° berechnen.

e) **Drei Seitenlängen** sind bekannt: (Die längste Seite muss kürzer als die Summe der beiden anderen Seiten sein.)
- i) Größten Winkel mit Cosinussatz berechnen. (Das ist der Winkel gegenüber der längsten Seite.)
- ii) Zweiten Winkel mit Sinussatz oder Cosinussatz berechnen. (Dieser Winkel ist sicher spitz.)
- iii) Dritten Winkel mit Winkelsumme 180° berechnen.