



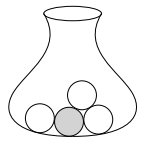
In einer Urne sind 1 graue Kugel und 3 weiße Kugeln.

Wenn wir nacheinander Kugeln aus der Urne ziehen, unterscheiden wir:

- i) **Ziehen ohne Zurücklegen:** gezogene Kugeln werden *nicht* zurückgelegt
- ii) **Ziehen mit Zurücklegen:** jede gezogene Kugel wird für die nächste Ziehung zurückgelegt

Jede Kugel ziehen wir dabei *nach dem Zufallsprinzip*. Das heißt für jede Ziehung:

Unabhängig von den vorherigen Ziehungen wird jede Kugel, die sich noch in der Urne befindet, mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen.



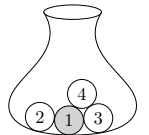
Zweistufiges Zufallsexperiment



In einer Urne sind 1 graue Kugel und 3 weiße Kugeln.

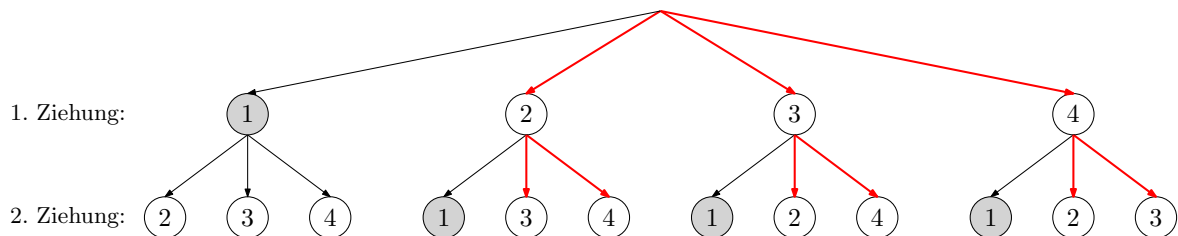
Du ziehst 2 Kugeln ohne Zurücklegen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln weiß sind?



Zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit stellen wir uns vor, dass die Kugeln durchnummeriert sind.

Wir stellen alle möglichen Abläufe dieses zweistufigen Zufallsexperiments grafisch dar:



Es gibt insgesamt $4 \cdot 3 = 12$ mögliche Abläufe, die alle gleich wahrscheinlich sind.

Markiere oben alle Abläufe, bei denen beide gezogenen Kugeln weiß sind.

Laplace-Experiment

Es gibt insgesamt $3 \cdot 2 = 6$ Abläufe, bei denen beide Kugeln weiß sind.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln weiß sind, gilt also:

$$P(\text{beide Kugeln weiß}) = \frac{\text{Anzahl günstige Abläufe}}{\text{Anzahl mögliche Abläufe}} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12} = 50\%$$

Multiplikationsregel



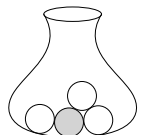
In einer Urne sind 1 graue Kugel und 3 weiße Kugeln.

Du ziehst 2 Kugeln ohne Zurücklegen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln weiß sind?

Alle möglichen Abläufe sind rechts unten in einem **Baumdiagramm** dargestellt.

Trage die Wahrscheinlichkeiten in die Kästchen ein.

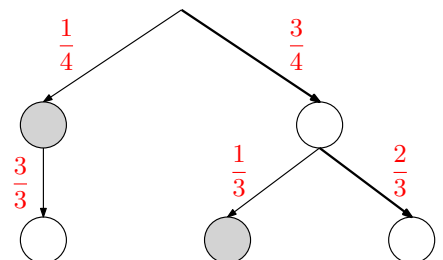


Multiplikationsregel:

Die Wahrscheinlichkeit jedes Pfads ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfads.

Nach der Multiplikationsregel gilt also:

$$P(\text{beide Kugeln weiß}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 50\%$$

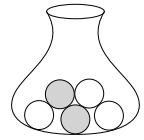


Additionsregel



In einer Urne sind 2 graue Kugeln und 3 weiße Kugeln.
Du ziehst 2 Kugeln ohne Zurücklegen.

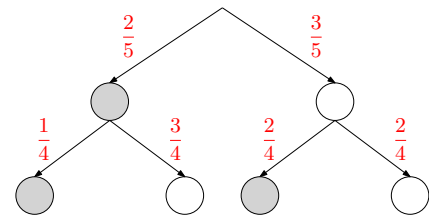
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese beiden Kugeln verschiedene Farben haben?
Alle möglichen Abläufe sind rechts unten in einem Baumdiagramm dargestellt.



- 1) Trage die Wahrscheinlichkeiten in die Kästchen ein.
- 2) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der 4 Pfade mit der Multiplikationsregel. Trage sie als Brüche in die Tabelle ein.

Pfad				
Wahrsch.	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$

$\Sigma = 1$



Die 4 Pfade sind die möglichen **Ergebnisse** dieses 2-stufigen Zufallsexperiments.
Die Wahrscheinlichkeiten von **Ereignissen** berechnen wir mit der **Additionsregel**.

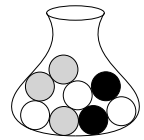
- 3) Für die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Kugeln verschiedene Farben haben, gilt also:

$$P(\text{beide Kugeln haben verschiedene Farben}) = P(\text{grey-white}) + P(\text{white-grey}) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = 60\%$$

Mehrstufiges Zufallsexperiment



In einer Urne sind 3 graue Kugeln, 3 weiße Kugeln und 2 schwarze Kugeln.
Du ziehst 4 Kugeln ohne Zurücklegen.



- 1) Berechne die Wahrscheinlichkeit von folgendem Ablauf:

$$\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{140} = 0,714... \%$$

- 2) Berechne die Wahrscheinlichkeit von folgendem Ablauf:

Was fällt dir auf?

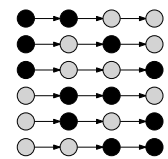
$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{140} = 0,714... \%$$

- 3) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 4 Kugeln genau 2 schwarz und 2 grau sind.
Jeder Pfad mit 2 schwarzen und 2 grauen Kugeln hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{140} = 0,714... \%$.

Die Anzahl solcher Pfade lässt sich hier noch händisch durchzählen. Bei mehr Kugeln hilft die **Kombinatorik** beim Abzählen.

$$\text{Anzahl Pfade: } \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

$$\frac{1}{140} + \frac{1}{140} + \frac{1}{140} + \frac{1}{140} + \frac{1}{140} + \frac{1}{140} = 6 \cdot \frac{1}{140} = 4,28... \%$$



Geburtstagsparadoxon



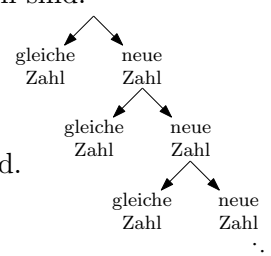
Ein Zufallsgenerator erzeugt 5 natürliche Zahlen von 1 bis 100 nach dem Zufallsprinzip.

- 1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass alle 5 Zahlen voneinander verschieden sind.

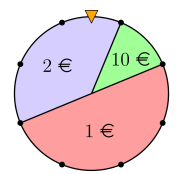
$$P(\text{alle verschieden}) = \frac{100}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{100} \cdot \frac{96}{100} = 90,34... \%$$

- 2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 der 5 Zahlen gleich sind.

$$P(\text{mindestens 2 gleich}) = 100\% - P(\text{alle verschieden}) = 9,65... \%$$



In einem Casino gibt es beim dargestellten Glücksrad 3 mögliche Ergebnisse.
 Abhängig vom Ergebnis zahlt das Casino den jeweils angegebenen Betrag aus.
 Du drehst das Glücksrad 3 Mal.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du dabei mindestens einmal 10 € gewinnst?

- 1) Pascal meint: „Bei jeder Drehung gewinnt man die 10 € mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$.
 Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.“

Begründe, warum diese Berechnung *nicht* stimmen kann.

Mit der gleichen Begründung müsste man bei 8 Drehungen *sicher* einmal 10 € gewinnen, denn:

$$8 \cdot \frac{1}{8} = 1 = 100\%$$

Das stimmt aber *nicht*. Es kann passieren, dass man bei 8 Drehungen nie 10 € gewinnt.

- 2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du bei 3 Drehungen mindestens einmal 10 € gewinnst.

$$P(\text{mindestens einmal } 10 \text{ €}) = 1 - P(\text{nie } 10 \text{ €}) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3 = 33,0\dots\%$$

Diesmal drehst du das Glücksrad n Mal.

Mit p_n wird die Wahrscheinlichkeit abgekürzt, dass du dabei mindestens einmal 10 € gewinnst.

- 3) Stelle mithilfe von n eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit p_n auf.

$$p_n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

- 4) Ermittle den Grenzwert von (p_n) für $n \rightarrow \infty$.

$$p_n = 1 - \underbrace{\left(\frac{7}{8}\right)^n}_{\rightarrow 0} \rightarrow 1 = 100\% \quad (0 < \frac{7}{8} < 1)$$

- 5) Wie oft musst du das Glücksrad drehen, damit die Wahrscheinlichkeit p_n größer als 99 % ist?

$$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n > 0,99 \quad | + \left(\frac{7}{8}\right)^n \quad | -0,99$$

$$0,01 > \left(\frac{7}{8}\right)^n \quad | \lg(\cdot) \quad \text{Da } \lg \text{ streng monoton wachsend ist, dreht sich } > \text{ nicht um.}$$

$$\lg(0,01) > n \cdot \lg\left(\frac{7}{8}\right) \quad | : \lg\left(\frac{7}{8}\right)$$

$$\frac{\lg(0,01)}{\lg\left(\frac{7}{8}\right)} < n \quad \text{Aus } > \text{ wird } < \text{ wegen der Division durch die negative Zahl } \lg\left(\frac{7}{8}\right).$$

$$n > 34,4\dots \implies \text{Ab 35 Drehungen ist die Wahrscheinlichkeit größer als 99\%.}$$

Leon rechnet im rechts dargestellten Baumdiagramm

$$P(A) = 70\% \cdot 6\% = \del{420\%} \quad \frac{70}{100} \cdot \frac{6}{100} = \frac{42}{1000} = 0,042 = 4,2\%$$

und wundert sich über das Ergebnis. Korrigiere Leons Rechnung.

