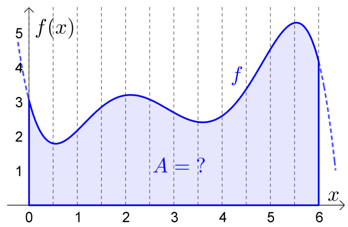
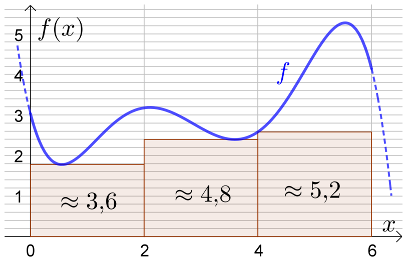
Untersummen und Obersummen

Rechts ist die Fläche markiert, die zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f im Intervall $[0; 6]$ liegt.

Wir wollen den Inhalt A dieser Fläche *näherungsweise* ermitteln. Dazu zerschneiden wir die Fläche in n gleich breite vertikale Streifen.



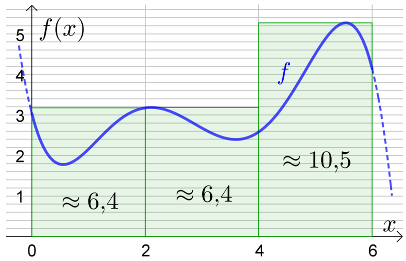
Zeichne die $n = 3$ Rechtecke ein, die wir zur Ermittlung der Untersumme U_3 verwenden:



Ermittle die Untersumme U_3 näherungsweise:

$U_3 \approx 13{,}6$

Zeichne die $n = 3$ Rechtecke ein, die wir zur Ermittlung der Obersumme O_3 verwenden:

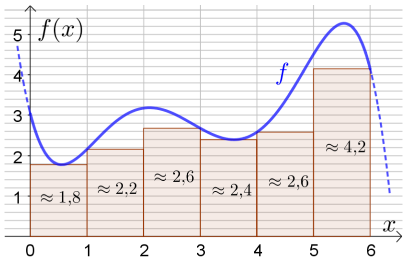


Ermittle die Obersumme O_3 näherungsweise:

$O_3 \approx 23{,}3$ $\qquad U_3 \leq A \leq O_3$

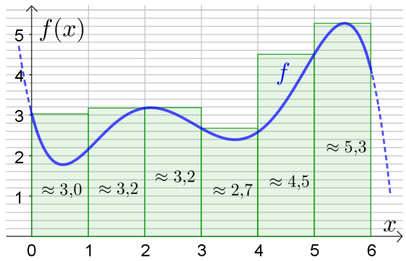
Jetzt verfeinern wir die Zerlegung, indem wir jedes Intervall in der Mitte teilen.

Ermittle die Untersumme U_6 näherungsweise:



$U_6 \approx 15{,}8$

Ermittle die Obersumme O_6 näherungsweise:



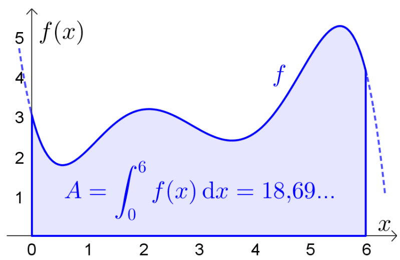
$O_6 \approx 21{,}9$ $\qquad U_3 \leq U_6 \leq A \leq O_6 \leq O_3$

Bestimmtes Integral als Grenzwert von Untersummen und Obersummen

Der Graph einer stetigen Funktion f mit $f(x) \geq 0$ ist im Intervall $[0; 6]$ dargestellt.

Wir zerlegen das Intervall $[0; 6]$ in n gleich breite Teile.

U_n ist die zugehörige Untersumme.
O_n ist die zugehörige Obersumme.



Der markierte Flächeninhalt A ist sowohl der Grenzwert der Untersummen als auch der Grenzwert der Obersummen:

$$\boldsymbol{A = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n}$$

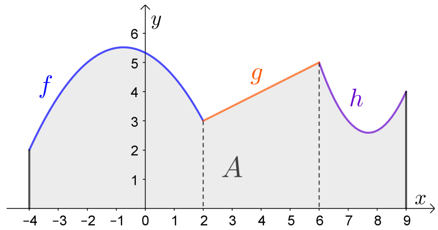
Wir nennen A das **bestimmte Integral** von f in $[0; 6]$ und schreiben: $\boldsymbol{A = \int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x}$

Wenn f eine Funktion in mehreren Variablen ist – zum Beispiel $f(x; y; z) = x^2 \cdot y \cdot e^z$ – dann kann man auch die zugehörigen Funktionen $x \mapsto x^2 \cdot y \cdot e^z$ und $y \mapsto x^2 \cdot y \cdot e^z$ und $z \mapsto x^2 \cdot y \cdot e^z$ in einer Variablen untersuchen. Mit dem Ausdruck dx, dy bzw. dz geben wir dann an, von welcher dieser drei Funktionen wir ein bestimmtes Integral berechnen: $\int_0^6 x^2 \cdot y \cdot e^z \,\mathrm{d}\square$

Bestimmtes Integral

Stelle mithilfe der Funktionen f, g und h eine Formel zur Berechnung des grau markierten Flächeninhalts A auf:

$$A = \int_{-4}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{6}^{9} h(x)\,\mathrm{d}x$$

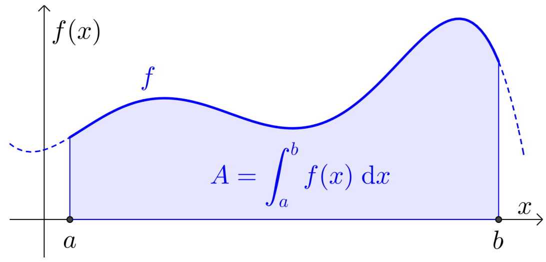


Bestimmtes Integral als Grenzwert von Zwischensummen

Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

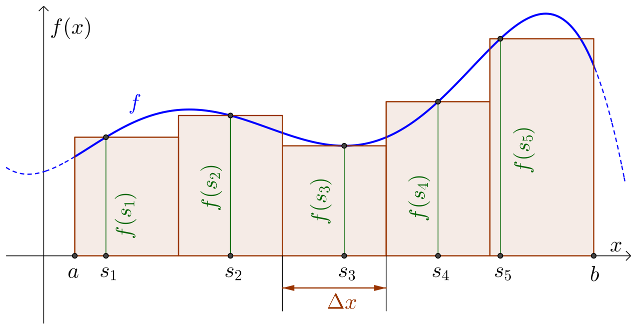
kann als Grenzwert von Untersummen und als Grenzwert von Obersummen berechnet werden.



Das bestimmte Integral kann auch als Grenzwert sogenannter **Zwischensummen** berechnet werden:

1) Für eine Zwischensumme teilen wir das Intervall $[a; b]$ zum Beispiel in $n = 5$ Teile mit gleicher Breite Δx.

2) In jedem Intervall wählen wir eine *beliebige* Stützstelle s_i aus und bilden das Rechteck mit der Höhe $f(s_i)$.



3) Dann berechnen wir die Summe Z der Inhalte dieser Rechtecksflächen:

$$Z = f(s_1)\cdot\Delta x + f(s_2)\cdot\Delta x + f(s_3)\cdot\Delta x + f(s_4)\cdot\Delta x + f(s_5)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{5} f(s_i)\cdot\Delta x$$

Für jede Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ und jede Wahl der Stützstellen gilt:

Untersumme $\leq$ Zwischensumme $\leq$ Obersumme

4) Um die Annäherung genauer zu machen, teilen wir das Intervall in immer mehr gleich breite Teile. Die Stützstellen wählen wir bei jeder Zerlegung neu. $n \to \infty$

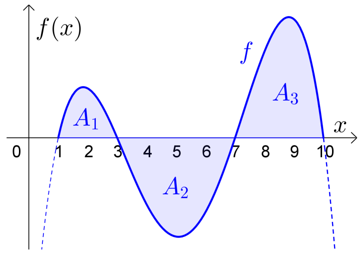
Wenn f eine stetige Funktion ist, dann ist der Grenzwert dieser Zwischensummen der *orientierte* Flächeninhalt A zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall $[a; b]$, also:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Die Schreibweise $\int$ – als langgezogenes „S“ wie *S*umme – geht auf Gottfried Wilhelm Leibniz zurück. (17./18. Jahrhundert)

Der Ausdruck dx erinnert an das Δx aus der Summe $\sum\limits_{i=1}^{n} f(s_i)\cdot\Delta x$.

Warum *orientierter* Flächeninhalt?

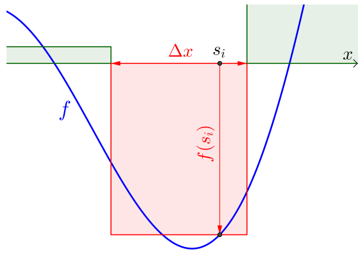


Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist der *orientierte* Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall $[a;b]$.

Wenn f *negative* Funktionswerte annimmt, müssen wir aufpassen.

Für die rechts dargestellte Funktion f gilt zum Beispiel:

$$\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \neq A_1 + A_2 + A_3$$



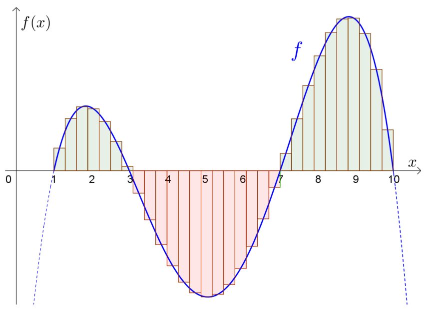
Wenn der Funktionswert an der Stelle s_i negativ ist, dann gilt:

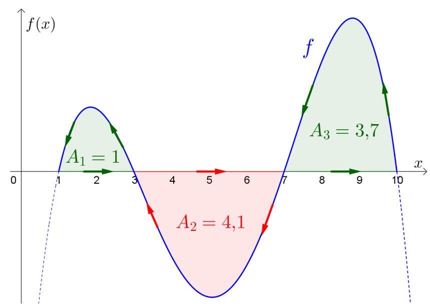
$$f(s_i) \cdot \Delta x < 0$$

Beim bestimmten Integral werden also Flächeninhalte unterhalb der x-Achse mit negativem Vorzeichen berechnet.

Für die positiven Flächeninhalte gilt: $A_1 = 1,\ A_2 = 4{,}1,\ A_3 = 3{,}7$

Berechne das bestimmte Integral: $\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 4{,}1 + 3{,}7 = 0{,}6$





Die Pfeile links deuten an, warum wir von einem *orientierten* Flächeninhalt sprechen.

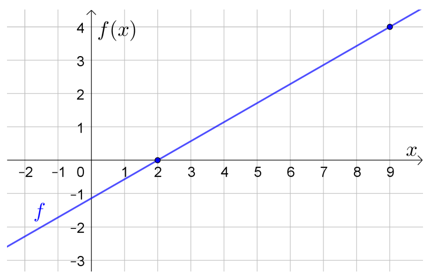
Flächen oberhalb der x-Achse sind in mathematisch positiver Orientierung – also gegen den Uhrzeigersinn – umrandet.

Flächen unterhalb der x-Achse sind in mathematisch negativer Orientierung – also im Uhrzeigersinn – umrandet.

Dann können wir die gesamte Fläche entlang der Pfeile umrunden.

Bestimmtes Integral einer linearen Funktion

Rechts ist der Graph einer linearen Funktion f mit der Nullstelle $x = 2$ dargestellt.



1) Ermittle $\int_2^9 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Berechne den Schnittpunkt von f mit der senkrechten Achse.

3) Ermittle $\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1) $\int_2^9 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$

2) Lösungsweg 1: Funktionsgleichung von f ermitteln

Steigung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{7} \implies f(x) = \frac{4}{7} \cdot (x-2) = \frac{4}{7} \cdot x - \frac{8}{7} \implies$ Schnittpunkt $(0 \mid -\frac{8}{7})$

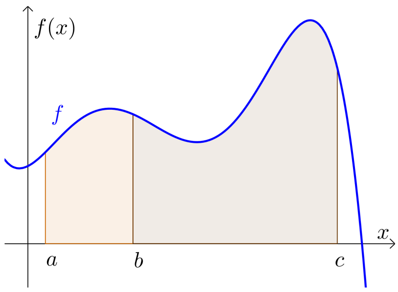
Lösungsweg 2: Ähnliche Dreiecke

$\frac{x}{4} = \frac{2}{7} \implies x = \frac{8}{7} \implies$ Schnittpunkt $(0 \mid -\frac{8}{7})$

3) $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2 \cdot \frac{8}{7}}{2} = -\frac{8}{7} \implies \int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 14 - \frac{8}{7} = \frac{90}{7} = 12{,}85\ldots$

Eigenschaften des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral hat die folgenden Eigenschaften:

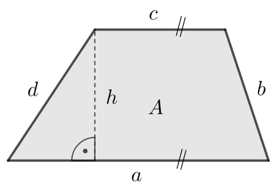


1) $\displaystyle\int_a^a \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}x = 0}$

2) $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}x} + \int_b^c \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^c \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}x}$ mit $a \leq b \leq c$

3) $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x} = \boldsymbol{c} \cdot \int_a^b \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}x}$ mit $c \in \mathbb{R}$

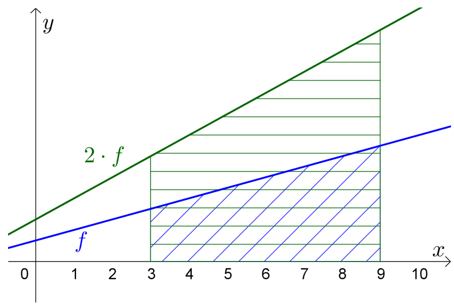
Wir erklären Eigenschaft **3)** für eine lineare Funktion f.
Erinnere dich, dass für den Flächeninhalt A vom Trapez gilt:



$$A = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$$

Erkläre damit, warum die folgende Gleichung für die rechts dargestellte lineare Funktion f gilt:

$$\int_3^9 2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_3^9 f(x)\,\mathrm{d}x$$



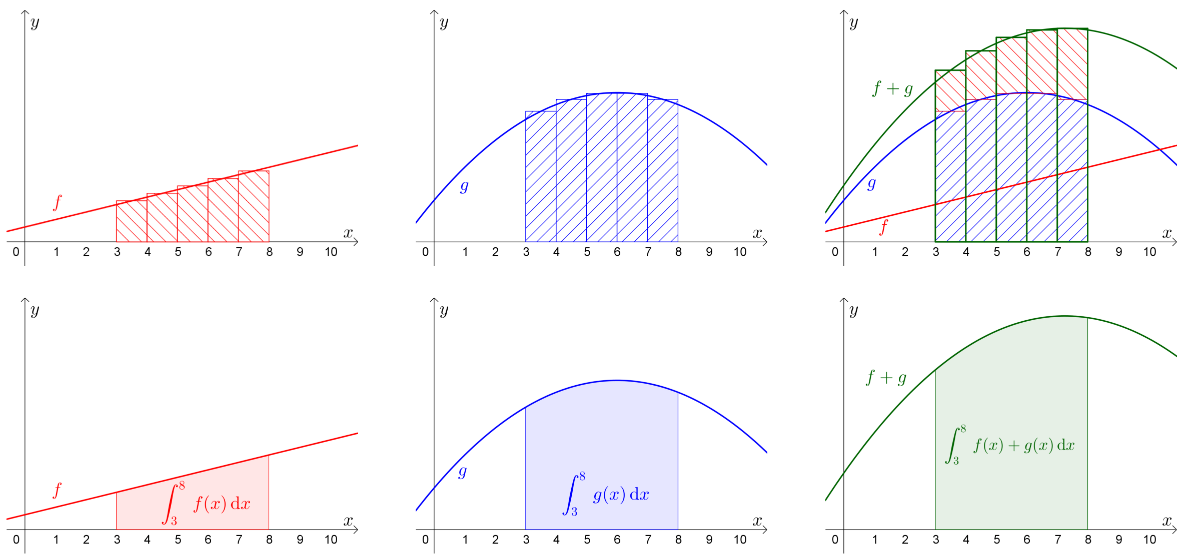
Die beiden Trapeze haben die gleiche Höhe.
Die parallelen Seiten im grünen Trapez sind jeweils doppelt so lang wie im blauen Trapez.

Wenn in der Trapezformel a und c jeweils verdoppelt wird und h gleich bleibt, dann A verdoppelt.

$$\Longrightarrow \int_3^9 2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = A_{\text{Grün}} = 2\cdot A_{\text{Blau}} = 2\cdot\int_3^9 f(x)\,\mathrm{d}x$$

4) $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)\,\mathrm{d}x} + \int_a^b \boldsymbol{g(x)\,\mathrm{d}x}$

Mache dir diese Eigenschaft des bestimmten Integrals anhand der folgenden Abbildungen plausibel:



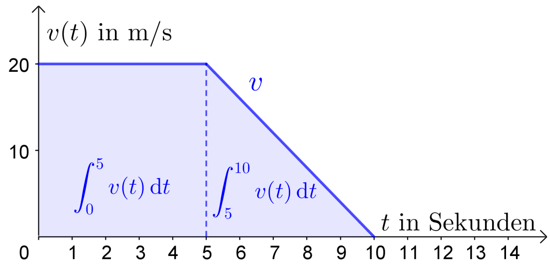
Im Allgemeinen gilt: $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ bzw. $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x \neq \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$

Geschwindigkeit-Zeit-Funktion MmF

Die Geschwindigkeit eines Autos wird 10 Sekunden lang aufgezeichnet.

Der Graph dieser Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist rechts dargestellt.

$t\ldots$ Zeit in Sekunden $(t \geq 0)$
$v(t)\ldots$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s



1) Im Zeitintervall $[0;5]$ fährt das Auto mit der konstanten Geschwindigkeit $20\,\mathrm{m/s}$.
Im Zeitintervall $[0;5]$ legt das Auto also insgesamt $100\,\mathrm{m}$ zurück.

Dieser zurückgelegte Weg ist genau der Flächeninhalt, den der Funktionsgraph von v in $[0;5]$ mit der waagrechten Achse einschließt:

$$\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = 5\,\mathrm{s}\cdot 20\,\mathrm{m/s} = 100\,\mathrm{m}$$

2) Ermittle $\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$ und interpretiere das Ergebnis.

$$\int_5^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{5\cdot 20}{2} = 50 \quad\Longrightarrow\quad \int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = 100 + 50 = 150$$

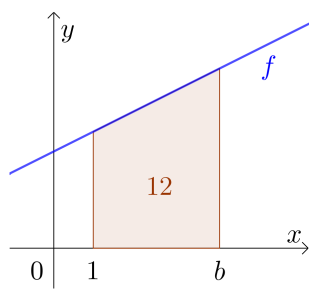
Das Auto legt im Zeitintervall $[0;10]$ insgesamt $150\,\mathrm{m}$ zurück.

Allgemein ist die Einheit des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ stets das Produkt der Einheit auf der waagrechten Achse und der Einheit auf der senkrechten Achse. Mehr dazu findest du am AB – Physikalische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung.

Umkehraufgabe MmF

Für die rechts dargestellte lineare Funktion f gilt: $f(x) = 0{,}5\cdot x + 2{,}45$

Berechne jene Zahl $b > 1$, für die $\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x = 12$ gilt.



Das bestimmte Integral ist der Flächeninhalt von einem Trapez.
Höhe: $h = b - 1$
Parallele Seiten: $a = f(1) = 2{,}95$ und $c = f(b) = 0{,}5\cdot b + 2{,}45$

$$A = \frac{(a+c)\cdot h}{2} = \frac{(5{,}4 + 0{,}5\cdot b)\cdot(b-1)}{2} = \frac{0{,}5\cdot b^2 + 4{,}9\cdot b - 5{,}4}{2}$$

$$A = 12 \iff 0{,}5\cdot b^2 + 4{,}9\cdot b - 5{,}4 = 24 \iff 0{,}5\cdot b^2 + 4{,}9\cdot b - 29{,}4 = 0$$

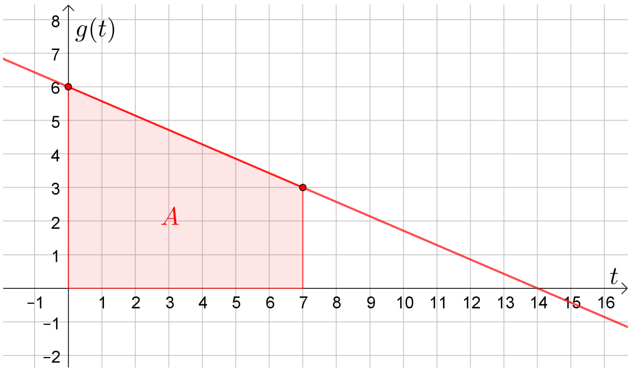
Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $b_1 = 4{,}2$ und $b_2 = -14$.
Die gesuchte Zahl ist also $b = 4{,}2$.

Integralfunktion

1) Zeichne den Graphen der Funktion g mit

$$g(t) = -\frac{3}{7} \cdot t + 6$$

im Koordinatensystem rechts ein.



2) Ermittle $A = \int_0^7 g(t)\,\mathrm{d}t$.

$$A = \frac{[g(0) + g(7)] \cdot 7}{2} = \frac{[6 + 3] \cdot 7}{2} = 31{,}5$$

Die Funktion G mit $\boldsymbol{G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$ ist eine sogenannte **Integralfunktion** von g.

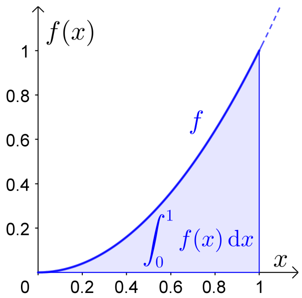
Tatsächlich ist G eine Stammfunktion von g. Mehr dazu findest du am AB – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

3) Es gilt zum Beispiel: $G(7) = 31{,}5$

4) An welcher Stelle $x > 0$ hat die Funktion G den größten Funktionswert? Wie groß ist er?

$$g(t) = 0 \implies t = 14 \implies G(14) = \int_0^{14} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{14 \cdot 6}{2} = 42$$

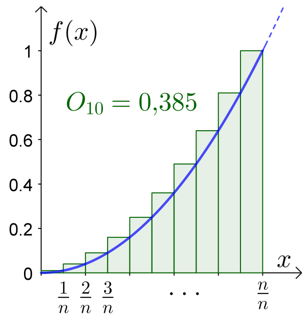
Integrieren ohne Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



Für die Funktion f mit $f(x) = x^2$ gilt:

$$0 < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < 0{,}5 \qquad \text{Warum?}$$

Wir berechnen den *exakten* Wert von $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ als Grenzwert von Obersummen:



$$O_n = \Delta x \cdot \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$$

$$O_n = \frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} \cdot \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right]$$

Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n}{6}$

$$\implies O_n = \frac{2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n}{6 \cdot n^3} \qquad \text{Überprüfe die Formel für } O_1 \text{ und } O_2.$$

$$\implies \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{6 \cdot \cancel{n^3}} = \frac{2 + 0 + 0}{6} = \frac{1}{3}$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermöglicht die Berechnung von $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ mit einem Fingerschnipsen.

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at