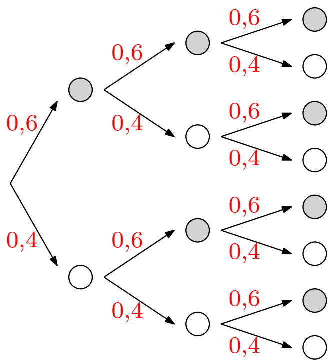
Ziehen mit Zurücklegen

In einer Urne sind 6 graue und 4 weiße Kugeln. Du ziehst 3 Kugeln mit Zurücklegen.

a) Beschrifte die Kanten des Baumdiagramms mit den Wahrscheinlichkeiten.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für jeden möglichen Ablauf. Multiplikationsregel



$\Longrightarrow P(●\to●\to●) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 21{,}6\,\%$

$\Longrightarrow P(●\to●\to○) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 14{,}4\,\%$

$\Longrightarrow P(●\to○\to●) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 14{,}4\,\%$

$\Longrightarrow P(●\to○\to○) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 9{,}6\,\%$

$\Longrightarrow P(○\to●\to●) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 14{,}4\,\%$

$\Longrightarrow P(○\to●\to○) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 9{,}6\,\%$

$\Longrightarrow P(○\to○\to●) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 9{,}6\,\%$

$\Longrightarrow P(○\to○\to○) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 6{,}4\,\%$

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 3 Kugeln genau 2 grau sind. Additionsregel

$$P(●\to●\to○) + P(●\to○\to●) + P(○\to●\to●) = 3 \cdot 14{,}4\,\% = 43{,}2\,\%$$

Fairer Würfel

Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel insgesamt 10 Mal.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dabei ...

... nur Sechser zu würfeln?

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 0{,}000\,000\,016\,5... = 1{,}65... \cdot 10^{-6}\,\% \qquad = 1 \text{ zu } 60\,466\,176$$

... zuerst einen Sechser und danach 9 Mal keinen Sechser zu würfeln?

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9} = 3{,}23...\%$$

... beim letzten Wurf den ersten Sechser zu würfeln?

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{9} \cdot \frac{1}{6} = 3{,}23...\%$$

... genau einen Sechser zu würfeln?

Hinweis: Jeder Pfad mit Länge 10 und genau einem Sechser hat die gleiche Wahrscheinlichkeit.

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9} \cdot 10 = 32{,}30...\%$$

... nur beim 3. Wurf und beim 8. Wurf einen Sechser zu würfeln?

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{8} = 0{,}64...\%$$

... genau zwei Sechser zu würfeln?

Hinweis: Jeder Pfad mit Länge 10 und genau 2 Sechsern hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Wie viele solcher Pfade gibt es?
Mehr zu solchen Abzählproblemen findest du am Arbeitsblatt – Kombinatorik und am Arbeitsblatt – Binomialkoeffizienten.

$$\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{8}}_{P(⚅⚅☒☒\cdots☒)} \cdot \underbrace{\binom{10}{2}}_{\text{Anzahl Pfade}} = 29{,}07...\%$$

10 Würfe, k Sechser MmF

Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel insgesamt 10 Mal.
Bei jedem Wurf unterscheidest du nur zwischen ⚅ und ⊠.
Das Ergebnis des Zufallsexperiments ist eine Folge mit Länge 10.
Zum Beispiel: (⚅, ⊠, ⊠, ⊠, ⚅, ⊠, ⊠, ⊠, ⊠, ⚅)

1) Stelle mithilfe von k eine Formel für die Wahrscheinlichkeit der Folge $(\underbrace{⚅, \ldots, ⚅}_{k \text{ Mal}}, \underbrace{⊠, \ldots, ⊠}_{10-k \text{ Mal}})$ auf.

$$\left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

2) Stelle mithilfe von k eine Formel für die Anzahl der Folgen mit Länge 10 und genau k Sechsern auf.

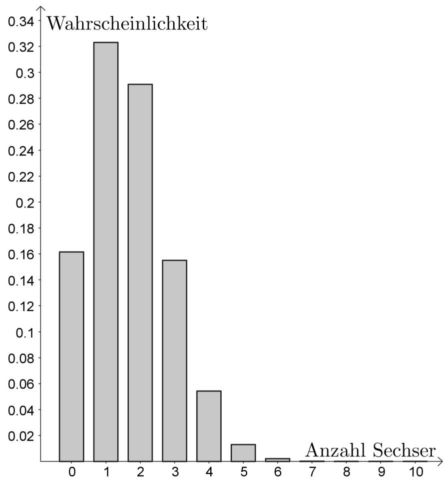
$$\frac{10!}{k! \cdot (10-k)!} = \binom{10}{k}$$

3) Die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau k Sechser unter den 10 Würfen befinden, ist p_k.
Stelle mithilfe von k eine Formel für die Wahrscheinlichkeit p_k auf.

$$p_k = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

Berechne p_3 und p_4, und trage die Wahrscheinlichkeiten in die Tabelle unten links ein.
Die Wahrscheinlichkeiten p_k sind im Säulendiagramm unten rechts dargestellt.

Anzahl Sechser k	Wahrscheinlichkeit p_k
0	16,14...%
1	32,30...%
2	29,07...%
3	15,50...%
4	5,42...%
5	1,30...%
6	0,21...%
7	0,024...%
8	$1{,}86\ldots \cdot 10^{-3}$ %
9	$8{,}27\ldots \cdot 10^{-5}$ %
10	$1{,}65\ldots \cdot 10^{-6}$ %



4) Die Zufallsvariable X ordnet jeder Folge mit Länge 10 die Anzahl der Sechser zu.
Statt $p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10}$ können wir dann kurz $P(X \geq 6)$ schreiben.
Berechne mithilfe obiger Tabelle die folgenden Wahrscheinlichkeiten. Runde ganzzahlig.

$P(X \leq 1) \approx 48\,\%$ $P(X < 3) \approx 78\,\%$ $P(X \geq 3) \approx 22\,\%$

n Würfe, k Sechser MmF

Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel insgesamt n Mal.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Sechser bei diesen n Würfen an.
Stelle mithilfe von n und k eine Formel für die Wahrscheinlichkeit auf,
dass sich genau k Sechser unter diesen n Würfen befinden.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

Binomialverteilung

Wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind, dann ist die Zufallsvariable $\boldsymbol{X}$ **binomialverteilt mit den Parametern $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{p}$**:

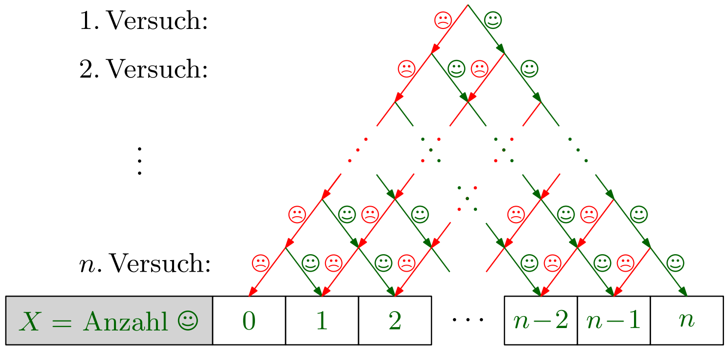
1) Wir führen ein Zufallsexperiment mit 2 möglichen Ergebnissen {☺, ☹} insgesamt n Mal durch.

2) Bei jedem der n Versuche gilt für die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\{☺\}) = p \quad \text{bzw.} \quad P(\{☹\}) = 1 - p$$

unabhängig von den Ergebnissen der bisherigen Versuche.

3) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Erfolge (☺) unter den n Versuchen an:



Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den n Versuchen genau k Erfolge (☺) befinden:

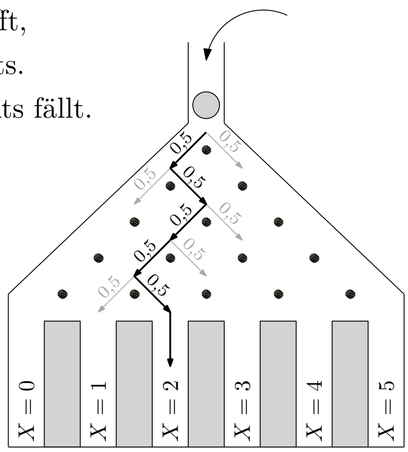
$$\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \underbrace{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}}$$

Wahrscheinlichkeit von jedem Pfad mit genau k Erfolgen (☺) (Multiplikationsregel)

Anzahl Pfade mit genau k Erfolgen (☺) (Kombinatorik und Additionsregel)

Galtonbrett

Jedes Mal, wenn die oben eingeworfene Kugel auf einen Nagel ● trifft, fällt sie nach dem Zufallsprinzip entweder nach links oder nach rechts. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Kugel insgesamt nach rechts fällt. Ein möglicher Weg mit $X = 2$ ist rechts eingezeichnet.



Die Zufallsvariable X ist also binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p = 0{,}5$.

Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten in %.

$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^5 = 3{,}125\,\%$

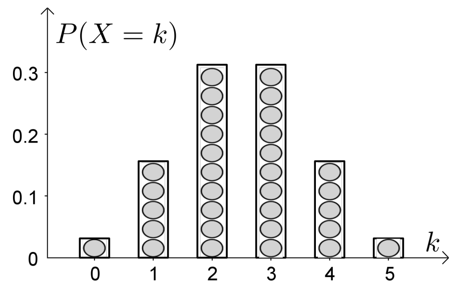
$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^4 = 15{,}625\,\%$

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^3 = 31{,}25\,\%$

$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2 = 31{,}25\,\%$

$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^1 = 15{,}625\,\%$

$P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^0 = 3{,}125\,\%$



Wenn $p = 0{,}5$ gilt, dann ist das Säulendiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten symmetrisch zur Mitte.

Binomialverteilte Zufallsvariable?

Ist die angegebene Zufallsvariable X binomialverteilt?
Falls ja, gib die Parameter n und p an. Falls nein, begründe warum X *nicht* binomialverteilt ist.

a) Eine Urne enthält 4 rote und 3 blaue Kugeln. Du ziehst 5 Kugeln mit Zurücklegen.
X ... Anzahl blauer Kugeln unter den 5 Ziehungen

Ja: $n = 5$, $p = \frac{3}{7}$

b) Du wirfst gleichzeitig 8 faire 6-seitige Würfel mit den Augenzahlen von ⚀ bis ⚅.
X ... Anzahl Würfel mit Ergebnis ⚀ oder ⚁

Ja: $n = 8$, $p = \frac{2}{6}$

c) Eine Urne enthält 7 rote und 5 blaue Kugeln.
Du ziehst nach dem Zufallsprinzip gleichzeitig 3 Kugeln aus der Urne.
X ... Anzahl blauer Kugeln unter den 3 Kugeln

Nein, weil sich – wie beim Ziehen ohne Zurücklegen – die WS mit jeder gezogenen Kugel ändern.

Mögliche formale Begründung: Wenn X binomialverteilt wäre, dann müsste $n = 3$ sein.

Aber: $P(X = 3) = p^3 = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \iff p = 0{,}356...$ bzw. $P(X = 0) = (1-p)^3 = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \iff p = 0{,}458...$

Es kann also keinen passenden Wert für den Parameter p geben. ↯

d) Ein Single-Choice-Test enthält 30 Fragen mit jeweils 5 möglichen Antworten. Bei jeder Frage ist genau eine Antwort richtig. Du kreuzt bei jeder Frage eine Antwort nach dem Zufallsprinzip an.
X ... Anzahl richtig beantworteter Fragen

Ja: $n = 30$, $p = \frac{1}{5}$

e) Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel mit den Augenzahlen von ⚀ bis ⚅ so lange, bis zum ersten Mal ein Sechser kommt.
X ... Anzahl Würfe bis zum ersten Sechser

Nein, weil die Anzahl der Würfe nicht auf eine bestimmte Zahl n festgelegt werden kann.

f) Eine gezinkte Münze mit den 2 Seiten „Kopf“ und „Zahl“ zeigt mit 70 %-iger Wahrscheinlichkeit das Ergebnis „Kopf“. Du wirfst die Münze insgesamt 18 Mal.
X ... Anzahl Würfe mit Ergebnis „Zahl“

Ja: $n = 18$, $p = 30\,\%$

g) Beim Roulette gibt es 37 Felder, die mit den Zahlen von 0 bis 36 durchnummeriert sind.
Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld ist grün.
Bei jeder Drehung wird mit einer Kugel ein Feld nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.
Du beobachtest insgesamt 30 Drehungen.
X ... Anzahl Drehungen, bei denen ein rotes Feld ausgewählt wird

Ja: $n = 30$, $p = \frac{18}{37}$

h) ☆ Eine Urne enthält 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 durchnummeriert sind.
Bei einer Lotto-Ziehung werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Lukas beobachtet über ein Jahr hinweg alle 104 Lotto-Ziehungen.
X ... Anzahl Lotto-Ziehungen, bei denen die Kugel mit der Zahl 42 gezogen wird

Ja: $n = 104$, $p = \frac{\binom{44}{5}}{\binom{45}{6}} = \frac{6}{45}$

i) ☆ Du wirfst nacheinander 4 faire 6-seitige Würfel mit den Augenzahlen von ⚀ bis ⚅.
X ... Anzahl *verschiedener* Augenzahlen unter den 4 Würfeln

Nein, die Wahrscheinlichkeit für eine neue Augenzahl hängt von den bisherigen Würfen ab.

Mögliche formale Begründung: Es ist $P(X = 0) = 0$. Wenn X binomialverteilt wäre, ist $P(X = 0) = (1-p)^n$.

Also müsste $p = 1$ sein. Das kann aber nicht sein, weil nicht bei jedem Wurf eine neue Augenzahl kommen *muss*. ↯

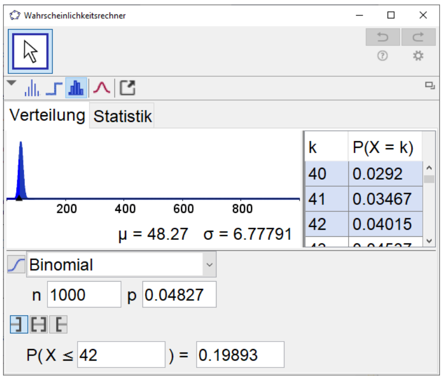
Blackjack

Das Kartenspiel *Single-Deck Blackjack* wird mit 52 Karten gespielt.
Davon haben genau 4 Karten den Wert 11. Genau 16 Karten haben den Wert 10.
Jede Runde erhält jede Person nach dem Zufallsprinzip 2 Karten. Hat eine Karte den Wert 11 und die andere Karte den Wert 10 (in beliebiger Reihenfolge), spricht man von einem *Blackjack*.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit p, dass du bei einer einzelnen Runde einen Blackjack hast.

$$p = \frac{16}{52} \cdot \frac{4}{51} + \frac{4}{52} \cdot \frac{16}{51} = 0{,}0482\ldots$$

2) Du spielst 1000 Runden Single-Deck Blackjack. Nach jeder Runde werden die Karten neu gemischt.
X gibt die Anzahl der Runden an, bei denen du einen Blackjack hast.
Berechne mit Technologieeinsatz die Wahrscheinlichkeit, dass du dabei …



… höchstens 42 Mal einen Blackjack hast.

$P(X \leq 42) = 19{,}89\ldots\,\%$

… weniger als 35 Mal einen Blackjack hast.

$P(X < 35) = P(X \leq 34) = 1{,}73\ldots\,\%$

… mindestens 50 Mal einen Blackjack hast.

$P(X \geq 50) = 41{,}96\ldots\,\%$

… mehr als 50 Mal einen Blackjack hast.

$P(X > 50) = P(X \geq 51) = 36{,}36\ldots\,\%$

… mindestens 38 Mal, aber weniger als 50 Mal einen Blackjack hast.

$P(38 \leq X < 50) = P(38 \leq X \leq 49) = 52{,}86\ldots\,\%$

… genau 42 Mal einen Blackjack hast.

$P(X = 42) = P(42 \leq X \leq 42) = 4{,}01\ldots\,\%$

3) Beschreibe jeweils ein mögliches Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit berechnet wird:

$$P(A) = \binom{80}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{78}$$

Ereignis A: Bei 80 Runden genau 2 Mal einen Blackjack haben.

$$P(B) = (1-p)^{130}$$

Ereignis B: Bei 130 Runden keinen einzigen Blackjack haben.

$$P(C) = \sum_{i=3}^{8} \binom{250}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{250-i}$$

$$\sum_{i=3}^{8} f(i) = f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8)$$

Ereignis C: Bei 250 Runden mindestens 3, aber höchstens 8 Blackjacks haben.

$$P(D) = 1 - (1-p)^{70}$$

Ereignis D: Bei 70 Runden mindestens einen Blackjack haben.

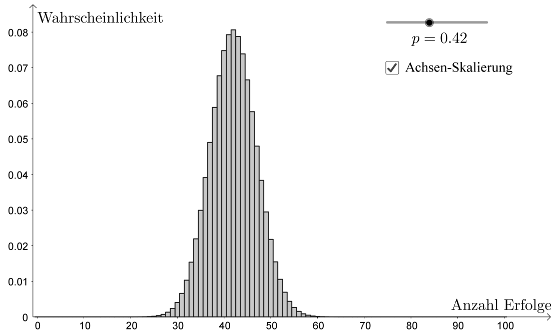
Binomialverteilung

X ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 100$ und p.

a) Wie sieht das Säulendiagramm aus, wenn $p = 0$ gilt?
Es gibt nur eine Säule:
0 Erfolge mit $P(X = 0) = 100\,\%$

b) Wie sieht das Säulendiagramm aus, wenn $p = 1$ gilt?
Es gibt nur eine Säule:
100 Erfolge mit $P(X = 100) = 100\,\%$

c) Wie viele Erfolge erwartest du, wenn $p = 0{,}42$ gilt?
Die WS für einen Erfolg ist jedes Mal $p = 42\,\%$.
Es sind $100 \cdot 42\,\% = 42$ Erfolge zu erwarten.



42 Erfolge sind auch das wahrscheinlichste Ergebnis bei $p = 0{,}42$. Die WS für *genau* 42 Erfolge beträgt aber trotzdem nur rund $8\,\%$.

Kenngrößen der Binomialverteilung

X ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p.

1) Dann gilt für den **Erwartungswert** von X:

$$\boldsymbol{\mu = E(X) = n \cdot p}$$

Dieses intuitive Ergebnis lässt sich direkt aus der Definition vom Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen beweisen.

2) Dann gilt für die **Varianz** von X:

$$\boldsymbol{V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Für welches p ist $V(X)$ am größten?

3) Dann gilt für die **Standardabweichung** von X:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

Für welches p ist σ am größten?

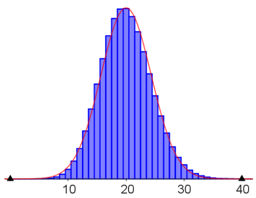
Binomialverteilung $\rightsquigarrow$ Normalverteilung

Du würfelst 360 Mal mit zwei fairen 6-seitigen Würfeln mit den Augenzahlen von ⚀ bis ⚅.
Die Zufallsvariable X gibt an, bei wie vielen Würfen das Ergebnis entweder ⚁/⚃ oder ⚃/⚁ ist.

1) Berechne den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.

$$n = 360,\ p = \frac{2}{36}$$

$$\implies \quad \mu = 360 \cdot \frac{2}{36} = 20 \qquad \sigma = \sqrt{360 \cdot \frac{2}{36} \cdot \frac{34}{36}} = 4{,}34\ldots$$



2) Trage ganze Zahlen richtig in die Kästchen ein, und berechne die Wahrscheinlichkeiten.

$$P(\mu - 1 \cdot \sigma < X < \mu + 1 \cdot \sigma) = P(16 \leq X \leq 24) = 70{,}0\ldots\,\%$$

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma < X < \mu + 2 \cdot \sigma) = P(12 \leq X \leq 28) = 95{,}0\ldots\,\%$$

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma < X < \mu + 3 \cdot \sigma) = P(7 \leq X \leq 33) = 99{,}7\ldots\,\%$$

„Sigma-Umgebungen“

Wenn bei der Binomialverteilung der Parameter n zu große Werte annimmt, scheitert auch GeoGebra (berechtigterweise) bei der exakten Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. In diesem Fall können die Wahrscheinlichkeiten aber sehr gut mithilfe einer sogenannten Normalverteilung angenähert werden. Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Normalverteilung.