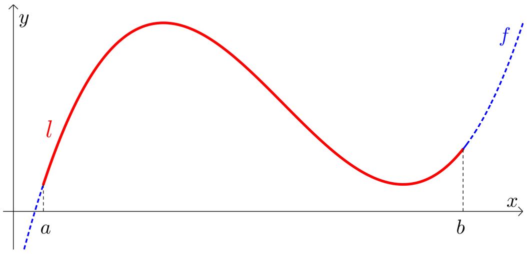
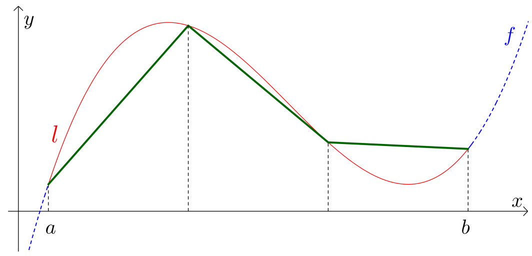
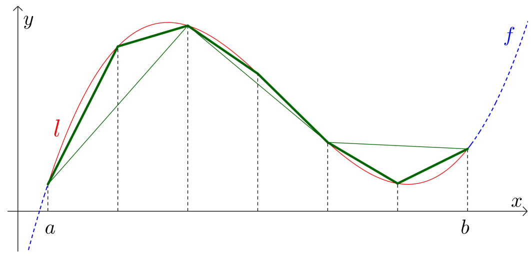
Bogenlänge näherungsweise ermitteln



Links ist ein Bogen im Intervall $[a;b]$ dargestellt.
Wir wollen seine Länge l ermitteln.
Dazu nähern wir den Bogen durch Streckenzüge an.
Links unten besteht der Streckenzug aus 3 Strecken.
Rechts unten ist er auf 6 Strecken verfeinert.





Jede noch so feine Zerlegung kann nicht länger als die Bogenlänge l sein. Warum?
Mit jeder Verfeinerung kann der Streckenzug insgesamt nur länger werden. Warum?
Der Grenzwert ist die *exakte* Bogenlänge. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist die Strecke.

Bogenlänge

Für die **Bogenlänge l** des Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $[a;b]$ gilt:

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\;\mathrm{d}x}$$

Auf der Rückseite erfährst du *warum*.

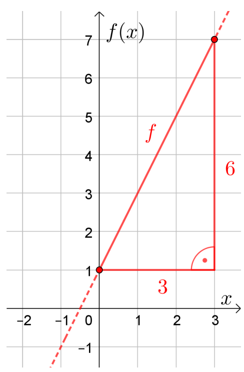
Strecke

Für die Funktion f gilt: $f(x) = 2 \cdot x + 1$

1) Zeichne rechts den Graphen von f ein.

2) Ermittle die Bogenlänge von f in $[0;3]$ ohne die Formel für die Bogenlänge.

3) Berechne die Bogenlänge von f in $[0;3]$ mit der Formel für die Bogenlänge.

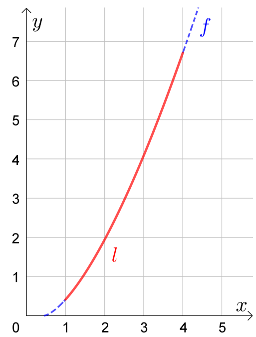


2) $l = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 6{,}70\ldots$

3) $f'(x) = 2 \implies l = \int_0^3 \sqrt{1+2^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{5}\cdot x\,\Big|_0^3 = 3\cdot\sqrt{5} = 6{,}70\ldots$

Bogenlänge

Berechne die Bogenlänge der Funktion f mit $f(x) = \left(x-\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ in $[1;4]$.



$$f'(x) = \frac{3}{2}\cdot\left(x-\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

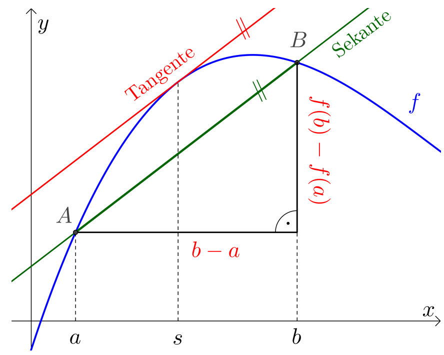
$$1+f'(x)^2 = 1+\frac{9}{4}\cdot\left(x-\frac{4}{9}\right) = \frac{9}{4}\cdot x$$

$$l = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}\cdot x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cdot\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\,\Big|_1^4 = 8-1 = 7$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Wir sehen uns die Steigung einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $[a;b]$ an.

Stelle mithilfe von f, a und b eine Formel für die Steigung der Gerade durch die Punkte $A = (a \mid f(a))$ und $B = (b \mid f(b))$ auf:



$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

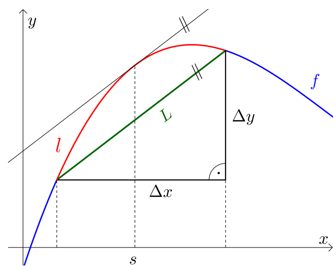
Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert (mindestens) eine Stelle s in $[a;b]$, für die gilt:

$$\boldsymbol{f'(s) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Steigung einer Tangente — Steigung der Sekante

Sehnenlänge

Rechts ist der Graph einer differenzierbaren Funktion f auf einem Intervall der Länge Δx dargestellt.



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert (mindestens) eine Stelle s im Intervall, für die gilt:

$$f'(s) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \iff \quad \Delta y = \Delta x \cdot f'(s)$$

Wir nähern den Bogen durch die eingezeichnete Sehne an.
Stelle mithilfe von Δx und $f'(s)$ eine Formel für die Sehnenlänge L auf:

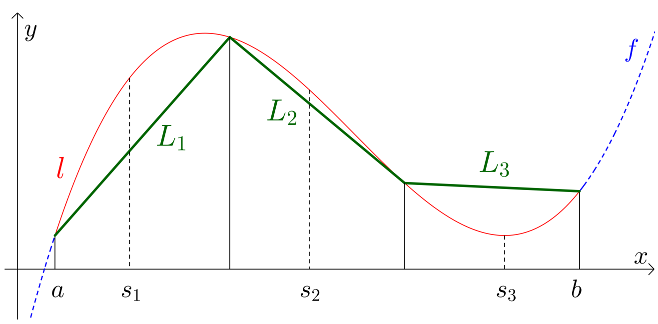
$$L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 \cdot (1 + f'(s)^2)} = \Delta x \cdot \sqrt{1 + f'(s)^2}$$

Verfeinerung und Grenzwert

Wir teilen das Intervall $[a;b]$ in n Teile mit jeweils gleicher Breite Δx.

Im Bild ist $n = 3$.

In jedem Teilintervall nähern wir den Bogen wie zuvor durch eine Sehne an.



Die Länge L_i der i-ten Sehne beträgt dann

$$L_i = \sqrt{1 + f'(s_i)^2} \cdot \Delta x$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle s_i.

Für die Gesamtlänge des Streckenzugs gilt:

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(s_i)^2} \cdot \Delta x$$

Das ist genau eine Zwischensumme beim Integrieren der Funktion $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ in $[a;b]$.

Der Grenzwert $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x}$ ist die **Bogenlänge l**.