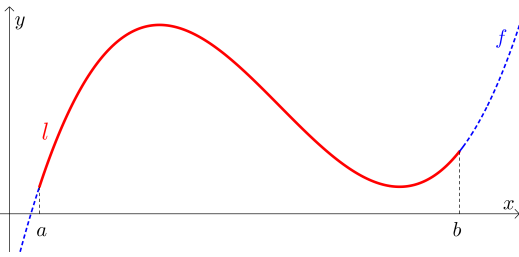
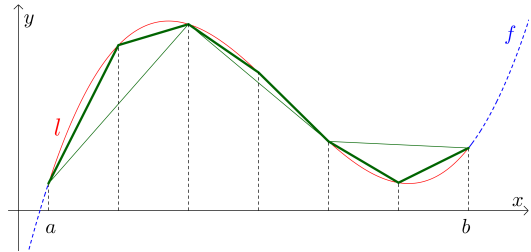
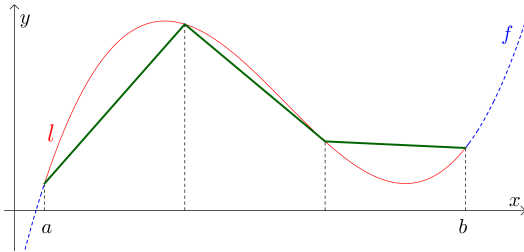


Bogenlänge näherungsweise ermitteln



Links ist ein Bogen im Intervall $[a; b]$ dargestellt.
Wir wollen seine Länge l ermitteln.
Dazu nähern wir den Bogen durch Streckenzüge an.
Links unten besteht der Streckenzug aus 3 Strecken.
Rechts unten ist er auf 6 Strecken **verfeinert**.



Jede noch so feine Zerlegung kann nicht länger als die Bogenlänge l sein.
Mit jeder Verfeinerung kann der Streckenzug insgesamt nur länger werden.
Der **Grenzwert** ist die *exakte* Bogenlänge.

Warum?
Warum?

Bogenlänge



Für die **Bogenlänge** l des Graphen einer **differenzierbaren** Funktion f im Intervall $[a; b]$ gilt:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

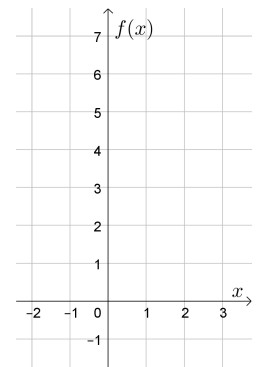
Auf der Rückseite erfährst du *warum*.

Strecke



Für die Funktion f gilt: $f(x) = 2 \cdot x + 1$

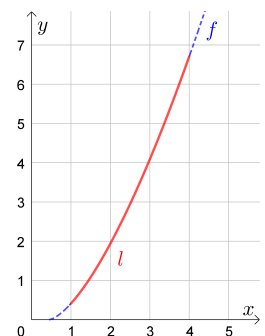
- 1) Zeichne rechts den Graphen von f ein.
- 2) Ermittle die Bogenlänge von f in $[0; 3]$ ohne die Formel für die Bogenlänge.
- 3) Berechne die Bogenlänge von f in $[0; 3]$ mit der Formel für die Bogenlänge.



Bogenlänge



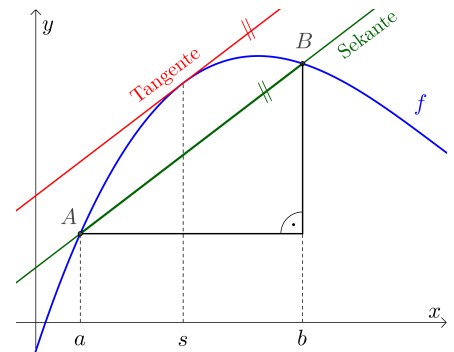
Berechne die Bogenlänge der Funktion f mit $f(x) = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ in $[1; 4]$.



Wir sehen uns die Steigung einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $[a; b]$ an.

Stelle mithilfe von f , a und b eine Formel für die Steigung der Gerade durch die Punkte $A = (a | f(a))$ und $B = (b | f(b))$ auf:

Steigung der Sekante =



Der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** garantiert (mindestens) eine Stelle s in $[a; b]$, für die gilt:

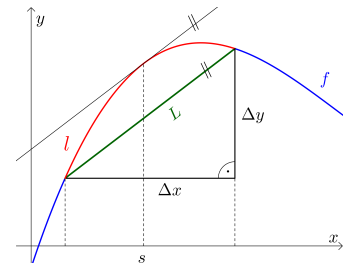
Steigung einer $f'(s) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ Steigung der

Sehnenlänge 

Rechts ist der Graph einer differenzierbaren Funktion f auf einem Intervall der Länge Δx dargestellt.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert (mindestens) eine Stelle s im Intervall, für die gilt:


$$f'(s) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \iff \Delta y = \Delta x \cdot f'(s)$$



Wir nähern den Bogen durch die eingezeichnete Sehne an.

Stelle mithilfe von Δx und $f'(s)$ eine Formel für die Sehnenlänge L auf:

$L =$

Verfeinerung und Grenzwert 

Wir teilen das Intervall $[a; b]$ in n Teile mit jeweils gleicher Breite Δx .

Im Bild ist $n = 3$.

In jedem Teilintervall nähern wir den Bogen wie zuvor durch eine Sehne an.

Die Länge L_i der i -ten Sehne beträgt dann

$$L_i = \sqrt{1 + f'(s_i)^2} \cdot \Delta x$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle s_i .

Für die Gesamtlänge des Streckenzugs gilt:

$$L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(s_i)^2} \cdot \Delta x$$

Das ist genau eine **Zwischensumme** beim Integrieren der Funktion $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ in $[a; b]$.

Der Grenzwert $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ ist die **Bogenlänge** l .

