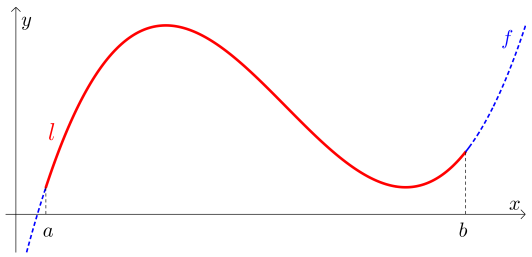
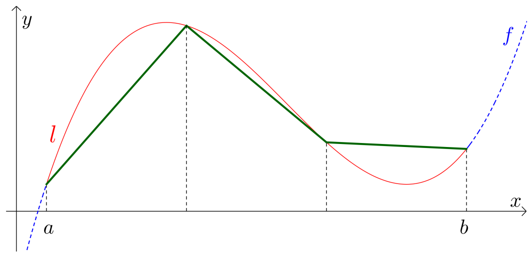
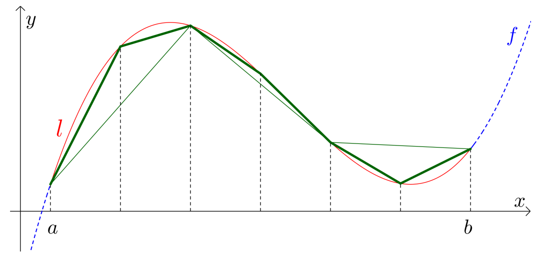
Bogenlänge näherungsweise ermitteln



Links ist ein Bogen im Intervall $[a; b]$ dargestellt.
Wir wollen seine Länge l ermitteln.
Dazu nähern wir den Bogen durch Streckenzüge an.
Links unten besteht der Streckenzug aus 3 Strecken.
Rechts unten ist er auf 6 Strecken verfeinert.





Jede noch so feine Zerlegung kann nicht länger als die Bogenlänge l sein. Warum?
Mit jeder Verfeinerung kann der Streckenzug insgesamt nur länger werden. Warum?
Der Grenzwert ist die *exakte* Bogenlänge.

Bogenlänge

Für die **Bogenlänge l** des Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $[a; b]$ gilt:

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

Auf der Rückseite erfährst du *warum*.

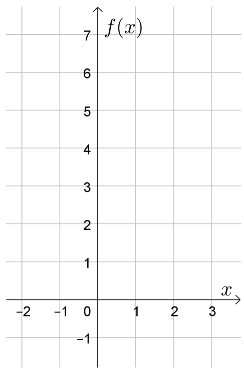
Strecke

Für die Funktion f gilt: $f(x) = 2 \cdot x + 1$

1) Zeichne rechts den Graphen von f ein.

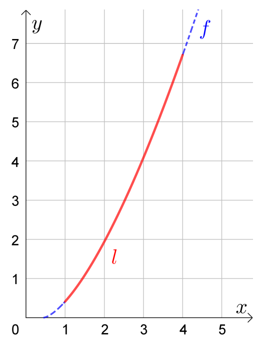
2) Ermittle die Bogenlänge von f in $[0; 3]$ ohne die Formel für die Bogenlänge.

3) Berechne die Bogenlänge von f in $[0; 3]$ mit der Formel für die Bogenlänge.



Bogenlänge

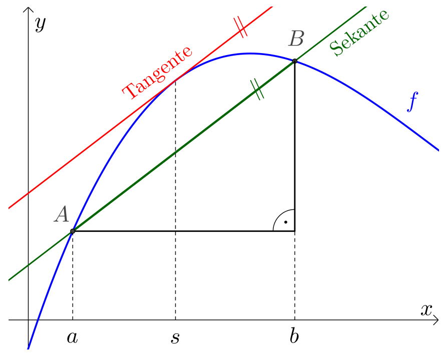
Berechne die Bogenlänge der Funktion f mit $f(x) = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ in $[1; 4]$.



Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Wir sehen uns die Steigung einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $[a;b]$ an.

Stelle mithilfe von f, a und b eine Formel für die Steigung der Gerade durch die Punkte $A=(a \mid f(a))$ und $B=(b \mid f(b))$ auf:



$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert (mindestens) eine Stelle s in $[a;b]$, für die gilt:

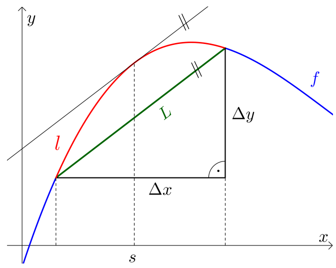
$$\boldsymbol{f'(s) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Steigung einer $\boxed{}$

Steigung der $\boxed{}$

Sehnenlänge

Rechts ist der Graph einer differenzierbaren Funktion f auf einem Intervall der Länge Δx dargestellt.



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert (mindestens) eine Stelle s im Intervall, für die gilt:

$$f'(s) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \iff \Delta y = \Delta x \cdot f'(s)$$

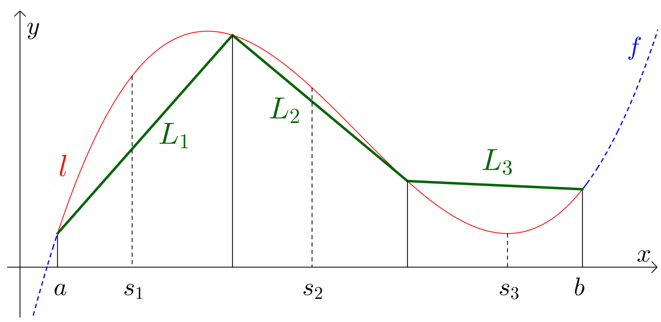
Wir nähern den Bogen durch die eingezeichnete Sehne an.
Stelle mithilfe von Δx und $f'(s)$ eine Formel für die Sehnenlänge L auf:

$$L = \boxed{}$$

Verfeinerung und Grenzwert

Wir teilen das Intervall $[a;b]$ in n Teile mit jeweils gleicher Breite Δx.

Im Bild ist $n=3$.



In jedem Teilintervall nähern wir den Bogen wie zuvor durch eine Sehne an.

Die Länge L_i der i-ten Sehne beträgt dann

$$L_i = \sqrt{1+f'(s_i)^2} \cdot \Delta x$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle s_i.

Für die Gesamtlänge des Streckenzugs gilt:

$$L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'(s_i)^2} \cdot \Delta x$$

Das ist genau eine Zwischensumme beim Integrieren der Funktion $g(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$ in $[a;b]$.

Der Grenzwert $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x}$ ist die **Bogenlänge l**.