Sinus am Einheitskreis

Die Gleichung $\sin(\alpha) = 0{,}6$ hat zwei Lösungen $\alpha \in [0°; 360°[$, weil $\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$ gilt.

Diesmal messen wir die Winkel im Bogenmaß.

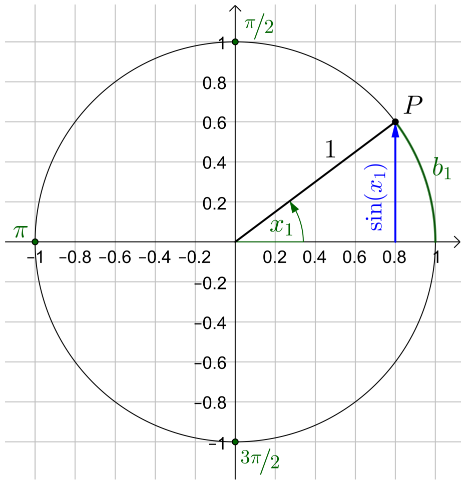
Dann hat die Gleichung $\sin(x) = 0{,}6$ dementsprechend zwei Lösungen $x \in [0\,\text{rad}; 2 \cdot \pi\,\text{rad}[$.

1) Der rechts eingezeichnete Winkel x_1 ist eine Lösung.

Es gilt: $x_1 =$ ☐ rad

Der zugehörige Winkelbogen am Einheitskreis hat also die Länge $b_1 =$ ☐

2) Zeichne den zweiten Winkel x_2 ein, der die Gleichung löst.



Wenn die Winkel im Bogenmaß gemessen sind, dann gilt:

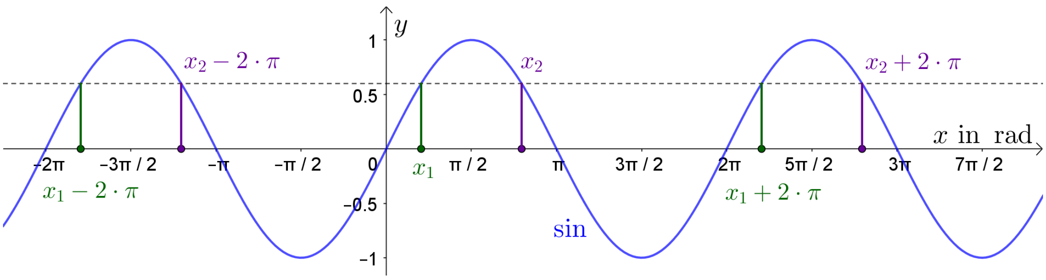
$$\boldsymbol{\sin(x) = \sin(\pi - x)}$$

3) Für die zweite Lösung x_2 gilt also: $x_2 =$ ☐ rad

Sinusfunktion

Tatsächlich hat die Gleichung $\sin(x) = 0{,}6$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen.

Der Graph der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ ist dargestellt:



Die waagrechte strichlierte Gerade hat die Gleichung $y = 0{,}6$.

Die Schnittstellen dieser Gerade mit dem Graphen sind also die Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 0{,}6$.

1) Für die eingezeichnete Lösung x_1 gilt: $x_1 =$ ☐ rad

Nach jeder *vollständigen* Umdrehung am Einheitskreis ist der Sinuswert wieder gleich groß.
Neben x_1 sind also auch folgende Winkel Lösungen:

$$x_1 + 2 \cdot \pi, \quad x_1 + 4 \cdot \pi, \quad x_1 + 6 \cdot \pi, \ldots \quad \text{sowie} \quad x_1 - 2 \cdot \pi, \quad x_1 - 4 \cdot \pi, \quad x_1 - 6 \cdot \pi, \ldots$$

Diese unendlich vielen Lösungen können wir kurz so anschreiben:

$$x_{1,k} = x_1 + k \cdot 2 \cdot \pi = \square + k \cdot 2 \cdot \pi\ \text{rad}, \quad k \in \mathbb{Z}$$ „Bergauf-Lösungen“

2) Für die eingezeichnete Lösung x_2 gilt: $x_2 =$ ☐ rad

Die zweite Hälfte der Lösungen ist also:

$$x_{2,k} = x_2 + k \cdot 2 \cdot \pi = \square + k \cdot 2 \cdot \pi\ \text{rad}, \quad k \in \mathbb{Z}$$ „Bergab-Lösungen“

Cosinus am Einheitskreis

Die Gleichung $\cos(\alpha) = 0{,}8$ hat zwei Lösungen $\alpha \in [0°; 360°[$, weil $\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)$ gilt.

Diesmal messen wir die Winkel im Bogenmaß.

Dann hat die Gleichung $\cos(x) = 0{,}8$ dementsprechend zwei Lösungen $x \in [0\,\text{rad}; 2 \cdot \pi\,\text{rad}[$.

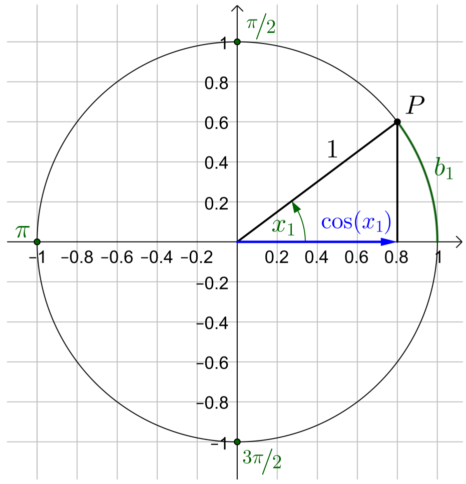
1) Der rechts eingezeichnete Winkel x_1 ist eine Lösung.

Es gilt: $x_1 = \boxed{\quad}$ rad

Der zugehörige Winkelbogen am Einheitskreis

hat also die Länge $b_1 = \boxed{\quad}$

2) Zeichne den zweiten Winkel x_2 ein, der die Gleichung löst.



Wenn die Winkel im Bogenmaß gemessen sind, dann gilt:

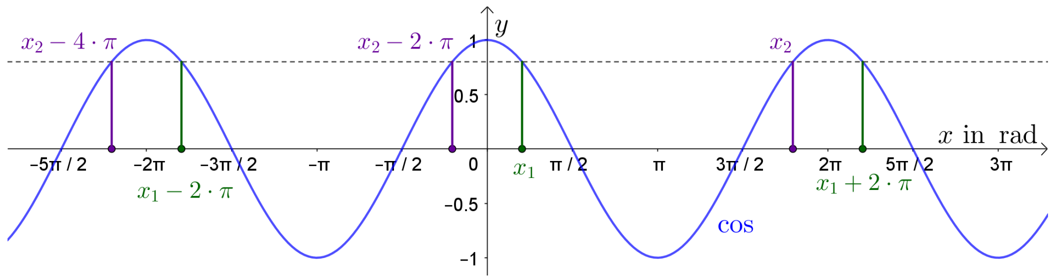
$$\boldsymbol{\cos(x) = \cos(2 \cdot \pi - x)}$$

3) Für die zweite Lösung x_2 gilt also: $x_2 = \boxed{\quad}$ rad

Cosinusfunktion

Tatsächlich hat die Gleichung $\cos(x) = 0{,}8$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen.

Der Graph der Cosinusfunktion f mit $f(x) = \cos(x)$ ist dargestellt:



Die waagrechte strichlierte Gerade hat die Gleichung $y = 0{,}8$.

Die Schnittstellen dieser Gerade mit dem Graphen sind also die Lösungen der Gleichung $\cos(x) = 0{,}8$.

1) Für die eingezeichnete Lösung x_1 gilt: $x_1 = \boxed{\quad}$ rad

Nach jeder *vollständigen* Umdrehung am Einheitskreis ist der Cosinuswert wieder gleich groß. Neben x_1 sind also auch folgende Winkel Lösungen:

$$x_1 + 2 \cdot \pi, \quad x_1 + 4 \cdot \pi, \quad x_1 + 6 \cdot \pi, \ldots \quad \text{sowie} \quad x_1 - 2 \cdot \pi, \quad x_1 - 4 \cdot \pi, \quad x_1 - 6 \cdot \pi, \ldots$$

Diese unendlich vielen Lösungen können wir kurz so anschreiben:

$$x_{1,k} = x_1 + k \cdot 2 \cdot \pi = \boxed{\quad} + k \cdot 2 \cdot \pi\ \text{rad}, \quad k \in \mathbb{Z}$$ „Bergab-Lösungen"

2) Für die eingezeichnete Lösung x_2 gilt: $x_2 = \boxed{\quad}$ rad

Die zweite Hälfte der Lösungen ist also:

$$x_{2,k} = x_2 + k \cdot 2 \cdot \pi = \boxed{\quad} + k \cdot 2 \cdot \pi\ \text{rad}, \quad k \in \mathbb{Z}$$ „Bergauf-Lösungen"

Tangens am Einheitskreis

Die Gleichung $\tan(\alpha) = 0{,}6$ hat zwei Lösungen $\alpha \in [0°; 360°[$, weil $\tan(\alpha) = \tan(180° + \alpha)$ gilt.

Diesmal messen wir die Winkel im Bogenmaß.

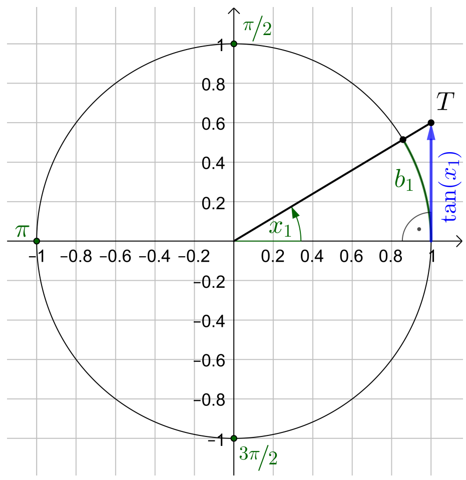
Dann hat die Gleichung $\tan(x) = 0{,}6$ dementsprechend zwei Lösungen $x \in [0\,\text{rad}; 2\cdot\pi\,\text{rad}[$.

1) Der rechts eingezeichnete Winkel x_1 ist eine Lösung.

Es gilt: $x_1 =$ ______ rad

Der zugehörige Winkelbogen am Einheitskreis hat also die Länge $b_1 =$ ______

2) Zeichne den zweiten Winkel x_2 ein, der die Gleichung löst.



Wenn die Winkel im Bogenmaß gemessen sind, dann gilt:

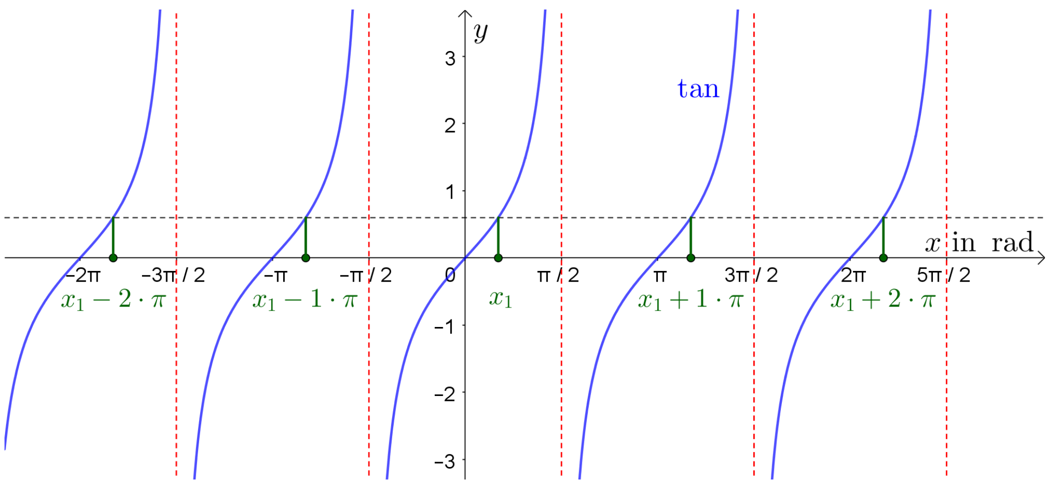
$$\boldsymbol{\tan(x) = \tan(\pi + x)}$$

3) Für die zweite Lösung x_2 gilt also: $x_2 =$ ______ rad

Tangensfunktion

Tatsächlich hat die Gleichung $\tan(x) = 0{,}6$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen.

Der Graph der Tangensfunktion f mit $f(x) = \tan(x)$ ist dargestellt:



Die waagrechte strichlierte Gerade hat die Gleichung $y = 0{,}6$.

Die Schnittstellen dieser Gerade mit dem Graphen sind also die Lösungen der Gleichung $\tan(x) = 0{,}6$.

Für die eingezeichnete Lösung x_1 gilt: $x_1 =$ ______ rad

Nach jeder *halben* Umdrehung am Einheitskreis ist der Tangenswert wieder gleich groß.
Neben x_1 sind also auch folgende Winkel Lösungen:

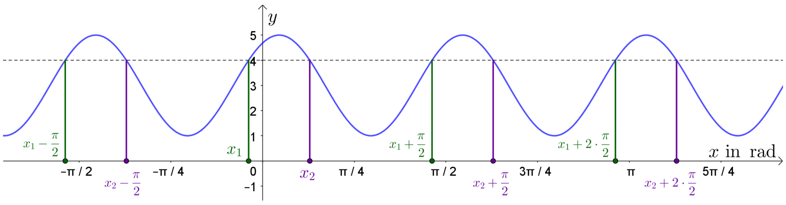
$$x_1 + 1\cdot\pi, \quad x_1 + 2\cdot\pi, \quad x_1 + 3\cdot\pi, \ldots \quad \text{sowie} \quad x_1 - 1\cdot\pi, \quad x_1 - 2\cdot\pi, \quad x_1 - 3\cdot\pi, \ldots$$

Diese unendlich vielen Lösungen können wir kurz so anschreiben:

$$x_{1,k} = x_1 + k\cdot\pi = \underline{\qquad} + k\cdot\pi\ \text{rad}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Goniometrische Gleichungen lösen

Der Graph der allgemeinen Sinusfunktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(4 \cdot x + 1) + 3$ ist dargestellt.



Die Gleichung $2 \cdot \sin(4 \cdot x + 1) + 3 = 4$ kannst du über der Grundmenge $\mathbb{R}$ folgendermaßen lösen:

1) Forme die Gleichung auf $\sin(☺) = \heartsuit$ um.

2) Berechne die Lösungen $x_{1,k}$ der Gleichung aus $☺ = \arcsin(\heartsuit) + k \cdot 2 \cdot \pi$.

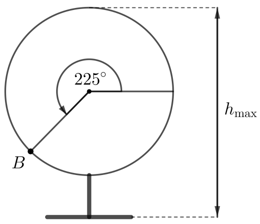
$$\implies x_{1,k} = \boxed{} + k \cdot \boxed{} \text{ rad}$$

3) Berechne die Lösungen $x_{2,k}$ der Gleichung aus $☺ = \pi - \arcsin(\heartsuit) + k \cdot 2 \cdot \pi$.

$$\implies x_{2,k} = \boxed{} + k \cdot \boxed{} \text{ rad}$$

Riesenrad

Ben fährt in einem Riesenrad, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn dreht.



- Das Riesenrad hat den Durchmesser $d = 40\,\text{m}$.
- Die Höhe des Riesenrads beträgt $h_{\max} = 50\,\text{m}$.
- Eine vollständige Umdrehung des Riesenrads dauert 3 Minuten.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist Ben im dargestellten Punkt B am Riesenrad.

Erinnere dich an die Zeigerdiagramme für allgemeine Sinusfunktionen.
Für Bens Höhe h (in Metern) zum Zeitpunkt t (in Minuten) gilt also: $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$

1) Ermittle die Parameter A, ω, φ und c. Winkel im Bogenmaß

2) Wie viele Sekunden ist Ben während einer Umdrehung mindestens 42 m über dem Boden?