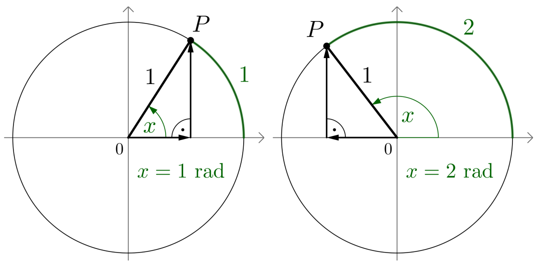
Funktionsgraph der Sinusfunktion

Bei den Winkel*funktionen* auf diesem Arbeitsblatt messen wir alle Winkel im Bogenmaß.
Rechts sind die beiden Winkel $x = 1$ rad bzw. $x = 2$ rad am Einheitskreis dargestellt.

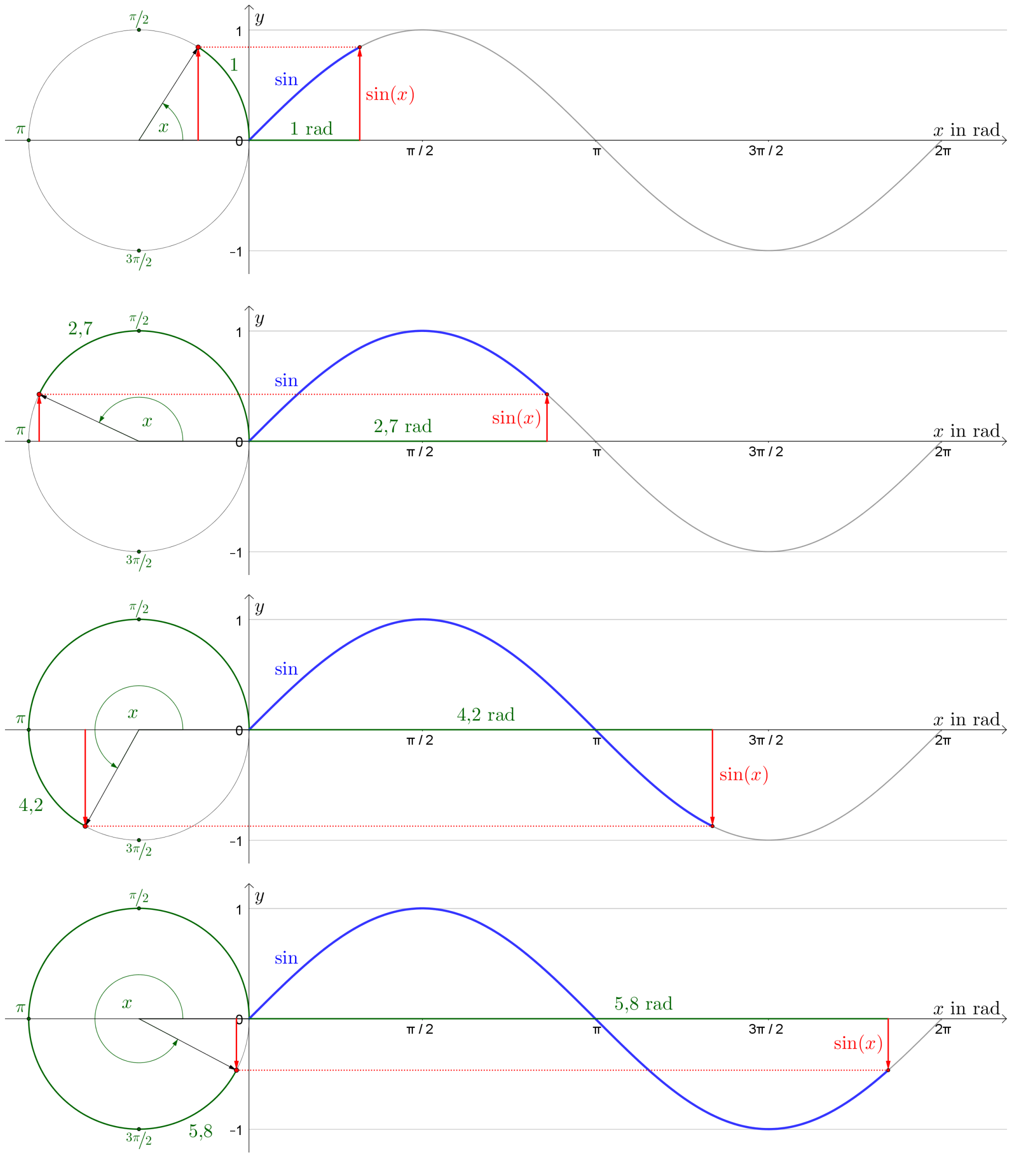
Da der Radius die Länge 1 hat, haben die beiden dargestellten Winkelbögen am Kreis die Länge 1 bzw. 2.



Jedem Winkel $x \in [0\,\text{rad}, 2\cdot\pi\,\text{rad}[$ entspricht genau ein Punkt P am Einheitskreis. Für seine Koordinaten gilt:

$$\boldsymbol{P = (\cos(x) \mid \sin(x))}$$

Die **Sinusfunktion** ordnet jedem Winkel x die zugehörige 2. Koordinate $\sin(x)$ am Einheitskreis zu:



Im Intervall $[0\,\text{rad}, 2\cdot\pi\,\text{rad}[$ hat die Sinusfunktion …

… die Nullstellen bei den Winkeln $x = 0\,\text{rad}$ und $x = \pi\,\text{rad}$.

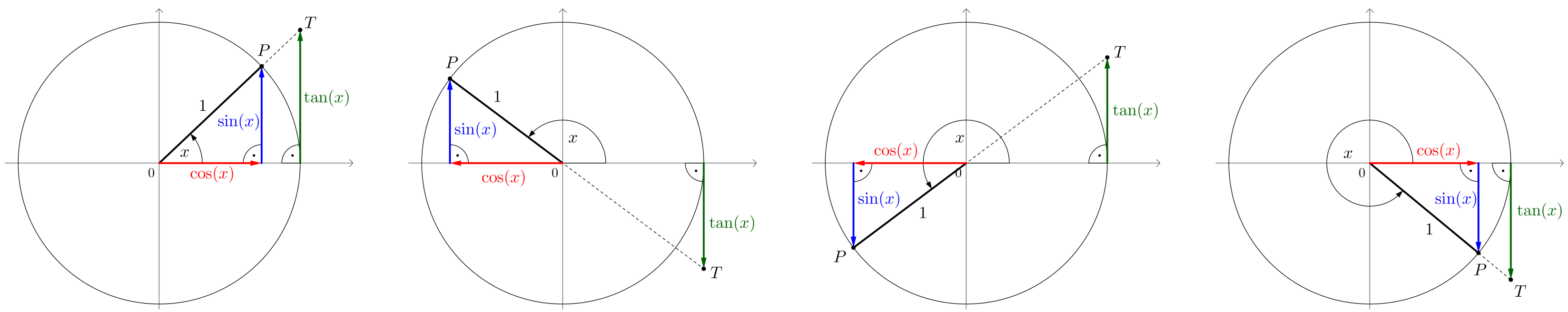
… den Hochpunkt $\left(\frac{\pi}{2}\,\text{rad} \mid 1\right)$ und den Tiefpunkt $\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\,\text{rad} \mid -1\right)$.

Am steilsten bergab geht die Sinusfunktion im Intervall $[0\,\text{rad}, 2\cdot\pi\,\text{rad}[$ an der Stelle $x = \pi\,\text{rad}$.

Diese Stelle ist eine sogenannte Wendestelle der Sinusfunktion.

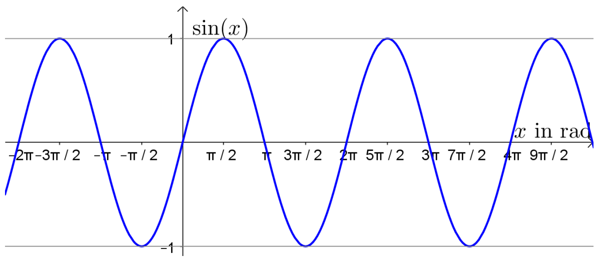
Eigenschaften der Winkelfunktionen

In den folgenden Bildern sind die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens in den 4 Quadranten am Einheitskreis dargestellt:



Die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens haben daher die folgenden Eigenschaften:

Sinusfunktion: $\sin(x)$



Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

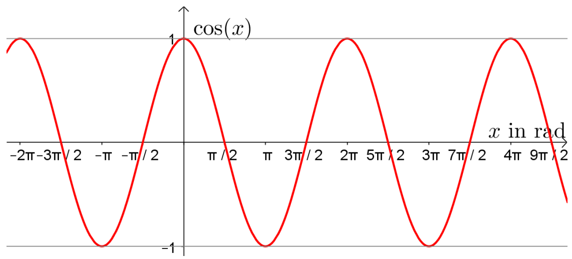
(Kleinstmögliche) Wertemenge: $W = [-1; 1]$

(Kleinstmögliche) Periodendauer: $T = 2 \cdot \pi\,\text{rad}$

Nullstellen: $k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Symmetrie zum Koordinatenursprung $(0 \mid 0)$:
$\boldsymbol{\sin(-x) = -\sin(x)}$ sin ist eine ungerade Funktion.

Cosinusfunktion: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

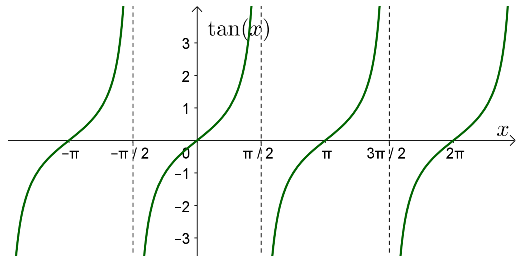
(Kleinstmögliche) Wertemenge: $W = [-1; 1]$

(Kleinstmögliche) Periodendauer: $T = 2 \cdot \pi\,\text{rad}$

Nullstellen: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Symmetrie zur vertikalen Achse:
$\boldsymbol{\cos(-x) = \cos(x)}$ cos ist eine gerade Funktion.

Tangensfunktion: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(Kleinstmögliche) Wertemenge: $W = \mathbb{R}$

(Kleinstmögliche) Periodendauer: $T = \pi\,\text{rad}$

Nullstellen: $k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Symmetrie zum Koordinatenursprung $(0 \mid 0)$:
$\boldsymbol{\tan(-x) = -\tan(x)}$ tan ist eine ungerade Funktion.

Polstellen: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

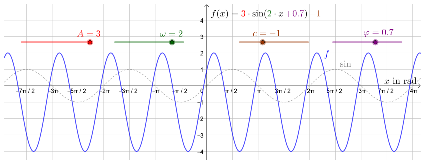
Allgemeine Sinusfunktion

Jede Funktion f mit

$$\boldsymbol{f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c}$$

heißt **allgemeine Sinusfunktion**.

$\boldsymbol{A}$ . . . **Amplitude**
$\boldsymbol{\omega}$ . . . **Kreisfrequenz**
$\boldsymbol{\varphi}$ . . . **Nullphasenwinkel**



Die Graphen von $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto 3 \cdot \sin(2 \cdot x + 0{,}7) - 1$ unterscheiden sich durch . . .

1) Skalierung in vertikaler Richtung (A),

2) Skalierung in horizontaler Richtung (ω),

3) Verschiebung in vertikaler Richtung (c) und

4) Verschiebung in horizontaler Richtung (φ bzw. ω).

Diese Zusammenhänge zwischen den Graphen von

$$x \mapsto f(x) \quad \text{und} \quad x \mapsto a \cdot f(b \cdot x + c) + d$$

gelten nicht nur für die Sinusfunktion,
sondern für *alle* reellen Funktionen f.

Amplitude A

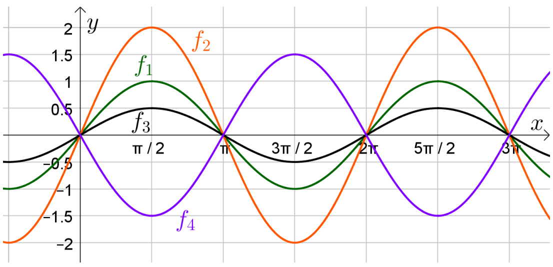
Die Funktionswerte von $g(x) = \sin(x)$ sind genau im Intervall $[-1; 1]$ enthalten.
Also sind die Funktionswerte von $\boldsymbol{f(x) = A \cdot \sin(x)}$ genau im Intervall $[-A; A]$ enthalten.

Eine Amplitude $A > 1$ bewirkt eine *Streckung* des Funktionsgraphen von g in y-Richtung.

Eine Amplitude $0 < A < 1$ bewirkt eine *Stauchung* des Funktionsgraphen von g in y-Richtung.

Die Graphen von $x \mapsto 3 \cdot \sin(x)$ und $x \mapsto -3 \cdot \sin(x)$ sind *Spiegelungen* voneinander an der x-Achse.

Die Graphen von Funktionen f_i mit $f_i(x) = A \cdot \sin(x)$ sind unten dargestellt.



$f_1(x) = 1 \cdot \sin(x)$, weil $A = 1$.

$f_2(x) = 2 \cdot \sin(x)$, weil $A = 2$.

$f_3(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x)$, weil $A = 0{,}5$.

$f_4(x) = -1{,}5 \cdot \sin(x)$, weil $A = -1{,}5$.

Kreisfrequenz ω

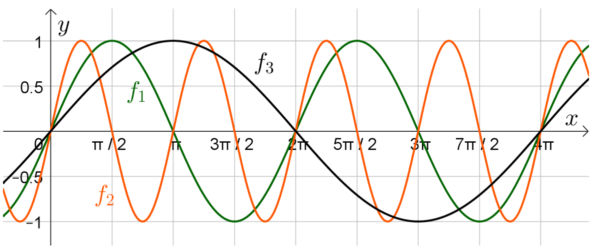
Die Funktion $g(x) = \sin(x)$ durchläuft eine vollständige Periode von $x = 0$ rad bis $x = 2 \cdot \pi$ rad.
Also durchläuft $\boldsymbol{f(x) = \sin(\omega \cdot x)}$ eine vollständige Periode von $x = 0$ rad bis $x = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}$ rad.

Für die **Periodendauer T** und die **Kreisfrequenz ω** gilt also: $\boldsymbol{T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}}$ bzw. $\boldsymbol{\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}}$

Eine Kreisfrequzenz $\omega > 1$ bewirkt eine *Stauchung* von g in x-Richtung. Je größer ω, desto kleiner T.

Eine Kreisfrequzenz $0 < \omega < 1$ bewirkt eine *Streckung* von g in x-Richtung. Je kleiner ω, desto größer T.

Die Graphen von Funktionen f_i mit $f_i(x) = \sin(\omega \cdot x)$ sind unten dargestellt.



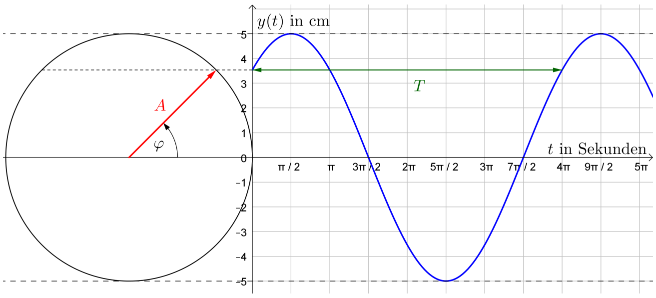
$f_1(x) = \sin(x)$, weil $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$.

$f_2(x) = \sin(2 \cdot x)$, weil $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{\pi} = 2$.

$f_3(x) = \sin(0{,}5 \cdot x)$, weil $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{4 \cdot \pi} = 0{,}5$.

Zeigerdiagramm

In einem Zeigerdiagramm rotiert ein Zeiger gegen den Uhrzeigersinn.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Zeiger in der unten dargestellten Position.
Zum Zeitpunkt t ist $y(t)$ die y-Koordinate der Zeigerspitze.



Der Graph der Funktion y ist links dargestellt.
Dabei gilt:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$y(t) \ldots$ y-Koordinate der Zeigerspitze in cm

1) Die Länge des Zeigers ist die Amplitude $A = 5$ cm.

2) Ermittle die Kreisfrequenz ω dieser allgemeinen Sinusfunktion.

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{4 \cdot \pi} = 0{,}5 \text{ rad/s}$$

Die Kreisfrequenz $\boldsymbol{\omega} = \frac{\text{Zurückgelegter Winkel}}{\text{Benötigte Zeit}}$ heißt deshalb auch **Winkelgeschwindigkeit**.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt: $y(0) = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = A \cdot \sin(\varphi)$

Der Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ ist also der Winkel zum Zeitpunkt $t = 0$ und heißt deshalb **Nullphasenwinkel**.

Für den oben eingezeichneten Nullphasenwinkel gilt: $\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad

Zum Zeitpunkt t ist $\omega \cdot t + \varphi$ der Winkel des Zeigers.

3) Rechne nach, dass der Zeiger zum Zeitpunkt $t = \frac{7 \cdot \pi}{2}$ waagrecht nach rechts zeigt.

$$\omega \cdot t + \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{7 \cdot \pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{8 \cdot \pi}{4} = 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

Der Zeiger zeigt also waagrecht nach rechts.

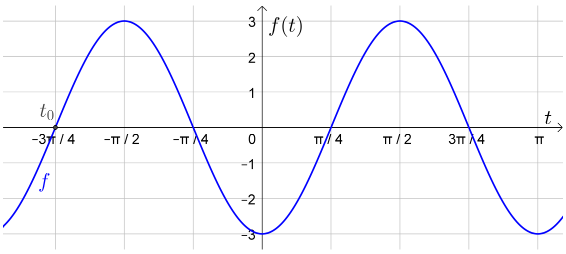
Nullphasenwinkel φ

Der Graph einer allgemeinen Sinusfunktion f mit $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ ist dargestellt.

1) Ermittle die Parameterwerte $A > 0$ und $\omega > 0$.

$$A = 3$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi} = 2$$



Ausgehend von $t = 0$ drehen wir die Zeit so weit zurück, bis der Zeiger im Zeigerdiagramm waagrecht nach rechts zeigt. Dieser Zeitpunkt $t_0 = -\frac{3 \cdot \pi}{4}$ ist oben eingezeichnet.
Zum Zeitpunkt t_0 gilt $\omega \cdot t_0 + \varphi = 0$ bzw. $\boldsymbol{\varphi = -\omega \cdot t_0}$.

2) Ermittle damit den Nullphasenwinkel $\varphi \in [0 \text{ rad}; 2 \cdot \pi \text{ rad}[$ und eine Funktionsgleichung von f.

$$\varphi = -\omega \cdot t_0 = -2 \cdot \left(-\frac{3 \cdot \pi}{4}\right) = \frac{3 \cdot \pi}{2} \implies f(t) = 3 \cdot \sin\left(2 \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)$$

Jede Änderung von φ um $2 \cdot \pi$ hat keine Auswirkung auf den Funktionsgraphen, weil $\sin(☺ + 2 \cdot \pi) = \sin(☺)$ gilt.
Zur Berechnung von $\varphi = -\omega \cdot t_0$ kannst du für t_0 deshalb jede Stelle wählen, bei der der Zeiger waagrecht nach rechts zeigt.
Bei dieser speziellen Funktion f kannst du den Nullphasenwinkel φ auch direkt an der Stelle $t = 0$ ablesen. Warum?

Vertikale Verschiebung c

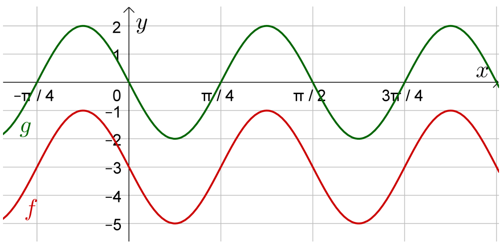
Die Funktionswerte von $g(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$ sind genau im Intervall $[-A; A]$ enthalten.

Also sind die Werte von $\boldsymbol{f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c}$ genau im Intervall $[-A+c; A+c]$ enthalten.

$c > 0$ bewirkt eine *Verschiebung* des Funktionsgraphen von g um c Einheiten nach oben.

$c < 0$ bewirkt eine *Verschiebung* des Funktionsgraphen von g um $|c|$ Einheiten nach unten.

1) Ermittle eine Gleichung der dargestellten Funktion g.



$A = 2$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{\pi/2} = 4$$

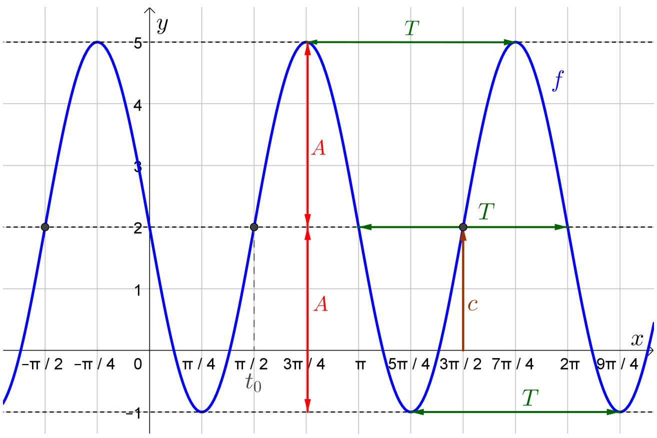
$$t_0 = -\frac{\pi}{4} \implies \varphi = -\omega \cdot t_0 = -4 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

$$\implies g(x) = 2 \cdot \sin(4 \cdot x + \pi)$$

2) Für die dargestellte Funktion f gilt also: $f(x) = g(x) - 3 = 2 \cdot \sin(4 \cdot x - \pi) - 3$

Funktionsgraph $\rightsquigarrow$ Funktionsgleichung

Wir ermitteln die Parameter A, ω, φ und c von $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$ aus dem Graphen:



Die horizontalen Geraden durch die Hochpunkte und durch die Tiefpunkte sind links eingezeichnet.

Bei der dargestellten Funktion f sind das die Geraden $y = 5$ und $y = -1$.

In der Mitte dazwischen verläuft die horizontale Gerade $y = \frac{5+(-1)}{2} = 2$.

Falls $c = 0$ gilt, dann ist die x-Achse diese mittlere Gerade.

1) Bei der dargestellten Funktion f gilt also: $c = 2$

2) Die Amplitude A ist der Abstand zwischen der mittleren und den beiden äußeren Geraden.

Bei der dargestellten Funktion f gilt also: $A = 3$

3) Die Periodendauer T ist (zum Beispiel) der Abstand zwischen benachbarten Hochpunkten.

$$T = \pi \implies \boldsymbol{\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}} = 2$$

4) Lies eine Stelle t_0 ab, an der der Graph die mittlere Gerade von unten nach oben schneidet.
Der Zeiger im entsprechenden Zeigerdiagramm zeigt an einer solchen Stelle also waagrecht nach rechts.

$$t_0 = -\frac{\pi}{2} \implies \boldsymbol{\varphi = -\omega \cdot t_0} = \pi$$

Eine Gleichung der dargestellten Funktion f ist also $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot x + \pi) + 2$.

Extrempunkte

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4{,}2 \cdot \sin(5 \cdot x - 1) + 2$.
Berechne einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt von f.

Der größte Wert von sin(☺) ist 1, also ist der größte Funktionswert $4{,}2 \cdot 1 + 2 = 6{,}2$.
Dieser größte Funktionswert wird z.B. an der Stelle $☺ = \frac{\pi}{2}$ angenommen:

$$5 \cdot x - 1 = \frac{\pi}{2} \iff x = \frac{\pi + 2}{10} = 0{,}514...$$

$\implies$ Hochpunkt: $(0{,}514... \mid 6{,}2)$

Der kleinste Wert von sin(☺) ist -1, also ist der kleinste Funktionswert $4{,}2 \cdot (-1) + 2 = -2{,}2$.
Dieser kleinste Funktionswert wird z.B. an der Stelle $☺ = \frac{3 \cdot \pi}{2}$ angenommen:

$$5 \cdot x - 1 = \frac{3 \cdot \pi}{2} \iff x = \frac{3 \cdot \pi + 2}{10} = 1{,}142...$$

$\implies$ Tiefpunkt: $(1{,}142... \mid -2{,}2)$

Frequenz / Kreisfrequenz

Für die Funktion g gilt: $g(t) = 3{,}5 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$ (t in Sekunden, $y(t)$ in cm)

Für die **Kreisfrequenz ω** dieser Sinusschwingung gilt also: $\omega = 3 \cdot \pi$ rad/s

Einer vollständigen Kreisumdrehung entspricht der Winkel $2 \cdot \pi$ rad.

In diesem Zeigerdiagramm schafft der Zeiger also $\frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = \frac{3}{2}$ Umdrehungen pro Sekunde.

Das ist die sogenannte **Frequenz f** dieser Sinusschwingung: $f = \frac{3}{2} \, \frac{\text{Umdr.}}{\text{s}}$

Für die **Periodendauer T** dieser Sinusschwingung gilt: $T = \frac{2}{3} \, \frac{\text{s}}{\text{Umdr.}}$

Allgemein gilt: $\boldsymbol{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f}$ bzw. $\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$

Verschiedene Funktionsgleichungen – Gleiche Funktion

Erinnere dich, dass $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Trage jeweils Zahlen in die großen Kästchen und + bzw. − in die kleinen Kästchen so ein, dass die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ stimmt.

a) $a(x) = 2 \cdot \sin(-4 \cdot x) + 3 = -2 \cdot \sin(4 \cdot x) + 3$

b) $b(x) = -3 \cdot \sin(2 \cdot x - 1) = 3 \cdot \sin(-2 \cdot x + 1)$

c) $c(x) = 5 \cdot \cos(-2 \cdot x + 3) = 5 \cdot \cos(2 \cdot x - 3)$

d) $d(x) = 4 \cdot \cos(3 \cdot x + \frac{\pi}{4}) = 4 \cdot \sin\left(3 \cdot x + \frac{3 \cdot \pi}{4}\right)$

e) $e(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \pi = \cos(x - \frac{\pi}{4}) + \pi$