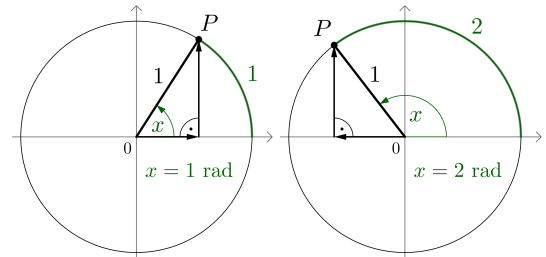


Bei den *Winkelfunktionen* auf diesem Arbeitsblatt messen wir alle Winkel im **Bogenmaß**. Rechts sind die beiden Winkel  $x = 1$  rad bzw.  $x = 2$  rad am **Einheitskreis** dargestellt.

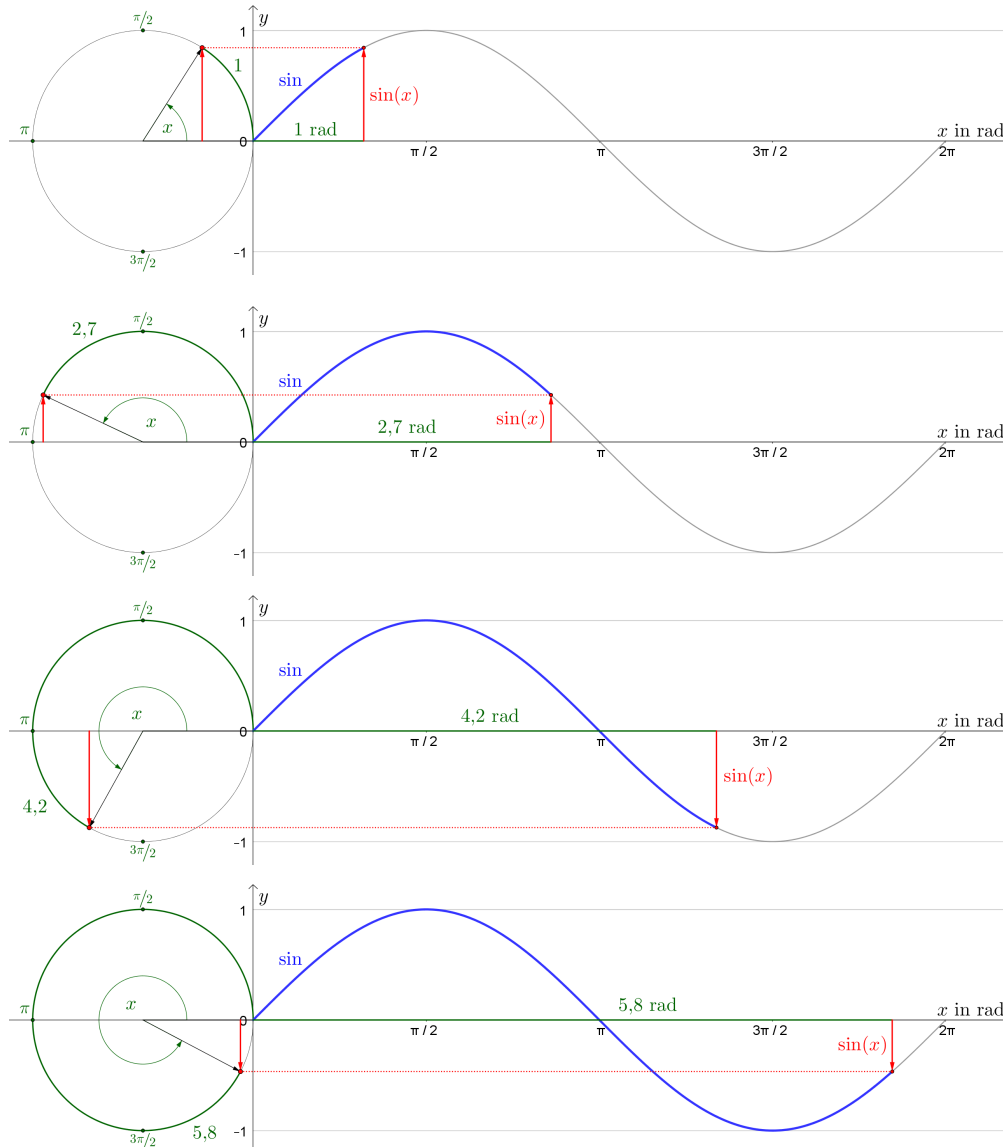
Da der Radius die Länge 1 hat, haben die beiden dargestellten Winkelbögen am Kreis die Länge 1 bzw. 2.

Jedem Winkel  $x \in [0 \text{ rad}, 2 \cdot \pi \text{ rad}[$  entspricht genau ein Punkt  $P$  am Einheitskreis. Für seine Koordinaten gilt:

$$P = (\cos(x) \mid \sin(x))$$



Die **Sinusfunktion** ordnet jedem Winkel  $x$  die zugehörige 2. Koordinate  $\sin(x)$  am Einheitskreis zu:



Im Intervall  $[0 \text{ rad}, 2 \cdot \pi \text{ rad}[$  hat die Sinusfunktion ...

... die **Nullstellen** bei den Winkeln  $x = \boxed{\phantom{00}}$  rad und  $x = \boxed{\phantom{00}}$  rad.

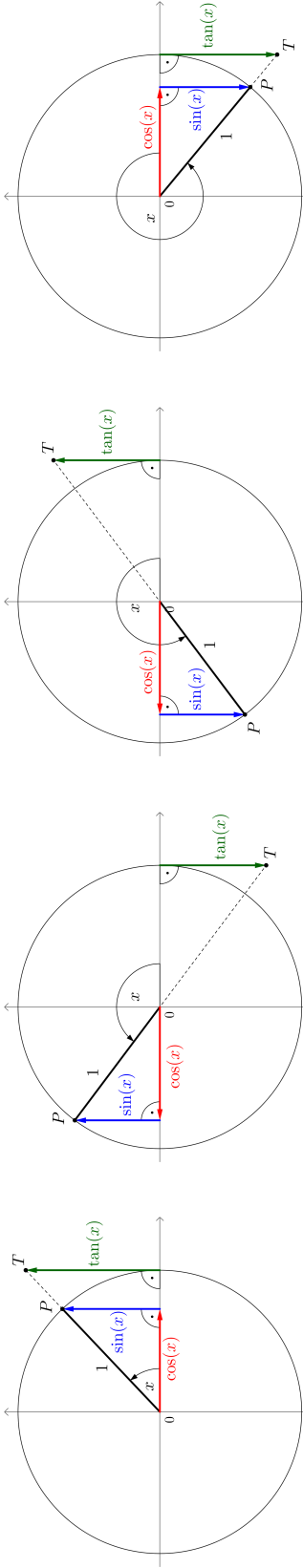
... den **Hochpunkt** ( $\boxed{\phantom{00}}$  rad  $\mid$   $\boxed{\phantom{00}}$ ) und den **Tiefpunkt** ( $\boxed{\phantom{00}}$  rad  $\mid$   $\boxed{\phantom{00}}$ ).

Am steilsten bergab geht die Sinusfunktion im Intervall  $[0 \text{ rad}, 2 \cdot \pi \text{ rad}[$  an der Stelle  $x = \boxed{\phantom{00}}$  rad.

Diese Stelle ist eine sogenannte **Wendestelle** der Sinusfunktion.

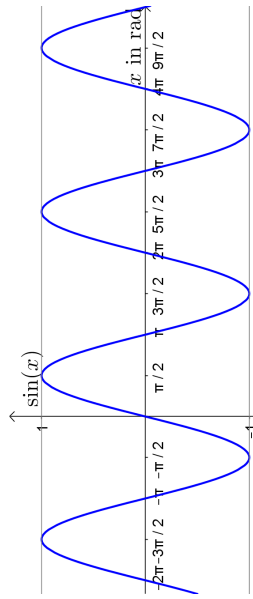
Eigenschaften der Winkelfunktionen **MmF**

In den folgenden Bildern sind die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens in den 4 Quadranten am Einheitskreis dargestellt:



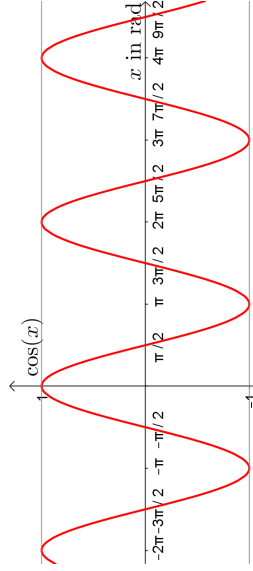
Die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens haben daher die folgenden Eigenschaften:

**Sinusfunktion:  $\sin(x)$**



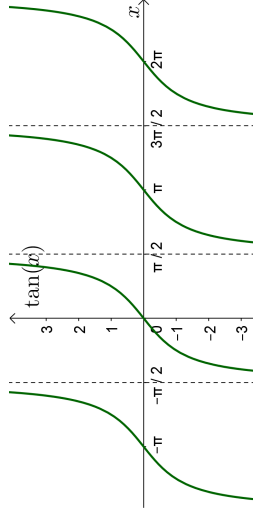
Definitionsmenge:  $D = \mathbb{R}$   
 (Kleinstmögliche) Wertemenge:  $W = [-1; 1]$   
 (Kleinstmögliche) **Periodendauer**:  $T = 2 \cdot \pi$  rad  
 Nullstellen:  $k \cdot \pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$   
 Symmetrie zum Koordinatenursprung  $(0 | 0)$ :  
 **$\sin(-x) = -\sin(x)$**  sin ist eine ungerade Funktion.

**Cosinusfunktion:  $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$**



Definitionsmenge:  $D = \mathbb{R}$   
 (Kleinstmögliche) Wertemenge:  $W = [-1; 1]$   
 (Kleinstmögliche) Periodendauer:  $T = 2 \cdot \pi$  rad  
 Nullstellen:  $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$   
 Symmetrie zur vertikalen Achse:  
 **$\cos(-x) = \cos(x)$**  cos ist eine gerade Funktion.

**Tangensfunktion:  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$**

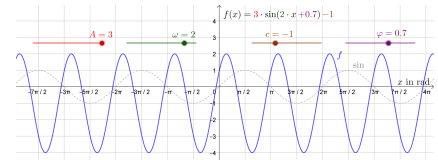


Definitionsmenge:  $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$   
 (Kleinstmögliche) Wertemenge:  $W = \mathbb{R}$   
 (Kleinstmögliche) Periodendauer:  $T = \pi$  rad  
 Nullstellen:  $k \cdot \pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$   
 Symmetrie zum Koordinatenursprung  $(0 | 0)$ :  
 **$\tan(-x) = -\tan(x)$**  tan ist eine ungerade Funktion.  
**Polstellen:**  $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$

Jede Funktion  $f$  mit

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$$

- $A \dots$  Amplitude
- $\omega \dots$  Kreisfrequenz
- $\varphi \dots$  Nullphasenwinkel



heißt **allgemeine Sinusfunktion**.

Die Graphen von  $x \mapsto \sin(x)$  und  $x \mapsto 3 \cdot \sin(2 \cdot x + 0,7) - 1$  unterscheiden sich durch ...

- 1) Skalierung in vertikaler Richtung ( $A$ ),
- 2) Skalierung in horizontaler Richtung ( $\omega$ ),
- 3) Verschiebung in vertikaler Richtung ( $c$ ) und
- 4) Verschiebung in horizontaler Richtung ( $\varphi$  bzw.  $\omega$ ).

Diese Zusammenhänge zwischen den Graphen von

$$x \mapsto f(x) \quad \text{und} \quad x \mapsto a \cdot f(b \cdot x + c) + d$$

gelten nicht nur für die Sinusfunktion, sondern für **alle** reellen Funktionen  $f$ .

Amplitude  $A$  

Die Funktionswerte von  $g(x) = \sin(x)$  sind genau im Intervall  $[-1; 1]$  enthalten.

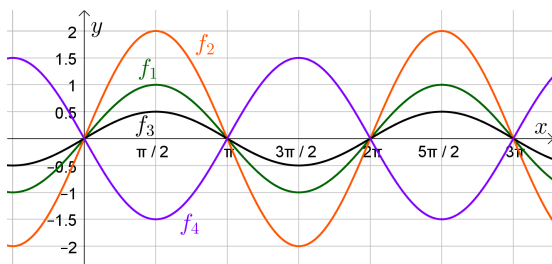
Also sind die Funktionswerte von  $f(x) = A \cdot \sin(x)$  genau im Intervall  enthalten.

Eine Amplitude  $A > 1$  bewirkt eine *Streckung* des Funktionsgraphen von  $g$  in  $y$ -Richtung.

Eine Amplitude  $0 < A < 1$  bewirkt eine *Stauchung* des Funktionsgraphen von  $g$  in  $y$ -Richtung.

Die Graphen von  $x \mapsto 3 \cdot \sin(x)$  und  $x \mapsto -3 \cdot \sin(x)$  sind *Spiegelungen* voneinander an der  $x$ -Achse.

Die Graphen von Funktionen  $f_i$  mit  $f_i(x) = A \cdot \sin(x)$  sind unten dargestellt.



$$f_1(x) = \text{input}, \text{ weil } A = \text{input}.$$

$$f_2(x) = \text{input}, \text{ weil } A = \text{input}.$$

$$f_3(x) = \text{input}, \text{ weil } A = \text{input}.$$

$$f_4(x) = \text{input}, \text{ weil } A = \text{input}.$$

Kreisfrequenz  $\omega$  

Die Funktion  $g(x) = \sin(x)$  durchläuft eine vollständige Periode von  $x = 0$  rad bis  $x = 2 \cdot \pi$  rad.

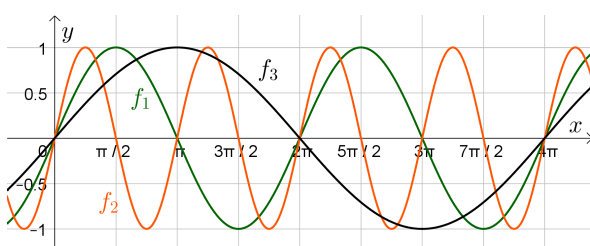
Also durchläuft  $f(x) = \sin(\omega \cdot x)$  eine vollständige Periode von  $x = 0$  rad bis  $x = \frac{\text{input}}{\text{input}}$  rad.

Für die **Periodendauer**  $T$  und die **Kreisfrequenz**  $\omega$  gilt also:  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$  bzw.  $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$

Eine Kreisfrequenz  $\omega > 1$  bewirkt eine *Stauchung* von  $g$  in  $x$ -Richtung. Je größer  $\omega$ , desto kleiner  $T$ .

Eine Kreisfrequenz  $0 < \omega < 1$  bewirkt eine *Streckung* von  $g$  in  $x$ -Richtung. Je kleiner  $\omega$ , desto größer  $T$ .

Die Graphen von Funktionen  $f_i$  mit  $f_i(x) = \sin(\omega \cdot x)$  sind unten dargestellt.

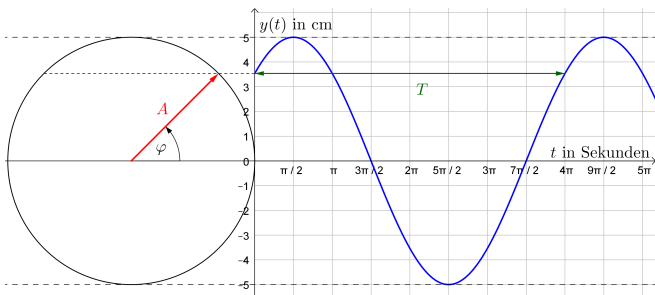


$$f_1(x) = \text{input}, \text{ weil } \omega = \frac{2 \cdot \pi}{\text{input}} = \text{input}.$$

$$f_2(x) = \text{input}, \text{ weil } \omega = \frac{2 \cdot \pi}{\text{input}} = \text{input}.$$

$$f_3(x) = \text{input}, \text{ weil } \omega = \frac{2 \cdot \pi}{\text{input}} = \text{input}.$$

In einem Zeigerdiagramm rotiert ein Zeiger gegen den Uhrzeigersinn.  
 Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist der Zeiger in der unten dargestellten Position.  
 Zum Zeitpunkt  $t$  ist  $y(t)$  die  $y$ -Koordinate der Zeigerspitze.



Der Graph der Funktion  $y$  ist links dargestellt.  
 Dabei gilt:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$t \dots$  Zeit in Sekunden

$y(t) \dots$   $y$ -Koordinate der Zeigerspitze in cm

1) Die Länge des Zeigers ist die Amplitude  $A = \boxed{\phantom{000}}$  cm.

2) Ermittle die Kreisfrequenz  $\omega$  dieser allgemeinen Sinusfunktion.

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{\boxed{\phantom{000}}} = \boxed{\phantom{000}} \text{ rad/s}$$

Die Kreisfrequenz  $\omega = \frac{\text{Zurückgelegter Winkel}}{\text{Benötigte Zeit}}$  heißt deshalb auch **Winkelgeschwindigkeit**.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt:  $y(0) = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = A \cdot \sin(\varphi)$

Der Winkel  $\varphi$  ist also der Winkel zum Zeitpunkt  $t = 0$  und heißt deshalb **Nullphasenwinkel**.

Für den oben eingezeichneten Nullphasenwinkel gilt:  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  rad

Zum Zeitpunkt  $t$  ist  $\omega \cdot t + \varphi$  der Winkel des Zeigers.

3) Rechne nach, dass der Zeiger zum Zeitpunkt  $t = \frac{7 \cdot \pi}{2}$  waagrecht nach rechts zeigt.

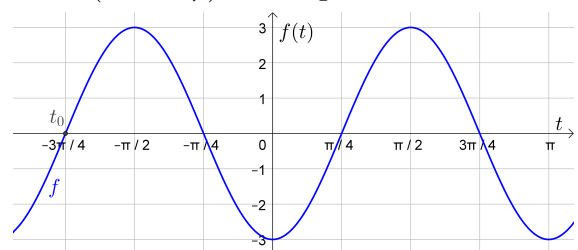
Nullphasenwinkel  $\varphi$    

Der Graph einer allgemeinen Sinusfunktion  $f$  mit  $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  ist dargestellt.

1) Ermittle die Parameterwerte  $A > 0$  und  $\omega > 0$ .

$$A = \boxed{\phantom{000}}$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{\boxed{\phantom{000}}} = \boxed{\phantom{000}}$$



Ausgehend von  $t = 0$  drehen wir die Zeit so weit zurück, bis der Zeiger im Zeigerdiagramm waagrecht nach rechts zeigt. Dieser Zeitpunkt  $t_0 = -\frac{3 \cdot \pi}{4}$  ist oben eingezeichnet.

Zum Zeitpunkt  $t_0$  gilt  $\omega \cdot t_0 + \varphi = 0$  bzw.  $\varphi = -\omega \cdot t_0$ .

2) Ermittle damit den Nullphasenwinkel  $\varphi \in [0 \text{ rad}; 2 \cdot \pi \text{ rad}]$  und eine Funktionsgleichung von  $f$ .

Jede Änderung von  $\varphi$  um  $2 \cdot \pi$  hat keine Auswirkung auf den Funktionsgraphen, weil  $\sin(\odot + 2 \cdot \pi) = \sin(\odot)$  gilt.

Zur Berechnung von  $\varphi = -\omega \cdot t_0$  kannst du für  $t_0$  deshalb jede Stelle wählen, bei der der Zeiger waagrecht nach rechts zeigt.

Bei dieser speziellen Funktion  $f$  kannst du den Nullphasenwinkel  $\varphi$  auch direkt an der Stelle  $t = 0$  ablesen. Warum?

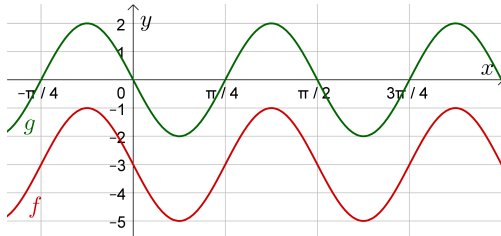
Die Funktionswerte von  $g(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$  sind genau im Intervall  $[-A; A]$  enthalten.

Also sind die Werte von  $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$  genau im Intervall  enthalten.


$c > 0$  bewirkt eine *Verschiebung* des Funktionsgraphen von  $g$  um  $c$  Einheiten nach oben.

$c < 0$  bewirkt eine *Verschiebung* des Funktionsgraphen von  $g$  um  $|c|$  Einheiten nach unten.

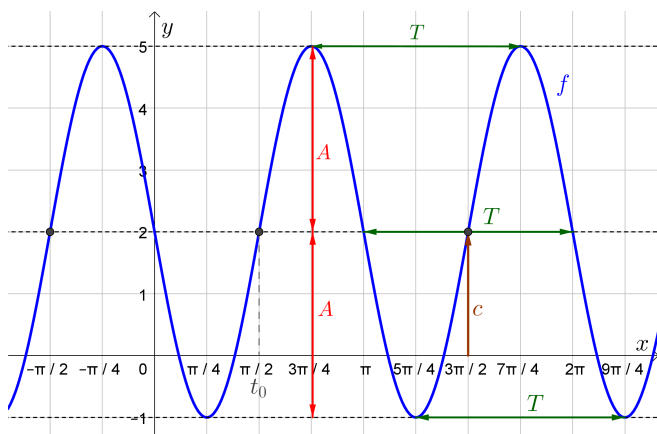
1) Ermittle eine Gleichung der dargestellten Funktion  $g$ .



2) Für die dargestellte Funktion  $f$  gilt also:  $f(x) =$

Funktionsgraph  $\leadsto$  Funktionsgleichung 

Wir ermitteln die Parameter  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  und  $c$  von  $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$  aus dem Graphen:



Die horizontalen Geraden durch die Hochpunkte und durch die Tiefpunkte sind links eingezeichnet.

Bei der dargestellten Funktion  $f$  sind das die Geraden  $y = 5$  und  $y = -1$ .

In der Mitte dazwischen verläuft die horizontale Gerade  $y = \frac{5+(-1)}{2} = 2$ .

Falls  $c = 0$  gilt, dann ist die  $x$ -Achse diese mittlere Gerade.

1) Bei der dargestellten Funktion  $f$  gilt also:  $c =$

2) Die Amplitude  $A$  ist der Abstand zwischen der mittleren und den beiden äußeren Geraden.

Bei der dargestellten Funktion  $f$  gilt also:  $A =$

3) Die Periodendauer  $T$  ist (zum Beispiel) der Abstand zwischen benachbarten Hochpunkten.

$$T = \text{} \implies \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \text{}$$

4) Lies eine Stelle  $t_0$  ab, an der der Graph die mittlere Gerade von unten nach oben schneidet.

Der Zeiger im entsprechenden Zeigerdiagramm zeigt an einer solchen Stelle also waagrecht nach rechts.

$$t_0 = \text{} \implies \varphi = -\omega \cdot t_0 = \text{}$$

Eine Gleichung der dargestellten Funktion  $f$  ist also  $f(x) =$  .

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 4,2 \cdot \sin(5 \cdot x - 1) + 2$ .  
 Berechne einen **Hochpunkt** und einen **Tiefpunkt** von  $f$ .

Für die Funktion  $g$  gilt:  $g(t) = 3,5 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$  ( $t$  in Sekunden,  $y(t)$  in cm)

Für die **Kreisfrequenz**  $\omega$  dieser Sinusschwingung gilt also:  $\omega = \boxed{\phantom{000}}$  rad/s

Einer vollständigen Kreisumdrehung entspricht der Winkel  $\boxed{\phantom{000}}$  rad.

In diesem Zeigerdiagramm schafft der Zeiger also  $\boxed{\phantom{000}}$  Umdrehungen pro Sekunde.

Das ist die sogenannte **Frequenz**  $f$  dieser Sinusschwingung:  $f = \boxed{\phantom{000}}$   $\frac{\text{Umdr.}}{\text{s}}$

Für die **Periodendauer**  $T$  dieser Sinusschwingung gilt:  $T = \boxed{\phantom{000}}$   $\frac{\text{s}}{\text{Umdr.}}$

Allgemein gilt:  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  bzw.  $f = \frac{1}{T}$

Erinnere dich, dass  $\sin(-x) = -\sin(x)$ ,  $\cos(-x) = \cos(x)$  und  $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

Trage jeweils Zahlen in die großen Kästchen und + bzw. - in die kleinen Kästchen so ein, dass die Gleichung für alle  $x \in \mathbb{R}$  stimmt.

- a)  $a(x) = 2 \cdot \sin(-4 \cdot x) + 3 = -2 \cdot \sin(\boxed{\phantom{00}} \cdot x) \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}}$
- b)  $b(x) = -3 \cdot \sin(2 \cdot x - 1) = 3 \cdot \sin(\boxed{\phantom{00}} \cdot x \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}})$
- c)  $c(x) = 5 \cdot \cos(-2 \cdot x + 3) = \boxed{\phantom{00}} \cdot \cos(2 \cdot x \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}})$
- d)  $d(x) = 4 \cdot \cos(3 \cdot x + \frac{\pi}{4}) = \boxed{\phantom{00}} \cdot \sin(3 \cdot x \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}})$
- e)  $e(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \pi = \cos(x \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}}) \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}}$