



Die Funktion h ist die Verkettung zweier **differenzierbaren** Funktionen f und g :

$$h(x) = f(g(x))$$

Die **Ableitungsfunktion** von h können wir systematisch mit der **Kettenregel** ermitteln:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion h' von $h(x) = \cos(x^2)$.

$$h'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2 \cdot x$$



Die innere Funktion der verketteten Funktion h ist **linear**.

Ermittle die Gleichung der Ableitungsfunktion h' mit der Kettenregel.

Ermittle die Gleichung einer **Stammfunktion** H durch Umkehrung der Kettenregel.

a) $h(x) = e^{4x-2}$

b) $h(x) = \sin(3 \cdot x + 1)$

$$h'(x) = e^{4x-2} \cdot 4$$

$$h'(x) = \cos(3 \cdot x + 1) \cdot 3$$

$$H(x) = e^{4x-2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$H(x) = -\cos(3 \cdot x + 1) \cdot \frac{1}{3}$$



Es gibt *keine* Rechenregel, um im Allgemeinen aus einer verketteten Funktion h systematisch eine Funktionsgleichung einer Stammfunktion H zu ermitteln.

- a) Für die Funktion h mit $h(x) = e^{x^2}$ lässt sich mit den **elementaren Funktionen** *keine* Stammfunktion H ermitteln.
- b) Für die Funktion h mit $h(x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$ lässt sich mit den elementaren Funktionen eine Stammfunktion H ermitteln. Die Funktion h ist nämlich das Ergebnis der Anwendung einer Kettenregel.
- 1) Begründe, warum die Funktion N mit $N(x) = e^{x^2}$ *keine* Stammfunktion von h ist.
 - 2) Passe die Funktionsgleichung von N an, um eine Stammfunktion H von h zu ermitteln.

1) Wir ermitteln N' mit der Kettenregel:

$$N'(x) = e^{x^2} \cdot 2 \cdot x \neq 4 \cdot x \cdot e^{x^2} \quad (\text{z.B. an der Stelle } x = 1)$$

2) Wir passen den konstanten Faktor an, um eine Stammfunktion H von h zu ermitteln:

$$H(x) = 2 \cdot e^{x^2} \implies H'(x) = 2 \cdot e^{x^2} \cdot (2 \cdot x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2} = h(x) \checkmark$$



Wenn eine Funktion h die Form

$$h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot a \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

hat, dann können wir durch Umkehrung der Kettenregel eine Stammfunktion H ermitteln:

$$H(x) = f(g(x)) \cdot a$$



Die Funktion h mit $h(x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$ hat diese Form $h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot a$, weil die Ableitung der inneren Funktion x^2 bis auf einen konstanten Faktor mit $4 \cdot x$ übereinstimmt.

In so einem Fall hat sich zur systematischen Ermittlung einer Stammfunktion H von h im Laufe der Geschichte die folgende Schreibweise (**Integration durch Substitution**) eingebürgert:

i) Ersetze („substituiere“) die innere Funktion durch eine Funktion u : $u(x) = x^2$

ii) Ermittle die Ableitung u' in der Differential-Schreibweise $u'(x) = \frac{du}{dx}$, und forme nach dx um:

$$\frac{du}{dx} = 2 \cdot x \implies dx = \frac{du}{2 \cdot x}$$

iii) Ersetze im unbestimmten Integral $\int h(x) dx$ mithilfe von ii) den Ausdruck dx , und kürze:

$$H(x) = \int 4 \cdot x \cdot e^{x^2} dx = \int 4 \cdot \cancel{x} \cdot e^u \cdot \frac{du}{2 \cdot \cancel{x}} = 2 \cdot \int e^u du$$

iv) Integriere nach u , und ersetze beim Ergebnis wieder $u(x) = x^2$:

$$H(x) = 2 \cdot \int e^u du = 2 \cdot e^u + c = 2 \cdot e^{x^2} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Wir kontrollieren das Ergebnis mit der Kettenregel: $H'(x) = 2 \cdot e^{x^2} \cdot (2 \cdot x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2} = h(x) \checkmark$



Ermittle das unbestimmte Integral durch eine Substitution.

$$\text{a) } \int 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3 dx \quad u = x^4 + 7 \implies \frac{du}{dx} = 4 \cdot x^3 \implies dx = \frac{du}{4 \cdot x^3}$$

$$\implies \int 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3 dx = \int 2 \cdot \cos(u) \cdot \cancel{x^3} \cdot \frac{du}{4 \cdot \cancel{x^3}} = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) + c = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^4 + 7) + c$$

$$\text{Probe: } \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(x^4 + 7) + c \right]' = \frac{1}{2} \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot 4 \cdot x^3 = 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3 \checkmark$$

$$\text{b) } \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \quad u = \cos(x) \implies \frac{du}{dx} = -\sin(x) \implies dx = \frac{du}{-\sin(x)}$$

$$\implies \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{\cancel{\sin(x)}}{u} \cdot \frac{du}{-\cancel{\sin(x)}} = - \int \frac{1}{u} du = -\ln(|u|) + c = -\ln(|\cos(x)|) + c$$

$$\text{Probe: } [-\ln(|\cos(x)|) + c]' = -\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \checkmark$$

$$\text{c) } \int \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x} dx \quad u = \ln(x) \implies \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \implies dx = x \cdot du$$

$$\implies \int \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x} dx = \int \frac{\sin(u)}{5 \cdot \cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot du = \frac{1}{5} \cdot \cos(u) + c = \frac{1}{5} \cdot \cos(\ln(x)) + c$$

$$\text{Probe: } \left[-\frac{1}{5} \cdot \cos(\ln(x)) + c \right]' = -\frac{1}{5} \cdot (-\sin(\ln(x))) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x} \checkmark$$



Eine Stammfunktion H von $h(x) = 3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ kann man mit **partieller Integration** ermitteln. Da die Ableitung von $\sin(x)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $3 \cdot \cos(x)$ übereinstimmt, ist auch die Substitution $u(x) = \sin(x)$ zielführend. Ermittle jene Stammfunktion H von h , die $H(0) = 5$ erfüllt.

$$\frac{du}{dx} = \cos(x) \implies dx = \frac{du}{\cos(x)}$$

$$\implies H(x) = \int 3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \int 3 \cdot u \cdot \frac{du}{\cos(x)} = \frac{3}{2} \cdot u^2 + c = \frac{3}{2} \cdot \sin^2(x) + c$$

$$H(0) = 5 \implies c = 5 \implies H(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin^2(x) + 5$$



Für die rechts dargestellte Funktion f gilt: $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) + 1$

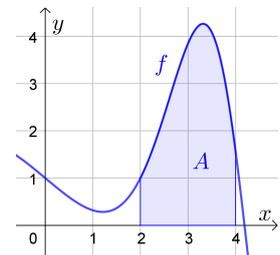
Entscheide mit dem **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**, ob für den dargestellten Flächeninhalt $A < 6$, $A = 6$ oder $A > 6$ gilt.

Wir ermitteln das unbestimmte Integral von f mit einer Substitution:

$$u = \frac{x^2}{4} - 1 \implies \frac{du}{dx} = \frac{x}{2} \implies dx = \frac{2 \cdot du}{x}$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x \cdot \sin(u) \cdot \frac{2 \cdot du}{x} + \int 1 dx = \\ &= \underbrace{-2 \cdot \cos\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) + x + c}_{F(x)} \end{aligned}$$

$$A = \int_2^4 f(x) dx = F(4) - F(2) = -2 \cdot \cos\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) + x \Big|_2^4 = 5,979... - 0 = 5,979... < 6$$



Philipp berechnet das bestimmte Integral $\int_2^4 e^{2x-5} dx$ mit einer Substitution:

$$u = 2 \cdot x - 5 \implies \frac{du}{dx} = 2 \implies dx = \frac{du}{2}$$

$$\implies \int_2^4 e^{2x-5} dx = \int_{-1}^3 e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^u \Big|_{-1}^3 = \frac{1}{2} \cdot e^{2x-5} \Big|_2^4 = 10,042... - 0,183... = 9,858...$$

Trage richtige Integrationsgrenzen in die Kästchen ein.

Hinweis: Verfolge die Rechnung von rechts nach links zurück.

