Kettenregel

Die Funktion h ist die Verkettung zweier differenzierbaren Funktionen f und g:

$$\boldsymbol{h(x) = f(g(x))}$$

Die Ableitungsfunktion von h können wir systematisch mit der **Kettenregel** ermitteln:

$$\boldsymbol{h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion h' von $h(x) = \cos(x^2)$.

$$h'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2 \cdot x$$

Lineare innere Funktion

Die innere Funktion der verketteten Funktion h ist linear.
Ermittle die Gleichung der Ableitungsfunktion h' mit der Kettenregel.
Ermittle die Gleichung einer Stammfunktion H durch Umkehrung der Kettenregel.

a) $h(x) = e^{4 \cdot x - 2}$

$$h'(x) = e^{4 \cdot x - 2} \cdot 4$$

$$H(x) = e^{4 \cdot x - 2} \cdot \tfrac{1}{4}$$

b) $h(x) = \sin(3 \cdot x + 1)$

$$h'(x) = \cos(3 \cdot x + 1) \cdot 3$$

$$H(x) = -\cos(3 \cdot x + 1) \cdot \tfrac{1}{3}$$

Stammfunktionen verketteter Funktionen

Es gibt *keine* Rechenregel, um im Allgemeinen aus einer verketteten Funktion h systematisch eine Funktionsgleichung einer Stammfunktion H zu ermitteln.

a) Für die Funktion h mit $h(x) = e^{x^2}$ lässt sich mit den elementaren Funktionen *keine* Stammfunktion H ermitteln.

b) Für die Funktion h mit $h(x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$ lässt sich mit den elementaren Funktionen eine Stammfunktion H ermitteln. Die Funktion h ist nämlich das Ergebnis der Anwendung einer Kettenregel.

1) Begründe, warum die Funktion N mit $N(x) = e^{x^2}$ *keine* Stammfunktion von h ist.

2) Passe die Funktionsgleichung von N an, um eine Stammfunktion H von h zu ermitteln.

1) Wir ermitteln N' mit der Kettenregel:

$$N'(x) = e^{x^2} \cdot 2 \cdot x \neq 4 \cdot x \cdot e^{x^2} \quad \text{(z.B. an der Stelle } x = 1\text{)}$$

2) Wir passen den konstanten Faktor an, um eine Stammfunktion H von h zu ermitteln:

$$H(x) = 2 \cdot e^{x^2} \implies H'(x) = 2 \cdot e^{x^2} \cdot (2 \cdot x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2} = h(x) \checkmark$$

Umkehrung der Kettenregel

Wenn eine Funktion h die Form

$$h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot a \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

hat, dann können wir durch Umkehrung der Kettenregel eine Stammfunktion H ermitteln:

$$H(x) = f(g(x)) \cdot a$$

Integration durch Substitution

Die Funktion h mit $h(x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$ hat diese Form $h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot a$, weil die Ableitung der inneren Funktion x^2 bis auf einen konstanten Faktor mit $4 \cdot x$ übereinstimmt.
In so einem Fall hat sich zur systematischen Ermittlung einer Stammfunktion H von h im Laufe der Geschichte die folgende Schreibweise (**Integration durch Substitution**) eingebürgert:

i) Ersetze („substituiere") die innere Funktion durch eine Funktion u: $u(x) = x^2$

ii) Ermittle die Ableitung u' in der Differential-Schreibweise $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, und forme nach $\mathrm{d}x$ um:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot x \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2 \cdot x}$$

iii) Ersetze im unbestimmten Integral $\int h(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe von **ii)** den Ausdruck $\mathrm{d}x$, und kürze:

$$H(x) = \int 4 \cdot x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int 4 \cdot \cancel{x} \cdot e^u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2 \cdot \cancel{x}} = 2 \cdot \int e^u\,\mathrm{d}u$$

iv) Integriere nach u, und ersetze beim Ergebnis wieder $u(x) = x^2$:

$$H(x) = 2 \cdot \int e^u\,\mathrm{d}u = 2 \cdot e^u + c = 2 \cdot e^{x^2} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Wir kontrollieren das Ergebnis mit der Kettenregel: $H'(x) = 2 \cdot e^{x^2} \cdot (2 \cdot x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2} = h(x)$ ✓

Integration durch Substitution

Ermittle das unbestimmte Integral durch eine Substitution.

a) $\int 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3\,\mathrm{d}x$ $\qquad u = x^4 + 7 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4 \cdot x^3 \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{4 \cdot x^3}$

$$\implies \int 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3\,\mathrm{d}x = \int 2 \cdot \cos(u) \cdot \cancel{x^3} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{4 \cdot \cancel{x^3}} = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) + c = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^4 + 7) + c$$

Probe: $\left[\frac{1}{2} \cdot \sin(x^4 + 7) + c\right]' = \frac{1}{2} \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot 4 \cdot x^3 = 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3$ ✓

b) $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ $\qquad u = \cos(x) \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin(x) \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-\sin(x)}$

$$\implies \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cancel{\sin(x)}}{u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{-\cancel{\sin(x)}} = -\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = -\ln(|u|) + c = -\ln(|\cos(x)|) + c$$

Probe: $[-\ln(|\cos(x)|) + c]' = -\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ✓

c) $\int \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad u = \ln(x) \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \implies \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}u$

$$\implies \int \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(u)}{5 \cdot \cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot \mathrm{d}u = -\frac{1}{5} \cdot \cos(u) + c = -\frac{1}{5} \cdot \cos(\ln(x)) + c$$

Probe: $\left[-\frac{1}{5} \cdot \cos(\ln(x)) + c\right]' = -\frac{1}{5} \cdot (-\sin(\ln(x))) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x}$ ✓

Zwei Wege zum Ziel

Eine Stammfunktion H von $h(x) = 3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ *kann* man mit partieller Integration ermitteln.
Da die Ableitung von $\sin(x)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $3 \cdot \cos(x)$ übereinstimmt,
ist auch die Substitution $u(x) = \sin(x)$ zielführend.
Ermittle jene Stammfunktion H von h, die $H(0) = 5$ erfüllt.

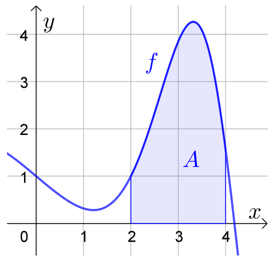
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\cos(x)}$$

$$\implies H(x) = \int 3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int 3 \cdot u \cdot \cancel{\cos(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\cancel{\cos(x)}} = \frac{3}{2} \cdot u^2 + c = \frac{3}{2} \cdot \sin^2(x) + c$$

$$H(0) = 5 \implies c = 5 \implies H(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin^2(x) + 5$$

Bestimmtes Integral

Für die rechts dargestellte Funktion f gilt: $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) + 1$



Entscheide mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,
ob für den dargestellten Flächeninhalt $A < 6$, $A = 6$ oder $A > 6$ gilt.

Wir ermitteln das unbestimmte Integral von f mit einer Substitution:

$$u = \frac{x^2}{4} - 1 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{2} \implies \mathrm{d}x = \frac{2 \cdot \mathrm{d}u}{x}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cancel{x} \cdot \sin(u) \cdot \frac{2 \cdot \mathrm{d}u}{\cancel{x}} + \int 1\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{-2 \cdot \cos\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) + x}_{F(x)} + c$$

$$A = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = -2 \cdot \cos\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) + x\,\Big|_2^4 = 5{,}979... - 0 = 5{,}979... < 6$$

Integrationsgrenzen

Philipp berechnet das bestimmte Integral $\int_2^4 e^{2 \cdot x - 5}\,\mathrm{d}x$ mit einer Substitution:

$$u = 2 \cdot x - 5 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$$

$$\implies \int_2^4 e^{2 \cdot x - 5}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} e^u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^u\,\Big|_{-1}^{3} = \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot x - 5}\,\Big|_2^4 = 10{,}042... - 0{,}183... = 9{,}858...$$

Trage richtige Integrationsgrenzen in die Kästchen ein.

Hinweis: Verfolge die Rechnung von rechts nach links zurück.