Kettenregel

Die Funktion h ist die Verkettung zweier differenzierbaren Funktionen f und g:

$$\boldsymbol{h(x) = f(g(x))}$$

Die Ableitungsfunktion von h können wir systematisch mit der **Kettenregel** ermitteln:

$$\boldsymbol{h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Ermittle eine Gleichung der Ableitungsfunktion h' von $h(x) = \cos(x^2)$.

$h'(x) =$

Lineare innere Funktion

Die innere Funktion der verketteten Funktion h ist linear.
Ermittle die Gleichung der Ableitungsfunktion h' mit der Kettenregel.
Ermittle die Gleichung einer Stammfunktion H durch Umkehrung der Kettenregel.

a) $h(x) = e^{4 \cdot x - 2}$

$h'(x) =$

$H(x) =$

b) $h(x) = \sin(3 \cdot x + 1)$

$h'(x) =$

$H(x) =$

Stammfunktionen verketteter Funktionen

Es gibt *keine* Rechenregel, um im Allgemeinen aus einer verketteten Funktion h systematisch eine Funktionsgleichung einer Stammfunktion H zu ermitteln.

a) Für die Funktion h mit $h(x) = e^{x^2}$ lässt sich mit den elementaren Funktionen *keine* Stammfunktion H ermitteln.

b) Für die Funktion h mit $h(x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$ lässt sich mit den elementaren Funktionen eine Stammfunktion H ermitteln. Die Funktion h ist nämlich das Ergebnis der Anwendung einer Kettenregel.

1) Begründe, warum die Funktion N mit $N(x) = e^{x^2}$ *keine* Stammfunktion von h ist.

2) Passe die Funktionsgleichung von N an, um eine Stammfunktion H von h zu ermitteln.

Umkehrung der Kettenregel

Wenn eine Funktion h die Form

$$h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot a \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

hat, dann können wir durch Umkehrung der Kettenregel eine Stammfunktion H ermitteln:

$$H(x) = f(g(x)) \cdot a$$

Integration durch Substitution

Die Funktion h mit $h(x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$ hat diese Form $h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot a$, weil die Ableitung der inneren Funktion x^2 bis auf einen konstanten Faktor mit $4 \cdot x$ übereinstimmt.
In so einem Fall hat sich zur systematischen Ermittlung einer Stammfunktion H von h im Laufe der Geschichte die folgende Schreibweise (**Integration durch Substitution**) eingebürgert:

i) Ersetze („substituiere“) die innere Funktion durch eine Funktion u: $u(x) = x^2$

ii) Ermittle die Ableitung u' in der Differential-Schreibweise $u'(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, und forme nach $\mathrm{d}x$ um:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot x \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2 \cdot x}$$

iii) Ersetze im unbestimmten Integral $\int h(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe von **ii)** den Ausdruck $\mathrm{d}x$, und kürze:

$$H(x) = \int 4 \cdot x \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int 4 \cdot \cancel{x} \cdot e^u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2 \cdot \cancel{x}} = 2 \cdot \int e^u\,\mathrm{d}u$$

iv) Integriere nach u, und ersetze beim Ergebnis wieder $u(x) = x^2$:

$$H(x) = 2 \cdot \int e^u\,\mathrm{d}u = 2 \cdot e^u + c = 2 \cdot e^{x^2} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Wir kontrollieren das Ergebnis mit der Kettenregel: $H'(x) = 2 \cdot e^{x^2} \cdot (2 \cdot x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2} = h(x)$ ✓

Integration durch Substitution

Ermittle das unbestimmte Integral durch eine Substitution.

a) $\int 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3\,\mathrm{d}x \qquad u = \boxed{} \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \boxed{} \implies \mathrm{d}x = \boxed{}$

$\implies \int 2 \cdot \cos(x^4 + 7) \cdot x^3\,\mathrm{d}x =$

b) $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \qquad u = \boxed{} \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \boxed{} \implies \mathrm{d}x = \boxed{}$

$\implies \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x =$

c) $\int \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x}\,\mathrm{d}x \qquad u = \boxed{} \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \boxed{} \implies \mathrm{d}x = \boxed{}$

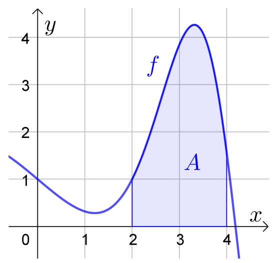
$\implies \int \frac{\sin(\ln(x))}{5 \cdot x}\,\mathrm{d}x =$

Zwei Wege zum Ziel

Eine Stammfunktion H von $h(x) = 3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ *kann* man mit partieller Integration ermitteln.
Da die Ableitung von $\sin(x)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $3 \cdot \cos(x)$ übereinstimmt,
ist auch die Substitution $u(x) = \sin(x)$ zielführend.
Ermittle jene Stammfunktion H von h, die $H(0) = 5$ erfüllt.

Bestimmtes Integral

Für die rechts dargestellte Funktion f gilt: $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{x^2}{4} - 1\right) + 1$



Entscheide mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,
ob für den dargestellten Flächeninhalt $A < 6$, $A = 6$ oder $A > 6$ gilt.

Integrationsgrenzen

Philipp berechnet das bestimmte Integral $\displaystyle\int_2^4 e^{2\cdot x-5}\,\mathrm{d}x$ mit einer Substitution:

$$u = 2 \cdot x - 5 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$$

$$\implies \int_2^4 e^{2\cdot x-5}\,\mathrm{d}x = \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} e^u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^u \,\Big|_{\boxed{}}^{\boxed{}} = \frac{1}{2} \cdot e^{2\cdot x-5}\,\Big|_2^4 = 10{,}042... - 0{,}183... = 9{,}858...$$

Trage richtige Integrationsgrenzen in die Kästchen ein.

Hinweis: Verfolge die Rechnung von rechts nach links zurück.