Erweiterungen der Zahlenbereiche

1) Die Gleichung $x + 4 = 0$ hat in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *keine* Lösung.

Wir führen als Lösung dieser Gleichung die „neue“ Zahl -4 ein.

Wir erweitern $\mathbb{N}$ zum Zahlenbereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

2) Die Gleichung $3 \cdot x = 2$ hat in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ *keine* Lösung.
Wir führen als Lösung die „neue“ Zahl $\frac{2}{3}$ ein.
Wir erweitern $\mathbb{Z}$ zum Zahlenbereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$. „Bruchzahlen“

3) Die Gleichung $x^2 = 2$ hat in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ *keine* Lösung.
Wir führen als Lösung die „neue“ Zahl $\sqrt{2}$ ein.
Die Gleichung $x^2 = 2$ hat dann die beiden Lösungen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

Wir erweitern $\mathbb{Q}$ um die irrationalen Zahlen zum Zahlenbereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Als Dezimalzahlen haben irrationale Zahlen unendlich viele Nachkommastellen und sind *nicht* periodisch.

Zum Beispiel: $\sqrt{2} = 1{,}414\,21\ldots$ oder $\pi = 3{,}141\,59\ldots$. Die reellen Zahlen sind genau alle Zahlen auf der Zahlengerade.

4) Erkläre, warum die Gleichung $x^2 = -1$ in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ *keine* Lösung hat.

$x \cdot x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

mal	0	+	−
0	0	0	0
+	0	+	−
−	0	−	+

Wir brauchen also eine „neue“ Zahl.

Imaginäre Einheit

Die **imaginäre Einheit i** ist eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Es gilt also: $\boldsymbol{i^2 = i \cdot i = -1}$

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat dann die beiden Lösungen i und $-i$.

Die imaginäre Einheit i ist *keine* reelle Zahl. Sie kann also *nicht* auf der Zahlengerade dargestellt werden.
Um sich i vorstellen zu können, erweitern wir die Zahlengerade zur Zahlenebene. Der Zahl i entspricht dann der Punkt $(0 \mid 1)$.

Komplexe Zahlen

Jede Zahl z der Form $\boldsymbol{z = a + b \cdot i}$ mit reellen Zahlen a und b heißt **komplexe Zahl**.
Wir nennen $\boldsymbol{a}$ den **Realteil** von z und schreiben auch $a = \mathrm{Re}(z)$.
Wir nennen $\boldsymbol{b}$ den **Imaginärteil** von z und schreiben auch $b = \mathrm{Im}(z)$.
Die Menge der **komplexen Zahlen** wird mit $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ abgekürzt. „Complex Numbers“

Komplexe Zahlen kommen zum Beispiel in der Elektrotechnik praktisch zum Einsatz.
Zur Unterscheidung von der elektrischen Stromstärke i wird die imaginäre Einheit deshalb auch oft mit j abgekürzt.

Zahlenebene

Um negative Zahlen grafisch darzustellen, haben wir den Zahlenstrahl zur Zahlengerade erweitert.
Um komplexe Zahlen grafisch darzustellen, erweitern wir die Zahlengerade zur **Zahlenebene**:

Jeder komplexen Zahl entspricht dann genau ein Punkt in der Zahlenebene und umgekehrt:

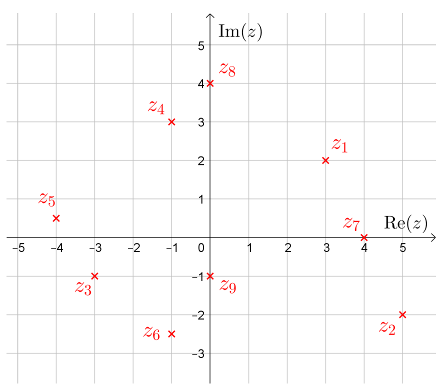
Komplexe Zahl $a + b \cdot i \quad \longleftrightarrow \quad$ Punkt $(a \mid b)$

Zeichne die folgenden komplexen Zahlen rechts als Punkte ein.

1) $z_1 = 3 + 2 \cdot i$ **4)** $z_4 = -1 + 3 \cdot i$ **7)** $z_7 = 4$

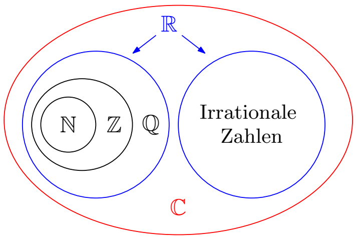
2) $z_2 = 5 - 2 \cdot i$ **5)** $z_5 = -4 + 0{,}5 \cdot i$ **8)** $z_8 = 4 \cdot i$

3) $z_3 = -3 - i$ **6)** $z_6 = -1 - 2{,}5 \cdot i$ **9)** $z_9 = -i$



Zahlenbereiche

Die Erweiterungen der Zahlenbereiche sind im folgenden Mengendiagramm veranschaulicht:



In Mengenschreibweise gilt:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

„Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.“
„Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.“
„Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.“
„Jede reelle Zahl ist auch eine komplexe Zahl.“

Kreuze jeweils genau jene Zahlenbereiche an, in denen die Zahl enthalten ist:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
42	✓	✓	✓	✓	✓
-3		✓	✓	✓	✓
$3{,}14$			✓	✓	✓
$-4{,}\dot{2}$			✓	✓	✓
$\sqrt{3}$				✓	✓
$\sqrt{9}$	✓	✓	✓	✓	✓
$8/3$			✓	✓	✓
$-30/6$		✓	✓	✓	✓
$4-2\cdot i$					✓
$-3{,}7\overline{25} = -3{,}725\,252\,5...$			✓	✓	✓
$\pi = 3{,}141\,592\,653...$				✓	✓
$-2\cdot i$					✓

Rechenregeln

Wir *rechnen* mit komplexen *Zahlen* genauso wie mit reellen Zahlen und Variablen.
Die folgenden Rechenregeln gelten für alle komplexen Zahlen x, y und z:

i) $x+y=y+x$ und $x\cdot y = y\cdot x$ (Kommutativgesetze)

ii) $x+(y+z)=(x+y)+z$ und $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ (Assoziativgesetze)

iii) $x\cdot(y+z)=x\cdot y + x\cdot z$ (Distributivgesetz)

Zusätzlich beachten wir, dass $\boldsymbol{i^2=-1}$ für die imaginäre Einheit i gilt.

Grundrechnungsarten

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4+2\cdot i$ und $z_2 = 3-5\cdot i$.

a) Stelle z_1+z_2 in der Form $a+b\cdot i$ dar.

$$z_1+z_2 = (4+2\cdot i)+(3-5\cdot i) = 7-3\cdot i$$

b) Stelle z_1-z_2 in der Form $a+b\cdot i$ dar.

$$z_1-z_2 = (4+2\cdot i)-(3-5\cdot i) = 1+7\cdot i$$

c) Stelle $z_1\cdot z_2$ in der Form $a+b\cdot i$ dar.

$$z_1\cdot z_2 = (4+2\cdot i)\cdot(3-5\cdot i) = 12-20\cdot i+6\cdot i-10\cdot \underbrace{i^2}_{=-1} = 22-14\cdot i$$

d) Stelle $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a+b\cdot i$ dar.

Hinweis: Um $\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}$ zu vereinfachen, multipliziere mit $\overbrace{\frac{c-d\cdot i}{c-d\cdot i}}^{=1}$.
Die Zahl $c-d\cdot i$ heißt **konjugiert komplexe Zahl** von $c+d\cdot i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+2\cdot i}{3-5\cdot i} = \frac{(4+2\cdot i)\cdot(3+5\cdot i)}{(3-5\cdot i)\cdot(3+5\cdot i)} = \frac{12+20\cdot i+6\cdot i+10\cdot i^2}{9+15\cdot i-15\cdot i-25\cdot i^2} =$$

$$= \frac{2+26\cdot i}{34} = \frac{2}{34}+\frac{26}{34}\cdot i = \frac{1}{17}+\frac{13}{17}\cdot i$$

Sinnlose Wurzelschreibweisen

In manchen Büchern wird die Schreibweise $\sqrt{-1} = i$ verwendet.
Mit dieser Schreibweise sind dann aber die Rechenregeln für Wurzeln nicht mehr alle gültig.
Für alle *nicht-negativen* reellen Zahlen a und b gilt nämlich: **i)** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ **ii)** $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
Erweitert man diese Rechenregeln auf *negative* Zahlen a, folgt daraus der Widerspruch $-1 = 1$:

$$-1 \overset{\textbf{i)}}{=} \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \overset{\textbf{ii)}}{=} \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Auch die Schreibweise $\sqrt{-1} = \pm\, i$ ist problematisch:
Ansonsten müsste konsequent auch $\sqrt{4} = \pm\, 2$ gelten, aber $\sqrt{4} = 2$ ist *eindeutig* definiert.

Wir vermeiden daher bewusst Schreibweisen wie $\sqrt{-1} = i$ oder $\sqrt{-1} = \pm\, i$.

$\pm\sqrt{-4}$

Berechne: $(2 \cdot i) \cdot (2 \cdot i) = 4 \cdot i^2 = -4$ $\qquad (-2 \cdot i) \cdot (-2 \cdot i) = 4 \cdot i^2 = -4$

Die Gleichung $z^2 = -4$ hat über der Grundmenge $\mathbb{C}$ zwei Lösungen,

nämlich $z_1 = 2 \cdot i$ und $z_2 = -2 \cdot i$. Die beiden Lösungen unterscheiden sich also nur um das Vorzeichen.

Es gilt also: $z^2 = -4 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \pm\, 2 \cdot i$

Allgemein vereinbaren wir, dass $\boldsymbol{\pm\sqrt{-a} = \pm\, i \cdot \sqrt{a}}$ für alle $a \geq 0$ gilt.

Mit dieser Vereinbarung können wir die Lösungen solcher Gleichungen berechnen:

$$z^2 = -4 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{-4} = \pm\, i \cdot \sqrt{4} = \pm\, 2 \cdot i$$

Quadratische Gleichung

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 4 \cdot z + 13 = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{C}$.
Zeichne die beiden Lösungen in der Zahlenebene rechts unten ein.

Kleine Lösungsformel: $p = 4$, $q = 13$

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3 \cdot i$$

$$\Longrightarrow \quad z_1 = -2 + 3 \cdot i, \ z_2 = -2 - 3 \cdot i$$

Große Lösungsformel: $a = 1$, $b = 4$, $c = 13$

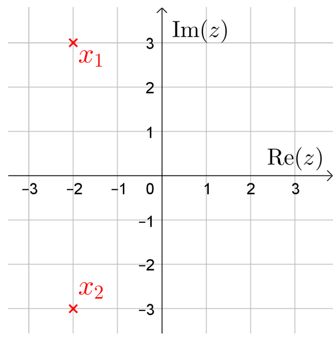
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6 \cdot i}{2} = -2 \pm 3 \cdot i$$

$$\Longrightarrow \quad z_1 = -2 + 3 \cdot i, \ z_2 = -2 - 3 \cdot i$$

Quadratische Ergänzung:

$$(z+2)^2 - 2^2 + 13 = 0 \iff (z+2)^2 = -9 \iff$$
$$\iff z + 2 = \pm\, 3 \cdot i \iff z = -2 \pm 3 \cdot i$$

$$\Longrightarrow \quad z_1 = -2 + 3 \cdot i, \ z_2 = -2 - 3 \cdot i$$



Allgemein gilt für jede Polynomgleichung mit *reellen* Koeffizienten:
Wenn $a + b \cdot i$ eine Lösung der Polynomgleichung ist, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl $a - b \cdot i$ eine Lösung dieser Gleichung.

Kubische Gleichung

Berechne die Lösungen der Polynomgleichung $2 \cdot z^3 - 20 \cdot z^2 + 58 \cdot z = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{C}$.
Zeichne die drei Lösungen in der Zahlenebene rechts unten ein.

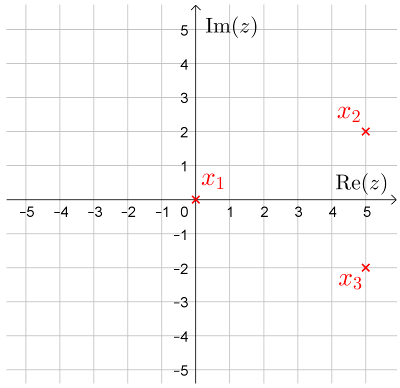
$$2 \cdot z^3 - 20 \cdot z^2 + 58 \cdot z = 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$z \cdot (2 \cdot z^2 - 20 \cdot z + 58) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$z = 0 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot z^2 - 20 \cdot z + 58 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad z_1 = 0$$

Große Lösungsformel: $a = 2,\ b = -20,\ c = 58$

$$\Longrightarrow \quad z_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 464}}{4} = \frac{20 \pm \sqrt{-64}}{4} = \frac{20 \pm 8 \cdot i}{4} = 5 \pm 2 \cdot i$$

Die 3 Lösungen sind also $z_1 = 0$, $z_2 = 5 + 2 \cdot i$ und $z_3 = 5 - 2 \cdot i$.

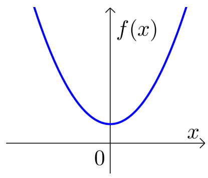


Fundamentalsatz der Algebra

Jede Polynomfunktion f vom Grad n hat *genau* n Nullstellen, wenn man Folgendes beachtet:

1) Nullstellen können auch nicht-reelle Zahlen sein. Zum Beispiel:

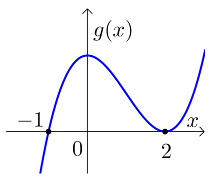
$$f(x) = x^2 + 1$$



Die komplexen Zahlen $x_1 = i$ und $x_2 = -i$ sind
die Nullstellen dieser Polynomfunktion f vom Grad 2.

2) Nullstellen können auch mehrfach auftreten. Zum Beispiel:

$$g(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 4$$



Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass $x_1 = -1$ und $x_2 = x_3 = 2$
die Nullstellen dieser Polynomfunktion g vom Grad 3 sind.
Dabei ist die Zahl -1 eine einfache Nullstelle und die Zahl 2 eine doppelte Nullstelle.

Allgemein hat jede Polynomfunktion vom Grad n

$$h(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \qquad \text{mit } a_1,\ a_2,\ \dots a_n \in \mathbb{C},\ n \geq 1,\ a_n \neq 0$$

genau n Nullstellen $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \in \mathbb{C}$, wenn man mehrfache Nullstellen entsprechend oft anschreibt.
Die Funktion h hat dann die folgende Linearfaktorform:

$$h(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ \dots \ \cdot (x - x_n)$$

Mehr zum Lösen spezieller Polynomgleichungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$ findest du am Arbeitsblatt – Polynomfunktionen.
Mehr zum Lösen spezieller Polynomgleichungen über der Grundmenge $\mathbb{C}$ findest du am Arbeitsblatt – Polarform.