

Erweiterungen der Zahlenbereiche



1) Die Gleichung  $x + 4 = 0$  hat in den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  keine Lösung.

Wir führen als Lösung dieser Gleichung die „neue“ Zahl  $-4$  ein.

Wir erweitern  $\mathbb{N}$  zum Zahlenbereich der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

2) Die Gleichung  $3 \cdot x = 2$  hat in den ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  keine Lösung.

Wir führen als Lösung die „neue“ Zahl  $\frac{2}{3}$  ein.

Wir erweitern  $\mathbb{Z}$  zum Zahlenbereich der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ . „Bruchzahlen“

3) Die Gleichung  $x^2 = 2$  hat in den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  keine Lösung.

Wir führen als Lösung die „neue“ Zahl  $\sqrt{2}$  ein.

Die Gleichung  $x^2 = 2$  hat dann die beiden Lösungen  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$ .

Wir erweitern  $\mathbb{Q}$  um die irrationalen Zahlen zum Zahlenbereich der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ .

Als Dezimalzahlen haben irrationale Zahlen unendlich viele Nachkommastellen und sind nicht periodisch.

Zum Beispiel:  $\sqrt{2} = 1,41421\dots$  oder  $\pi = 3,14159\dots$  Die reellen Zahlen sind genau alle Zahlen auf der Zahlengerade.

4) Erkläre, warum die Gleichung  $x^2 = -1$  in den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  keine Lösung hat.

$x \cdot x \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

mal	0	+	-
0	0	0	0
+	0	+	-
-	0	-	+

Wir brauchen also eine „neue“ Zahl.

Imaginäre Einheit



Die imaginäre Einheit  $i$  ist eine Lösung der Gleichung  $x^2 = -1$ . Es gilt also:  $i^2 = i \cdot i = -1$

Die Gleichung  $x^2 = -1$  hat dann die beiden Lösungen  $i$  und  $-i$ .

Die imaginäre Einheit  $i$  ist keine reelle Zahl. Sie kann also nicht auf der Zahlengerade dargestellt werden.

Um sich  $i$  vorstellen zu können, erweitern wir die Zahlengerade zur Zahlenebene. Der Zahl  $i$  entspricht dann der Punkt  $(0 \mid 1)$ .

Komplexe Zahlen



Jede Zahl  $z$  der Form  $z = a + b \cdot i$  mit reellen Zahlen  $a$  und  $b$  heißt komplexe Zahl.

Wir nennen  $a$  den Realteil von  $z$  und schreiben auch  $a = \text{Re}(z)$ .

Wir nennen  $b$  den Imaginärteil von  $z$  und schreiben auch  $b = \text{Im}(z)$ .

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit  $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  abgekürzt. „Complex Numbers“

Komplexe Zahlen kommen zum Beispiel in der Elektrotechnik praktisch zum Einsatz.

Zur Unterscheidung von der elektrischen Stromstärke  $i$  wird die imaginäre Einheit deshalb auch oft mit  $j$  abgekürzt.

Zahlenebene



Um negative Zahlen grafisch darzustellen, haben wir den Zahlenstrahl zur Zahlengerade erweitert.

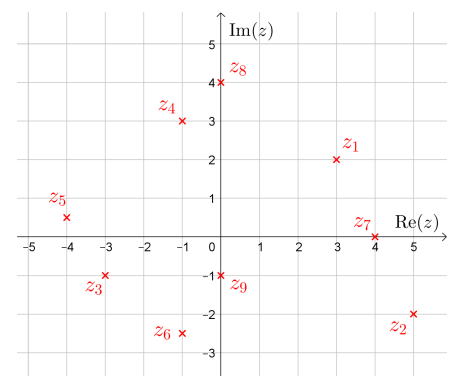
Um komplexe Zahlen grafisch darzustellen, erweitern wir die Zahlengerade zur Zahlenebene:

Jeder komplexen Zahl entspricht dann genau ein Punkt in der Zahlenebene und umgekehrt:

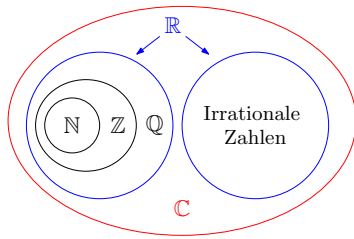
$$\text{Komplexe Zahl } a + b \cdot i \quad \longleftrightarrow \quad \text{Punkt } (a \mid b)$$

Zeichne die folgenden komplexen Zahlen rechts als Punkte ein.

- 1)  $z_1 = 3 + 2 \cdot i$       4)  $z_4 = -1 + 3 \cdot i$       7)  $z_7 = 4$
- 2)  $z_2 = 5 - 2 \cdot i$       5)  $z_5 = -4 + 0,5 \cdot i$       8)  $z_8 = 4 \cdot i$
- 3)  $z_3 = -3 - i$       6)  $z_6 = -1 - 2,5 \cdot i$       9)  $z_9 = -i$



Die Erweiterungen der Zahlenbereiche sind im folgenden Mengendiagramm veranschaulicht:



In Mengenschreibweise gilt:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

- „Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.“
- „Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.“
- „Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.“
- „Jede reelle Zahl ist auch eine komplexe Zahl.“

Kreuze jeweils genau jene Zahlenbereiche an, in denen die Zahl enthalten ist:

	N	Z	Q	R	C
42	✓	✓	✓	✓	✓
-3		✓	✓	✓	✓
3,14			✓	✓	✓
$-4, \dot{2}$			✓	✓	✓
$\sqrt{3}$				✓	✓
$\sqrt{9}$	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{8}{3}$			✓	✓	✓
$-\frac{30}{6}$		✓	✓	✓	✓
$4 - 2 \cdot i$					✓
$-3,7\overline{25} = -3,725\ 252\ 5\dots$			✓	✓	✓
$\pi = 3,141\ 592\ 653\dots$				✓	✓
$-2 \cdot i$					✓

Wir *rechnen* mit komplexen Zahlen **genauso** wie mit reellen Zahlen und Variablen. Die folgenden Rechenregeln gelten für alle komplexen Zahlen  $x, y$  und  $z$ :

- i)  $x + y = y + x$  und  $x \cdot y = y \cdot x$  (Kommutativgesetze)
- ii)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  und  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  (Assoziativgesetze)
- iii)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  (Distributivgesetz)

Zusätzlich beachten wir, dass  $i^2 = -1$  für die imaginäre Einheit  $i$  gilt.

Gegeben sind die komplexen Zahlen  $z_1 = 4 + 2 \cdot i$  und  $z_2 = 3 - 5 \cdot i$ .

a) Stelle  $z_1 + z_2$  in der Form  $a + b \cdot i$  dar.

$$z_1 + z_2 = (4 + 2 \cdot i) + (3 - 5 \cdot i) = 7 - 3 \cdot i$$

b) Stelle  $z_1 - z_2$  in der Form  $a + b \cdot i$  dar.

$$z_1 - z_2 = (4 + 2 \cdot i) - (3 - 5 \cdot i) = 1 + 7 \cdot i$$

c) Stelle  $z_1 \cdot z_2$  in der Form  $a + b \cdot i$  dar.

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 2 \cdot i) \cdot (3 - 5 \cdot i) = 12 - 20 \cdot i + 6 \cdot i - 10 \cdot \underbrace{i^2}_{=-1} = 22 - 14 \cdot i$$

d) Stelle  $\frac{z_1}{z_2}$  in der Form  $a + b \cdot i$  dar.

Hinweis: Um  $\frac{a+bi}{c+di}$  zu vereinfachen, multipliziere mit  $\frac{c-di}{c-di}$ .  
Die Zahl  $c - d \cdot i$  heißt **konjugiert komplexe Zahl** von  $c + d \cdot i$ .

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4 + 2 \cdot i}{3 - 5 \cdot i} = \frac{(4 + 2 \cdot i) \cdot (3 + 5 \cdot i)}{(3 - 5 \cdot i) \cdot (3 + 5 \cdot i)} = \frac{12 + 20 \cdot i + 6 \cdot i + 10 \cdot i^2}{9 + 15 \cdot i - 15 \cdot i - 25 \cdot i^2} = \\ &= \frac{2 + 26 \cdot i}{34} = \frac{2}{34} + \frac{26}{34} \cdot i = \frac{1}{17} + \frac{13}{17} \cdot i \end{aligned}$$



In manchen Büchern wird die Schreibweise  $\sqrt{-1} = i$  verwendet.

Mit dieser Schreibweise sind dann aber die Rechenregeln für Wurzeln nicht mehr alle gültig.

Für alle *nicht-negativen* reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt nämlich: **i)**  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$  **ii)**  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Erweitert man diese Rechenregeln auf *negative* Zahlen  $a$ , folgt daraus der Widerspruch  $-1 = 1$ :

$$-1 \stackrel{\text{i)}}{=} \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \stackrel{\text{ii)}}{=} \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Auch die Schreibweise  $\sqrt{-1} = \pm i$  ist problematisch:

Ansonsten müsste konsequent auch  $\sqrt{4} = \pm 2$  gelten, aber  $\sqrt{4} = 2$  ist *eindeutig* definiert.

Wir vermeiden daher bewusst Schreibweisen wie  $\sqrt{-1} = i$  oder  $\sqrt{-1} = \pm i$ .

$\pm\sqrt{-4}$



Berechne:  $(2 \cdot i) \cdot (2 \cdot i) = 4 \cdot i^2 = -4$        $(-2 \cdot i) \cdot (-2 \cdot i) = 4 \cdot i^2 = -4$

Die Gleichung  $z^2 = -4$  hat über der Grundmenge  $\mathbb{C}$  zwei Lösungen,

nämlich  $z_1 = 2 \cdot i$  und  $z_2 = -2 \cdot i$ .

Die beiden Lösungen unterscheiden sich also nur um das Vorzeichen.

Es gilt also:  $z^2 = -4 \iff z = \pm 2 \cdot i$

Allgemein vereinbaren wir, dass  $\pm\sqrt{-a} = \pm i \cdot \sqrt{a}$  für alle  $a \geq 0$  gilt.

Mit dieser Vereinbarung können wir die Lösungen solcher Gleichungen berechnen:

$$z^2 = -4 \iff z = \pm\sqrt{-4} = \pm i \cdot \sqrt{4} = \pm 2 \cdot i$$



Berechne die Lösungen der **quadratischen Gleichung**  $z^2 + 4 \cdot z + 13 = 0$  über der Grundmenge  $\mathbb{C}$ .  
Zeichne die beiden Lösungen in der Zahlenebene rechts unten ein.

**Kleine Lösungsformel:**  $p = 4, q = 13$

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3 \cdot i$$

$$\implies z_1 = -2 + 3 \cdot i, z_2 = -2 - 3 \cdot i$$

**Große Lösungsformel:**  $a = 1, b = 4, c = 13$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6 \cdot i}{2} = -2 \pm 3 \cdot i$$

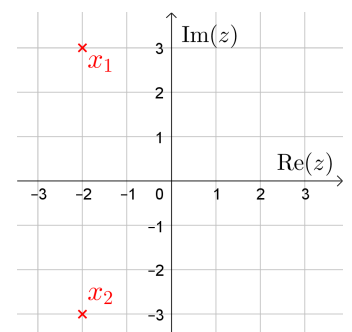
$$\implies z_1 = -2 + 3 \cdot i, z_2 = -2 - 3 \cdot i$$

**Quadratische Ergänzung:**

$$(z + 2)^2 - 2^2 + 13 = 0 \iff (z + 2)^2 = -9 \iff$$

$$\iff z + 2 = \pm 3 \cdot i \iff z = -2 \pm 3 \cdot i$$

$$\implies z_1 = -2 + 3 \cdot i, z_2 = -2 - 3 \cdot i$$



Allgemein gilt für jede **Polynomgleichung** mit *reellen* Koeffizienten:

Wenn  $a + b \cdot i$  eine Lösung der Polynomgleichung ist, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl  $a - b \cdot i$  eine Lösung dieser Gleichung.

Berechne die Lösungen der Polynomgleichung  $2 \cdot z^3 - 20 \cdot z^2 + 58 \cdot z = 0$  über der Grundmenge  $\mathbb{C}$ .  
Zeichne die drei Lösungen in der Zahlenebene rechts unten ein.

$$2 \cdot z^3 - 20 \cdot z^2 + 58 \cdot z = 0 \iff$$

$$z \cdot (2 \cdot z^2 - 20 \cdot z + 58) = 0 \iff$$

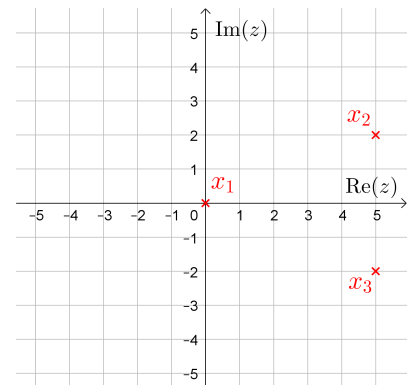
$$z = 0 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot z^2 - 20 \cdot z + 58 = 0$$

$$\implies z_1 = 0$$

Große Lösungsformel:  $a = 2$ ,  $b = -20$ ,  $c = 58$

$$\implies z_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 464}}{4} = \frac{20 \pm \sqrt{-64}}{4} = \frac{20 \pm 8 \cdot i}{4} = 5 \pm 2 \cdot i$$

Die 3 Lösungen sind also  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 5 + 2 \cdot i$  und  $z_3 = 5 - 2 \cdot i$ .

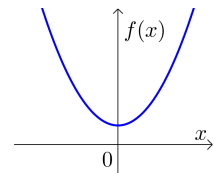


Jede **Polynomfunktion**  $f$  vom Grad  $n$  hat *genau*  $n$  Nullstellen, wenn man Folgendes beachtet:

1) Nullstellen können auch nicht-reelle Zahlen sein. Zum Beispiel:

$$f(x) = x^2 + 1$$

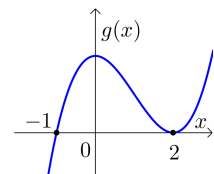
Die komplexen Zahlen  $x_1 = i$  und  $x_2 = -i$  sind die Nullstellen dieser Polynomfunktion  $f$  vom Grad 2.



2) Nullstellen können auch mehrfach auftreten. Zum Beispiel:

$$g(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 4$$

Aus dem Produkt-Null-Satz folgt, dass  $x_1 = -1$  und  $x_2 = x_3 = 2$  die Nullstellen dieser Polynomfunktion  $g$  vom Grad 3 sind.



Dabei ist die Zahl  $-1$  eine einfache Nullstelle und die Zahl  $2$  eine doppelte Nullstelle.

Allgemein hat jede Polynomfunktion vom Grad  $n$

$$h(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad \text{mit } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \geq 1, a_n \neq 0$$

genau  $n$  Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ , wenn man mehrfache Nullstellen entsprechend oft anschreibt.

Die Funktion  $h$  hat dann die folgende Linearfaktorform:

$$h(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Mehr zum Lösen spezieller Polynomgleichungen über der Grundmenge  $\mathbb{R}$  findest du am [Arbeitsblatt – Polynomfunktionen](#).

Mehr zum Lösen spezieller Polynomgleichungen über der Grundmenge  $\mathbb{C}$  findest du am [Arbeitsblatt – Polarform](#).

