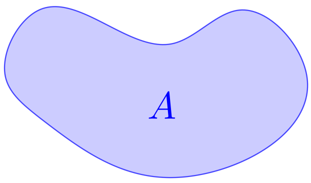
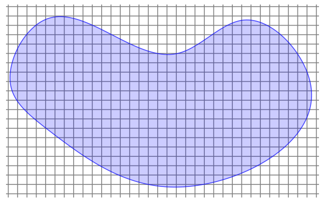
Kurvige Figuren und ihre Fläche



Wir interessieren uns für den Flächeninhalt A der links dargestellten Figur.

Die Formelsammlung hilft nicht.

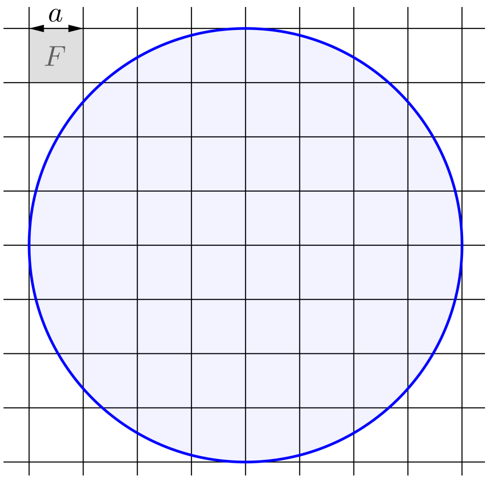
Rechts haben wir ein Raster auf die Figur gelegt. Wie bringt uns das weiter?



Untersumme/Obersumme

Wir beginnen mit einer einfacheren Figur, nämlich dem unten dargestellten Kreis.
Miss die Seitenlänge a eines einzelnen Quadrats im quadratischen Raster ab: $a = \boxed{}$ mm

Der Flächeninhalt F eines einzelnen Quadrats im Raster ist also $F = \boxed{}$ mm^2.



Jene Quadrate, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind, bilden eine Figur mit dem Flächeninhalt U:

$$U = \boxed{} \cdot F = \boxed{} \text{ mm}^2$$

U steht dabei für **Untersumme**.

Jene Quadrate, die mit der Kreisfläche zumindest teilweise überlappen, bilden eine Figur mit dem Flächeninhalt O:

$$O = \boxed{} \cdot F = \boxed{} \text{ mm}^2$$

O steht dabei für **Obersumme**.

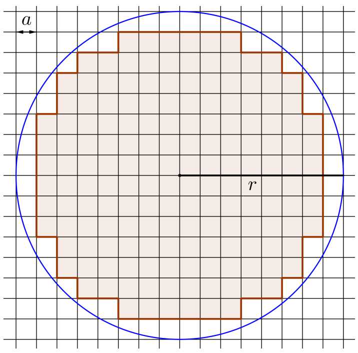
Der Flächeninhalt A des Kreises liegt zwischen der Untersumme U und der Obersumme O:

$$\boxed{} \text{ mm}^2 \leq A \leq \boxed{} \text{ mm}^2$$

Wie könntest du die Abschätzungen verbessern?

Verfeinerung

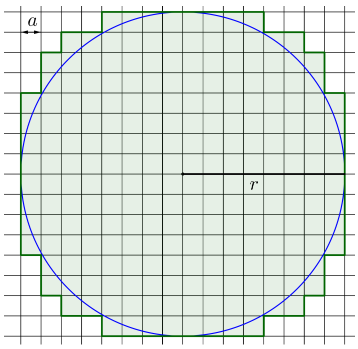
In den beiden folgenden Rastern gilt für die Seitenlänge eines kleinen Quadrats: $a = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \cdot r$



Wir haben für dich gezählt:

Links sind jene 164 Quadrate des Rasters gefärbt, die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind.

Rechts sind jene 224 Quadrate des Rasters gefärbt, die zumindest teilweise mit der Kreisfläche überlappen.



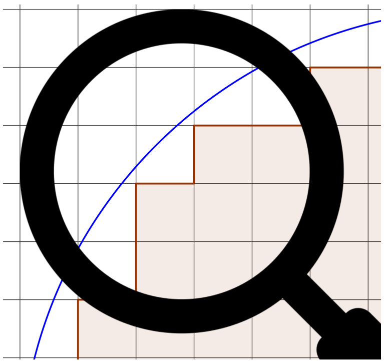
Für den Flächeninhalt A des Kreises mit Radius r erhalten wir daher folgende Abschätzungen:

$$A \geq \boxed{} \cdot a^2 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \cdot r^2 = \boxed{} \cdot r^2 \qquad \text{und}$$

$$A \leq \boxed{} \cdot a^2 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \cdot r^2 = \boxed{} \cdot r^2$$

Unter der Lupe

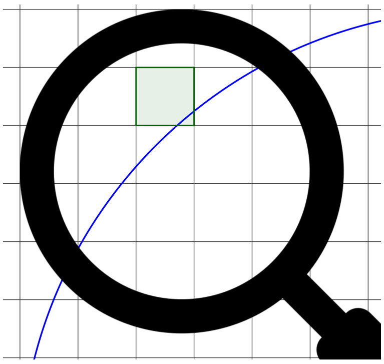
In den folgenden Bildern liegt immer derselbe Kreisausschnitt unter der Lupe:



Links siehst du ein grobes Raster. Wir haben die Quadrate für die Berechnung der Untersumme farbig markiert.

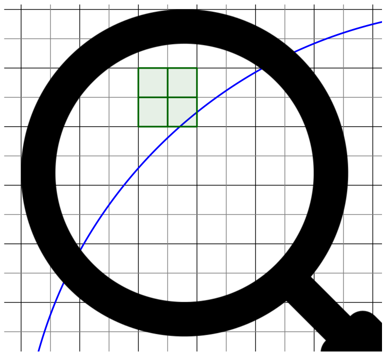
Rechts ist das Raster verfeinert. Markiere die Quadrate, die wir in diesem Raster zusätzlich zur Berechnung der Untersumme verwenden.

Die Untersumme kann beim Verfeinern des Rasters nur *größer* werden.



Links siehst du ein grobes Raster. Das markierte Quadrat ist ein Teil zur Berechnung der Obersumme.

Rechts ist das Raster verfeinert. Welche der markierten Quadrate sind in diesem Raster *nicht* mehr Teil der Obersumme? Streiche sie durch.



Die Obersumme kann beim Verfeinern des Rasters nur *kleiner* werden.

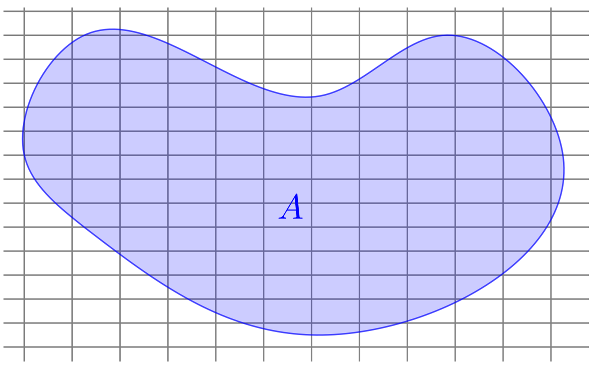
Indem wir das Raster fein genug wählen, kommen wir dem exakten Flächeninhalt $A = \pi \cdot r^2 = 3{,}1415... \cdot r^2$ beliebig nahe.

Integration

Den Flächeninhalt A der dargestellten Figur können wir wie folgt nach unten und oben abschätzen:

1) Wir legen ein Raster über die Figur.

Das Raster muss nicht unbedingt quadratisch sein.



2) Die **Untersumme** $\boldsymbol{U}$ ist der gesamte Flächeninhalt aller Rechtecke im Raster, die vollständig in der Figur enthalten sind.

Die **Obersumme** $\boldsymbol{O}$ ist der gesamte Flächeninhalt aller Rechtecke im Raster, die zumindest teilweise mit der Figur überlappen.

Dann gilt: $\boldsymbol{U \leq A \leq O}$

Das Intervall $[U; O]$, in dem der tatsächliche Flächeninhalt A liegt, hat also die Breite $O - U$.

3) Wir ziehen weitere Unterteilungen ein. Dadurch wird das Raster feiner.

Die Untersumme kann dabei nur größer werden.

Die Obersumme kann dabei nur kleiner werden.

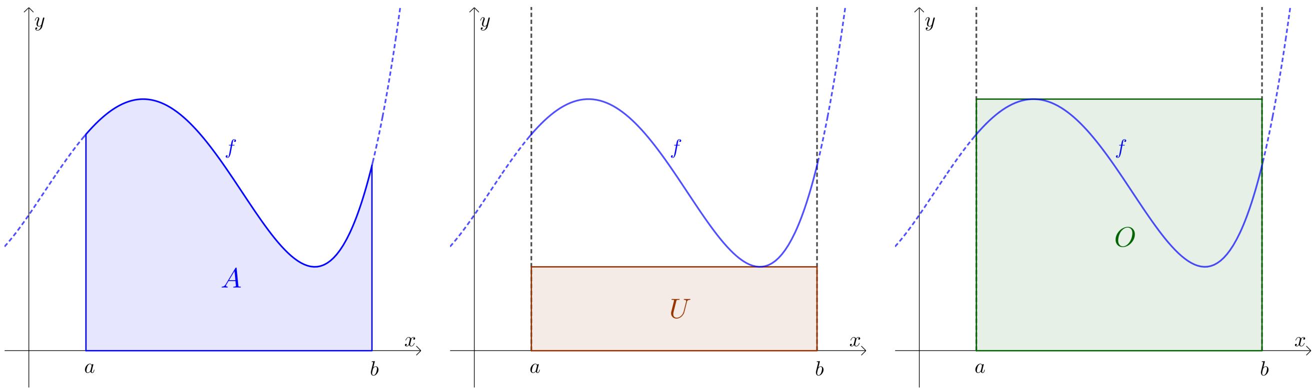
Die Intervallbreite $O - U$ kann dabei also nur kleiner werden.

4) Wir erwarten, dass wir den Flächeninhalt der Figur mit Unter- und Obersummen beliebig gut abschätzen können, indem wir das Raster fein genug wählen.

Tatsächlich kann dieses Raster für jedes $\varepsilon > 0$ so fein gewählt werden, dass $O - U < \varepsilon$ gilt.

Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse

Den Rand vieler Figuren können wir mit Funktionsgraphen beschreiben. Zunächst schätzen wir den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse im Intervall $[a;b]$ ab:

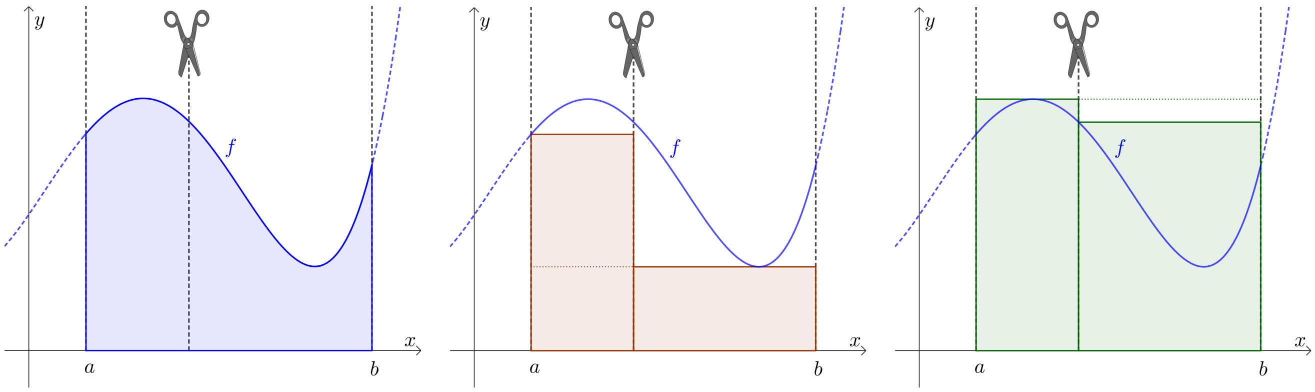


Das Rechteck im mittleren Bild ist so hoch wie der *kleinste* Funktionswert von f in $[a;b]$.
Das Rechteck im rechten Bild ist so hoch wie der *größte* Funktionswert von f in $[a;b]$.

Für den **Flächeninhalt A**, die **Untersumme U** und die **Obersumme O** gilt also: $\boldsymbol{U \leq A \leq O}$

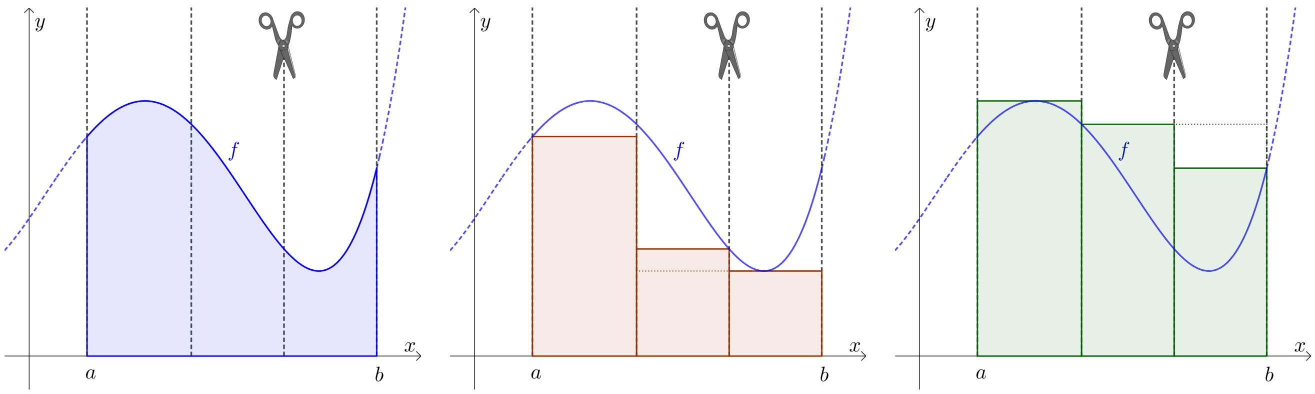
Die Untersumme und die Obersumme unterscheiden sich deutlich, weil sich der kleinste Funktionswert und der größte Funktionswert von f in $[a;b]$ deutlich unterscheiden.

Deshalb „zerschneiden“ wir die Fläche in zwei Teile und nähern sie wie zuvor durch Rechtecke an:



Die *Untersumme* kann beim *Verfeinern* der Zerlegung nur *größer* werden.
Die *Obersumme* kann beim *Verfeinern* der Zerlegung nur *kleiner* werden.

Der Unterschied zwischen Obersumme und Untersumme ist uns noch zu groß.
Wir verfeinern die Zerlegung also weiter:

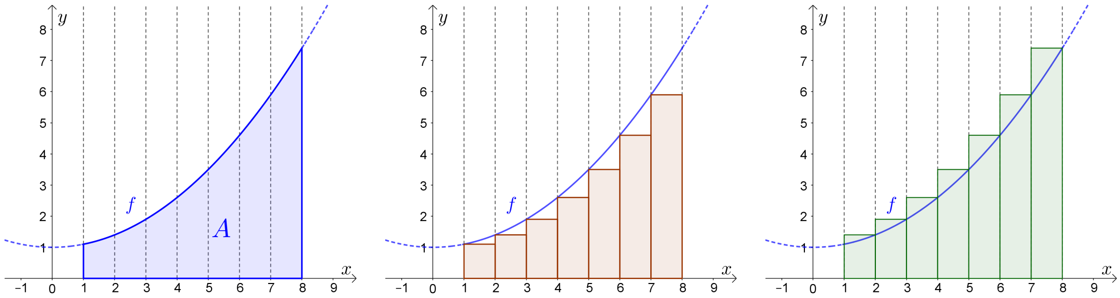


Wir erwarten, dass wir den Flächeninhalt mit Unter- und Obersummen beliebig gut abschätzen können, indem wir die Zerlegung fein genug machen. Damit dies gelingt, sollte die Funktion keine Sprünge machen.

Annäherung durch Untersumme/Obersumme

Für die unten dargestellte Funktion f gilt: $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$

Wir schätzen den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[1; 8]$ ab.
Dazu zerschneiden wir die Fläche in 7 gleich breite Streifen:



Fülle die Wertetabelle aus:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

Wie groß ist der Flächeninhalt A also mindestens? Wie groß ist der Flächeninhalt A also höchstens?

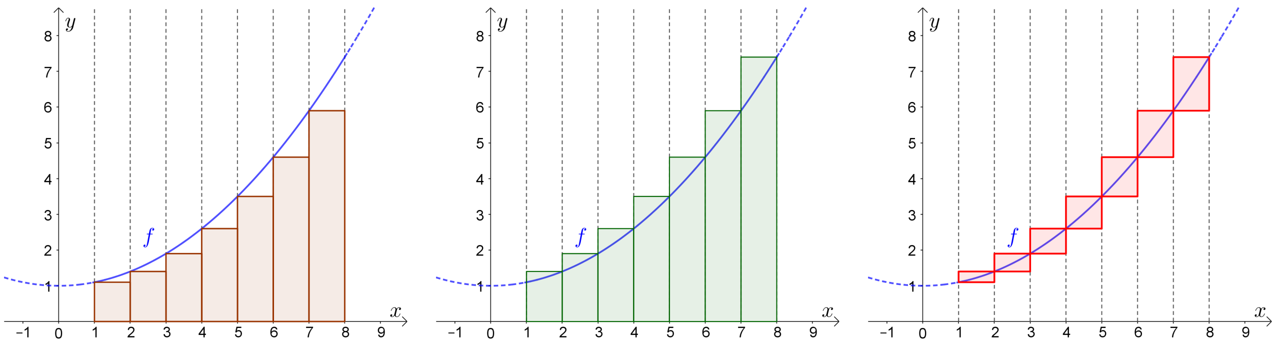
$\ldots \leq A \leq \ldots$

Verfeinerung

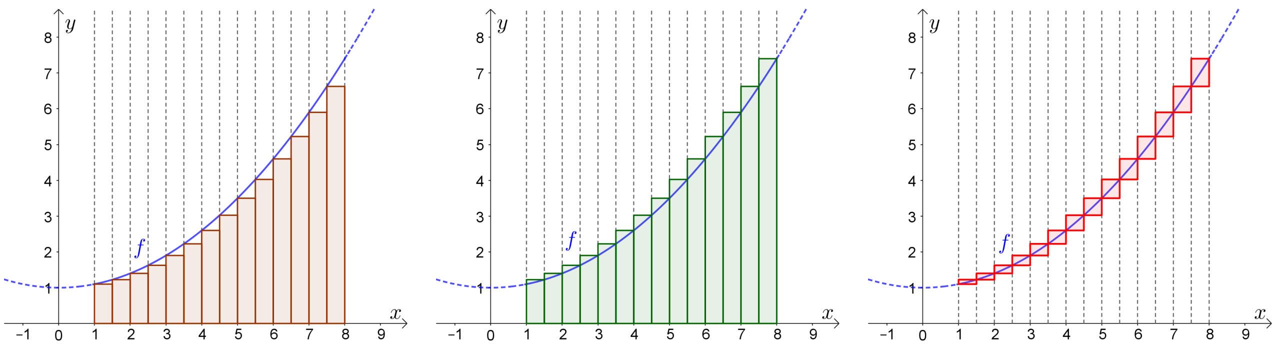
Die **Untersumme** im linken Bild ist $U_7 = 21$. Die **Obersumme** im mittleren Bild ist $O_7 = 27{,}3$.

Das Intervall $[U_7; O_7]$ hat also die Breite $E_7 = O_7 - U_7 = 6{,}3$.

Diese Differenz E_7 ist im rechten Bild als Flächeninhalt veranschaulicht:



Wir verfeinern die Zerlegung, indem wir die Breite aller Rechtecke halbieren:



Das Intervall $[U_{14}; O_{14}]$ hat dann nur mehr die Breite $E_{14} = O_{14} - U_{14} = 3{,}15$.

Integrierbarkeit

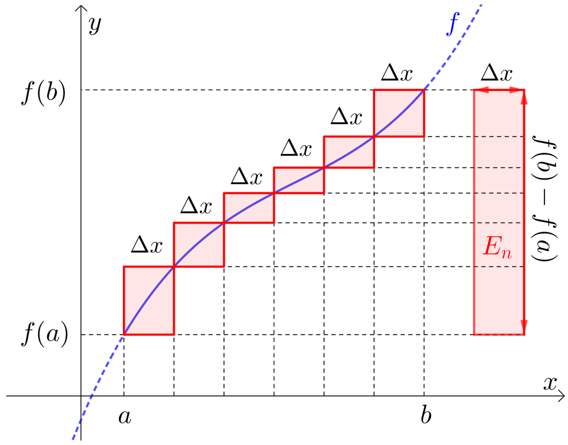
Die Funktion f ist in $[a;b]$ monoton steigend.

Wir zerlegen das Intervall in n gleich breite Teile.
Stelle mithilfe von a, b und n eine Formel für die Breite Δx jedes der n Rechtecke auf:

$\Delta x =$ ☐

Stelle mithilfe von f, a, b und n eine Formel für die Differenz E_n zwischen Unter- und Obersumme auf:

$E_n =$ ☐

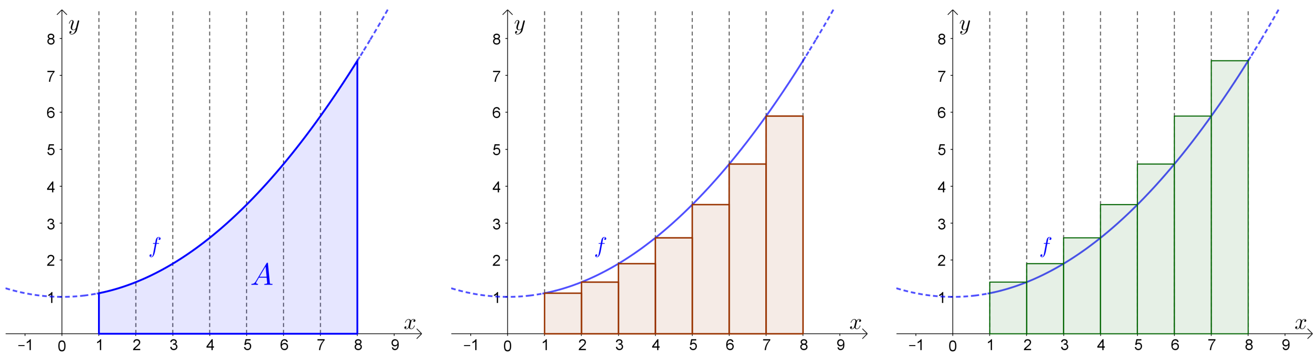


Je größer n ist, desto kleiner ist E_n. Für den Grenzwert gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} E_n =$ ☐

In diesem Fall nennen wir die Funktion **integrierbar**. Tatsächlich sind alle stetigen Funktionen integrierbar.

Fehlerabschätzung

Die Funktion f mit $f(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$ ist im Intervall $[1;8]$ monoton steigend.
Wir teilen das Intervall $[1;8]$ in n gleich breite Teile.
Den Flächeninhalt A nähern wir durch die Untersumme U_n und die Obersumme O_n an:



Stelle mithilfe von n eine Formel für die Breite jedes der n Rechtecke auf: $\Delta x =$ ☐

Stelle mithilfe von n eine Formel für die Differenz $E_n = O_n - U_n$ auf:

$E_n =$ ☐

Wie groß muss n sein, damit $E_n = O_n - U_n$ kleiner als 0,01 ist?

Ab ☐ gleich breiten Rechtecken unterscheiden sich Unter- und Obersumme um weniger als 0,01.