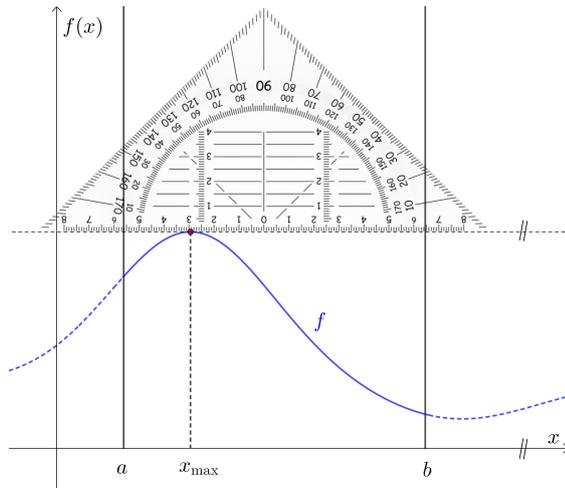


Größter Funktionswert einer Funktion in $[a; b]$



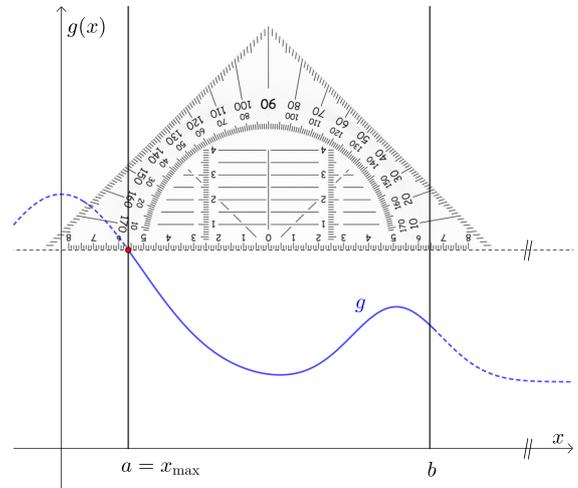
Wir suchen den größten Funktionswert einer **differenzierbaren** Funktion im **Intervall** $[a; b]$.
 Dazu legen wir ein Geodreieck parallel zur x -Achse so, dass der Graph in $[a; b]$ unterhalb verläuft.
 Dann verschieben wir es parallel nach unten, bis wir erstmals in $[a; b]$ auf den Graphen treffen:



Bei dieser Funktion f wird der größte Funktionswert an einer Stelle x_{\max} im *Inneren* des Intervalls angenommen.

Die Tangente an den Graphen ist dann im Punkt $(x_{\max} | f(x_{\max}))$ horizontal. Also gilt:

$$f'(x_{\max}) = 0$$



Bei dieser Funktion g wird der größte Funktionswert an der Stelle a am *Rand* des Intervalls angenommen.

Die Tangente an den Graphen ist im Punkt $(a | g(a))$ hier *nicht* horizontal.

Größter & Kleinster Funktionswert von f in $[a; b]$



Für die **Polynomfunktion** f gilt: $f(x) = -4 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 42$

Wir suchen den größten Funktionswert und den kleinsten Funktionswert von f im Intervall $[1; 4]$.

An welchen Stellen x_{\max} und x_{\min} in $[1; 4]$ werden diese Werte angenommen?

Berechne den größten Funktionswert $f(x_{\max})$ und den kleinsten Funktionswert $f(x_{\min})$.

i) Berechne alle Stellen, an denen $f'(x) = 0$ gilt.

$$f'(x) = -12 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 30$$

$$f'(x) = 0 \iff -12 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 30 = 0 \iff x = -1 \text{ oder } x = 2,5$$

ii) Welche wenigen Stellen im Intervall $[1; 4]$ kommen also für x_{\max} und x_{\min} nur mehr in Frage?

$$x = 2,5 \text{ (weil } f'(2,5) = 0) \quad x = 1, x = 4 \text{ (weil Randstelle)}$$

iii) Vergleiche die Funktionswerte an diesen Stellen.

$$f(1) = 77$$

$$f(2,5) = 110,75 \implies \text{größter Funktionswert } 110,75 \text{ an der Stelle } x_{\max} = 2,5$$

$$f(4) = 50 \implies \text{kleinster Funktionswert } 50 \text{ an der Stelle } x_{\min} = 4$$

Diese Methodik verwenden wir auch zum Lösen von **Optimierungsaufgaben**.



Rechts ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[0; 11]$ dargestellt.

f ist **konstant** in den Intervallen $[2; 4]$ und $[7; 10]$.

Für alle $x_1, x_2 \in [2; 4]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) = f(x_2)$

f ist **streng monoton steigend** im Intervall $[0; 2]$.

Für alle $x_1, x_2 \in [0; 2]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$

f ist **monoton steigend** im Intervall $[0; 4]$ und $[7; 10]$.

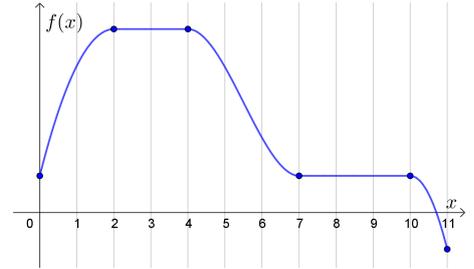
Für alle $x_1, x_2 \in [0; 4]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$

f ist **streng monoton fallend** in den Intervallen $[4; 7]$ und $[10; 11]$.

Für alle $x_1, x_2 \in [4; 7]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

f ist **monoton fallend** im Intervall $[2; 11]$.

Für alle $x_1, x_2 \in [2; 11]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$



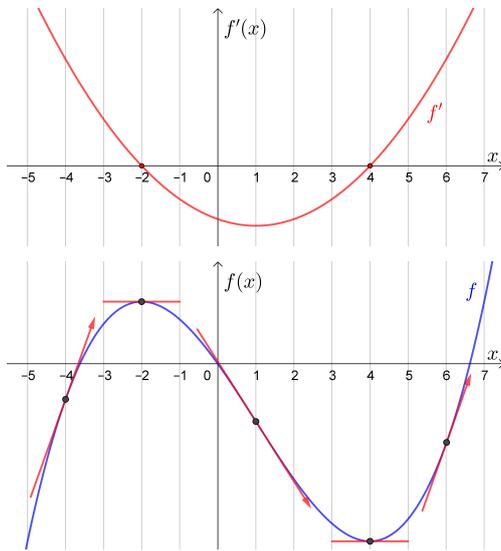
Vorzeichen von $f' \rightsquigarrow$ Monotonieverhalten von f



Für jede differenzierbare Funktion f gilt:

- Wenn $f'(x) > 0$ für alle Stellen x eines Intervalls gilt, dann ist f streng monoton steigend in diesem Intervall.
- Wenn $f'(x) < 0$ für alle Stellen x eines Intervalls gilt, dann ist f streng monoton fallend in diesem Intervall.

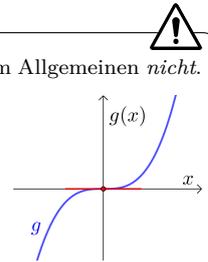
Das und mehr folgt aus dem [Mittelwertsatz der Differentialrechnung](#).



Die Umkehrungen dieser Aussagen gelten im Allgemeinen **nicht**. Zum Beispiel ist die Funktion g mit

$$g(x) = x^3$$

überall streng monoton steigend, obwohl $g'(x) = 3 \cdot x^2$ und damit $g'(0) = 0$ gilt.



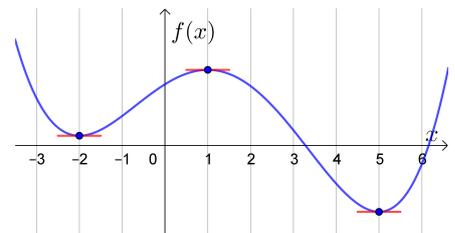
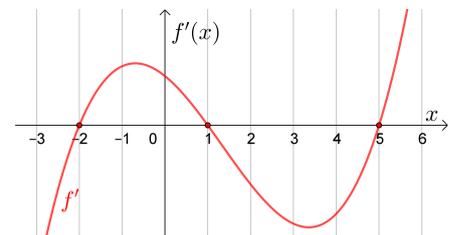
Funktionsgraph von $f' \rightsquigarrow$ Monotonieverhalten von f



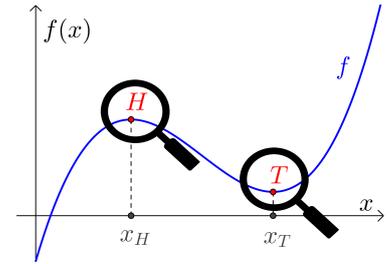
Rechts ist der Graph einer Ableitungsfunktion f' dargestellt.

Wir untersuchen das **Monotonieverhalten** von f .

- 1) Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat die drei Lösungen -2 , 1 und 5 .
- 2) Trage in die Kästchen ein, ob f in diesem Intervall streng monoton steigend (\nearrow) oder streng monoton fallend (\searrow) ist.
 $] -\infty; -2[$ \searrow $] -2; 1[$ \nearrow $] 1; 5[$ \searrow $] 5; \infty[$ \nearrow
- 3) Im Koordinatensystem rechts sind 3 Punkte eingezeichnet. Der Funktionsgraph von f verläuft durch diese 3 Punkte. Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f .



Am Graphen der rechts dargestellten Funktion f sind ein **Hochpunkt H** und ein **Tiefpunkt T** eingezeichnet.



Solche Punkte heißen auch **Extrempunkte**.

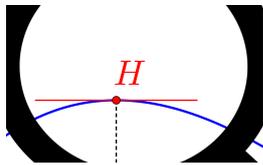
Die zugehörigen Stellen x_H und x_T heißen **Extremstellen**.

In einem Hochpunkt ist der Funktionswert *lokal* am größten. Es gilt also

$$f(x_H) \geq f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich nahe um x_H .

Blicken wir nahe genug auf den Hochpunkt, dann sehen wir *keine* größeren Funktionswerte:



H heißt deshalb auch **lokales Maximum**.

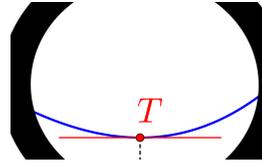
Wenn x_0 eine Extremstelle im Inneren des Definitionsbereichs ist, dann gilt: $f'(x_0) = 0$

In einem Tiefpunkt ist der Funktionswert *lokal* am kleinsten. Es gilt also

$$f(x_T) \leq f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich nahe um x_T .

Blicken wir nahe genug auf den Tiefpunkt, dann sehen wir *keine* kleineren Funktionswerte:



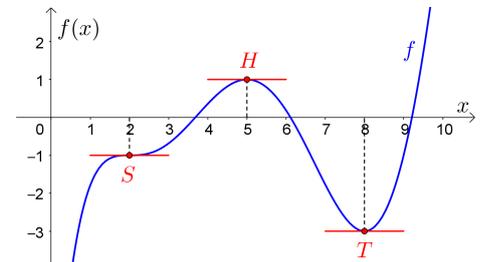
T heißt deshalb auch **lokales Minimum**.

Umgekehrt folgt aus $f'(x_0) = 0$ aber noch *nicht*, dass x_0 eine Extremstelle von f sein muss.

Rechts gilt zum Beispiel $f'(2) = 0$. Der Punkt $S = (2 | -1)$ ist aber weder ein Hochpunkt noch ein Tiefpunkt von f .

Ein solcher Punkt heißt **Sattelpunkt**.

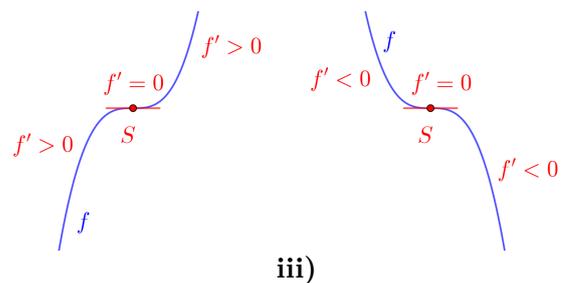
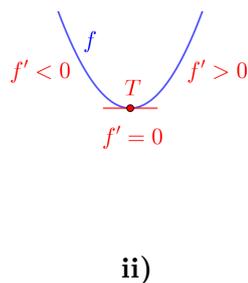
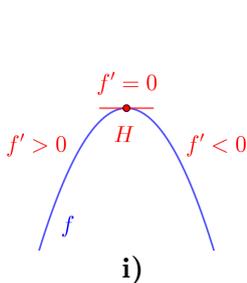
Die zugehörige Stelle heißt **Sattelstelle**.



Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann hat f im Punkt $A = (x_0 | f(x_0))$ eine waagrechte Tangente.

Wenn x_0 *lokal* die einzige Nullstelle von f' ist, dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- i) Wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $+$ auf $-$, dann ist A ein **Hochpunkt** von f .
- ii) Wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $-$ auf $+$, dann ist A ein **Tiefpunkt** von f .
- iii) Wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen *nicht*, dann ist A ein **Sattelpunkt** von f .



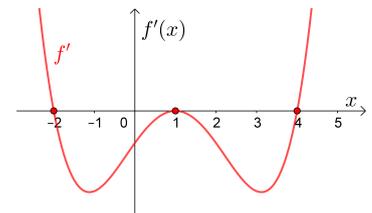
Funktionsgleichung von $f' \rightsquigarrow$ Monotonieverhalten von f 

Für die erste Ableitung einer Funktion f gilt: $f'(x) = (x + 2) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 4)$

1) Kreuze die zutreffenden Eigenschaften von f' und von f an.

	f'	f
$x < -2$	<input type="checkbox"/> = 0 <input checked="" type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input checked="" type="checkbox"/> ↗ <input type="checkbox"/> ↘
$x = -2$	<input checked="" type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input checked="" type="checkbox"/> Hochpunkt <input type="checkbox"/> Tiefpunkt <input type="checkbox"/> Sattelpunkt
$-2 < x < 1$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input checked="" type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↗ <input checked="" type="checkbox"/> ↘
$x = 1$	<input checked="" type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> Hochpunkt <input type="checkbox"/> Tiefpunkt <input checked="" type="checkbox"/> Sattelpunkt
$1 < x < 4$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input checked="" type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↗ <input checked="" type="checkbox"/> ↘
$x = 4$	<input checked="" type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> Hochpunkt <input checked="" type="checkbox"/> Tiefpunkt <input type="checkbox"/> Sattelpunkt
$x > 4$	<input type="checkbox"/> = 0 <input checked="" type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input checked="" type="checkbox"/> ↗ <input type="checkbox"/> ↘

2) Skizziere rechts den Funktionsgraphen der Ableitungsfunktion f' .

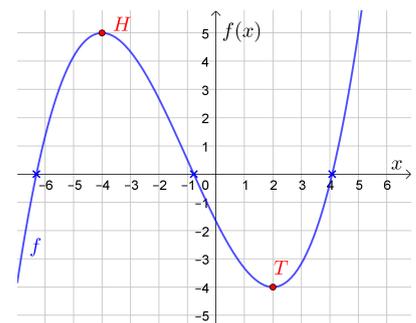


Extrempunkte 

Für die Polynomfunktion f gilt: $f(x) = \frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x - \frac{5}{3}$

Diese Funktion f hat zwei Extrempunkte.

- Berechne die beiden Extrempunkte von f .
Zeichne sie im Koordinatensystem rechts ein.
- Rechts sind die Nullstellen von f eingezeichnet.
Skizziere den Funktionsgraphen von f .



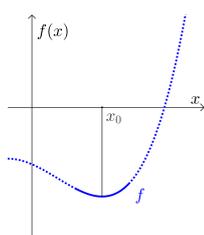
$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x - 2$$

$$f'(x) = 0 \iff \underbrace{x^2 + 2 \cdot x - 8}_{=(x+4) \cdot (x-2)} = 0 \iff x = -4 \text{ oder } x = 2$$

$$f(-4) = 5 \implies H = (-4 \mid 5)$$

$$f(2) = -4 \implies T = (2 \mid -4)$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen 



Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann kann der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt oder ein Sattelpunkt von f sein.

Es gibt eine zusätzliche Bedingung, unter der wir einen Hochpunkt bzw. einen Tiefpunkt garantieren können.

Dafür verwenden wir f'' , also die Ableitungsfunktion der Ableitungsfunktion von f .

Mehr dazu findest du auf dem [Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen II](#).

