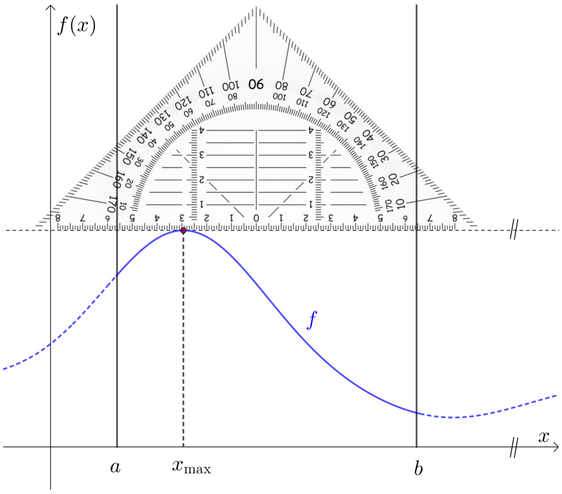
Größter Funktionswert einer Funktion in $[a;b]$

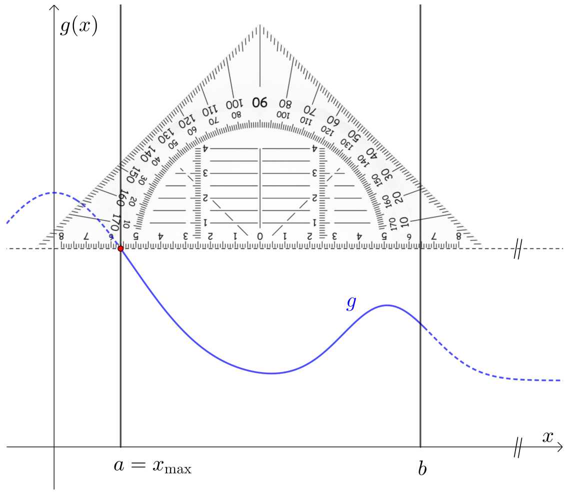
Wir suchen den größten Funktionswert einer differenzierbaren Funktion im Intervall $[a;b]$.
Dazu legen wir ein Geodreieck parallel zur x-Achse so, dass der Graph in $[a;b]$ unterhalb verläuft.
Dann verschieben wir es parallel nach unten, bis wir erstmals in $[a;b]$ auf den Graphen treffen:



Bei dieser Funktion f wird der größte Funktionswert an einer Stelle $x_{\max}$ im *Inneren* des Intervalls angenommen.

Die Tangente an den Graphen ist dann im Punkt $(x_{\max} \mid f(x_{\max}))$ horizontal. Also gilt:

$$\boldsymbol{f'(x_{\max}) =} \boxed{}$$



Bei dieser Funktion g wird der größte Funktionswert an der Stelle a am *Rand* des Intervalls angenommen.

Die Tangente an den Graphen ist im Punkt $(a \mid g(a))$ hier *nicht* horizontal.

Größter & Kleinster Funktionswert von f in $[a;b]$

Für die Polynomfunktion f gilt: $f(x) = -4 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 42$
Wir suchen den größten Funktionswert und den kleinsten Funktionswert von f im Intervall $[1;4]$.
An welchen Stellen $x_{\max}$ und $x_{\min}$ in $[1;4]$ werden diese Werte angenommen?
Berechne den größten Funktionswert $f(x_{\max})$ und den kleinsten Funktionswert $f(x_{\min})$.

i) Berechne alle Stellen, an denen $f'(x) = 0$ gilt.

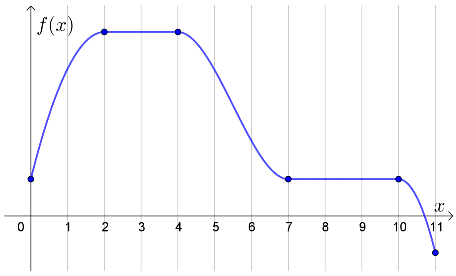
ii) Welche wenigen Stellen im Intervall $[1;4]$ kommen also für $x_{\max}$ und $x_{\min}$ nur mehr in Frage?

iii) Vergleiche die Funktionswerte an diesen Stellen.

Diese Methodik verwenden wir auch zum Lösen von Optimierungsaufgaben.

Monotonieverhalten

Rechts ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[0; 11]$ dargestellt.



f ist **konstant** in den Intervallen $[2; 4]$ und $[7; 10]$.
Für alle $x_1, x_2 \in [2; 4]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) = f(x_2)$

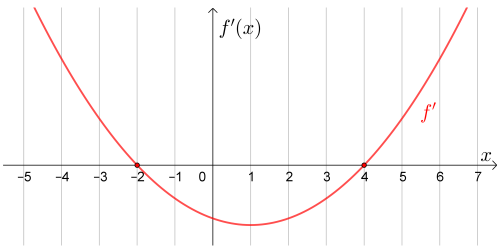
f ist **streng monoton steigend** im Intervall $[0; 2]$.
Für alle $x_1, x_2 \in [0; 2]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$

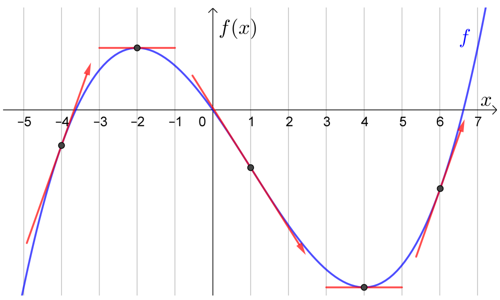
f ist **monoton steigend** im Intervall $[0; 4]$ und $[7; 10]$.
Für alle $x_1, x_2 \in [0; 4]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$

f ist **streng monoton fallend** in den Intervallen $[4; 7]$ und $[10; 11]$.
Für alle $x_1, x_2 \in [4; 7]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

f ist **monoton fallend** im Intervall $[2; 11]$.
Für alle $x_1, x_2 \in [2; 11]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$

Vorzeichen von f' $\rightsquigarrow$ Monotonieverhalten von f





Für jede differenzierbare Funktion f gilt:

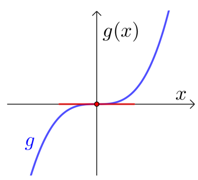
- Wenn $f'(x) > 0$ für alle Stellen x eines Intervalls gilt, dann ist f streng monoton steigend in diesem Intervall.
- Wenn $f'(x) < 0$ für alle Stellen x eines Intervalls gilt, dann ist f streng monoton fallend in diesem Intervall.

Das und mehr folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Die Umkehrungen dieser Aussagen gelten im Allgemeinen *nicht*.
Zum Beispiel ist die Funktion g mit

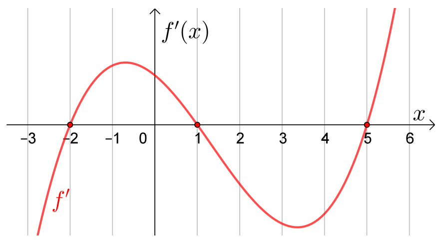
$$g(x) = x^3$$

überall streng monoton steigend,
obwohl $g'(x) = 3 \cdot x^2$ und
damit $g'(0) = 0$ gilt.



Funktionsgraph von f' $\rightsquigarrow$ Monotonieverhalten von f

Rechts ist der Graph einer Ableitungsfunktion f' dargestellt.
Wir untersuchen das **Monotonieverhalten** von f.

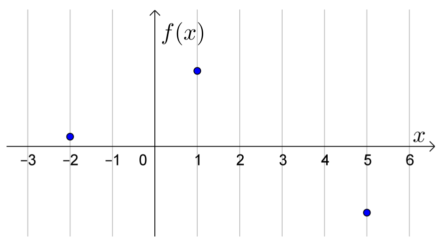


1) Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat die drei Lösungen ☐, ☐ und ☐.

2) Trage in die Kästchen ein, ob f in diesem Intervall streng monoton steigend ($\nearrow$) oder streng monoton fallend ($\searrow$) ist.

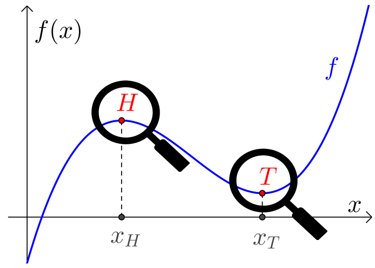
$]-\infty; -2[$ ☐ $]-2; 1[$ ☐ $]1; 5[$ ☐ $]5; \infty[$ ☐

3) Im Koordinatensystem rechts sind 3 Punkte eingezeichnet.
Der Funktionsgraph von f verläuft durch diese 3 Punkte.
Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f.



Extremstellen & Extrempunkte

Am Graphen der rechts dargestellten Funktion f sind ein **Hochpunkt H** und ein **Tiefpunkt T** eingezeichnet.

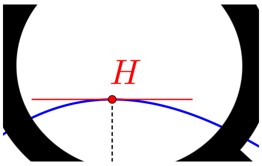


Solche Punkte heißen auch **Extrempunkte**.
Die zugehörigen Stellen $\boldsymbol{x_H}$ und $\boldsymbol{x_T}$ heißen **Extremstellen**.

In einem Hochpunkt ist der Funktionswert *lokal* am größten. Es gilt also

$$f(x_H) \geq f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich nahe um x_H.
Blicken wir nahe genug auf den Hochpunkt, dann sehen wir *keine* größeren Funktionswerte:

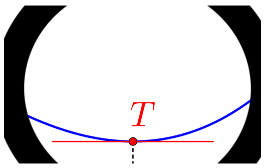


H heißt deshalb auch **lokales Maximum**.

In einem Tiefpunkt ist der Funktionswert *lokal* am kleinsten. Es gilt also

$$f(x_T) \leq f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich nahe um x_T.
Blicken wir nahe genug auf den Tiefpunkt, dann sehen wir *keine* kleineren Funktionswerte:



T heißt deshalb auch **lokales Minimum**.

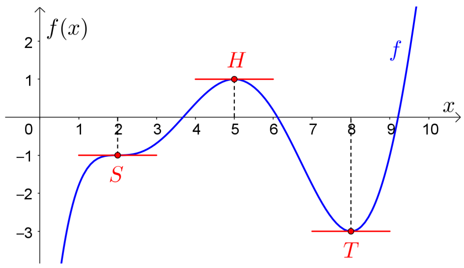
Wenn x_0 eine Extremstelle im Inneren des Definitionsbereichs ist, dann gilt: $f'(x_0) = \boxed{}$

Sattelstellen & Sattelpunkte

Umgekehrt folgt aus $f'(x_0) = 0$ aber noch *nicht*, dass x_0 eine Extremstelle von f sein muss.

Rechts gilt zum Beispiel $f'(2) = 0$. Der Punkt $S = (2 \mid -1)$ ist aber weder ein Hochpunkt noch ein Tiefpunkt von f.

Ein solcher Punkt heißt **Sattelpunkt**.
Die zugehörige Stelle heißt **Sattelstelle**.



Vorzeichenwechsel von f'

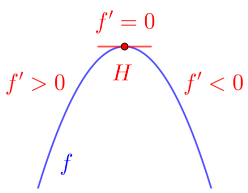
Wenn $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ gilt, dann hat f im Punkt $A = (x_0 \mid f(x_0))$ eine waagrechte Tangente.

Wenn x_0 *lokal* die einzige Nullstelle von f' ist, dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

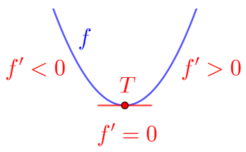
i) Wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $+$ auf $-$, dann ist A ein **Hochpunkt von f**.

ii) Wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von $-$ auf $+$, dann ist A ein **Tiefpunkt von f**.

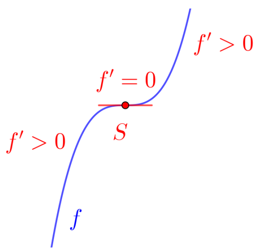
iii) Wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen *nicht*, dann ist A ein **Sattelpunkt von f**.

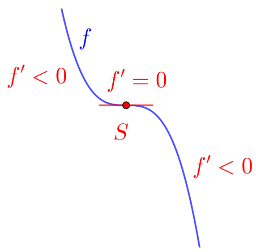


i)



ii)





iii)

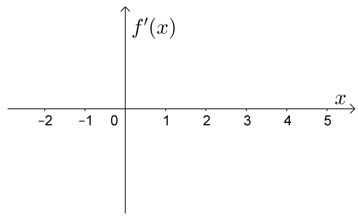
Funktionsgleichung von f' $\rightsquigarrow$ Monotonieverhalten von f

Für die erste Ableitung einer Funktion f gilt: $f'(x) = (x+2)\cdot(x-1)^2\cdot(x-4)$

1) Kreuze die zutreffenden Eigenschaften von f' und von f an.

	f'	f
$x < -2$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ $\nearrow$ ☐ $\searrow$
$x = -2$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Hochpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Sattelpunkt
$-2 < x < 1$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ $\nearrow$ ☐ $\searrow$
$x = 1$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Hochpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Sattelpunkt
$1 < x < 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ $\nearrow$ ☐ $\searrow$
$x = 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Hochpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Sattelpunkt
$x > 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ $\nearrow$ ☐ $\searrow$

2) Skizziere rechts den Funktionsgraphen der Ableitungsfunktion f'.



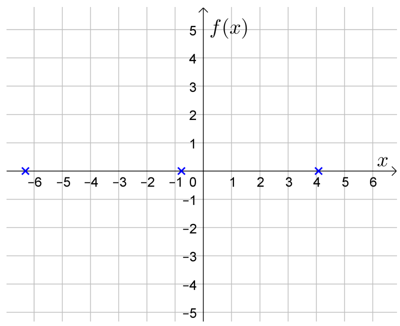
Extrempunkte

Für die Polynomfunktion f gilt: $f(x) = \frac{1}{12}\cdot x^3 + \frac{1}{4}\cdot x^2 - 2\cdot x - \frac{5}{3}$

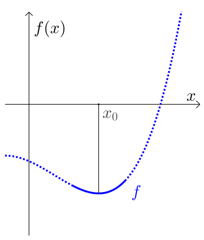
Diese Funktion f hat zwei Extrempunkte.

1) Berechne die beiden Extrempunkte von f.
Zeichne sie im Koordinatensystem rechts ein.

2) Rechts sind die Nullstellen von f eingezeichnet.
Skizziere den Funktionsgraphen von f.



Hinreichende Bedingung für Extremstellen



Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann kann der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt oder ein Sattelpunkt von f sein.

Es gibt eine zusätzliche Bedingung, unter der wir einen Hochpunkt bzw. einen Tiefpunkt garantieren können.

Dafür verwenden wir f'', also die Ableitungsfunktion der Ableitungsfunktion von f.

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen II.