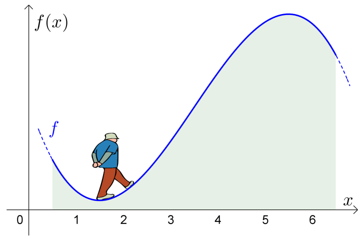
Maximale Steigung berechnen

Der dargestellte Funktionsgraph modelliert das Profil eines Hügels:



- Wo ist der tiefste Punkt?
- Wo ist der höchste Punkt?
- Wie misst man die Steigung in einem Punkt?
- Wo geht es am steilsten bergauf?

Am Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen I und Arbeitsblatt – Differentialquotient beantworten wir die ersten drei Fragen.
Auf diesem Arbeitsblatt beantworten wir die letzte Frage.

2. Ableitung

$\boldsymbol{f'}$ ist die **Ableitungsfunktion von $\boldsymbol{f}$**. Wir sagen auch kurz: „f' ist die Ableitung von f."

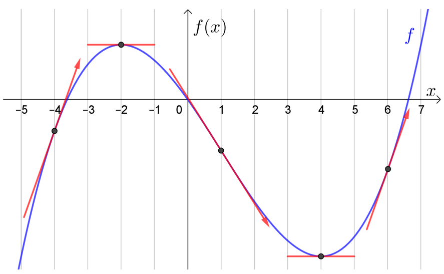
Die Ableitung von f' – also $(f')'$ – heißt **2. Ableitung von $\boldsymbol{f}$**. Wir schreiben dafür kurz $\boldsymbol{f''}$.

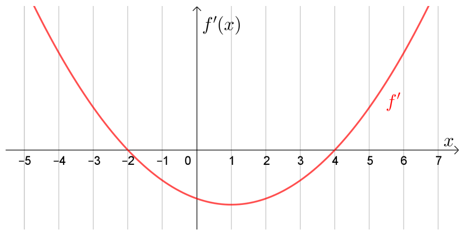
Monotonieverhalten von $\boldsymbol{f'}$

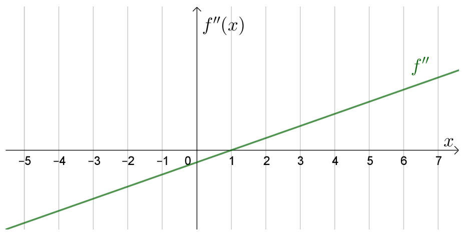
Das Monotonieverhalten der Funktion f können wir mithilfe des Vorzeichens von f' untersuchen.

Das Monotonieverhalten der Funktion f' können wir also mithilfe des Vorzeichens von f'' untersuchen.

Der Graph einer kubischen Funktion f ist dargestellt:







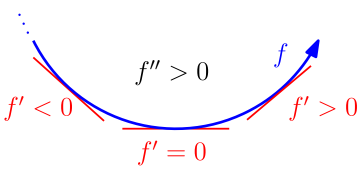
1) Skizziere den Graphen der quadratischen Funktion f'.
Wo sind die Nullstellen von f'? Wo ist die Scheitelstelle?
Ist die Parabel nach unten oder nach oben geöffnet?

2) Skizziere den Graphen der linearen Funktion f''.

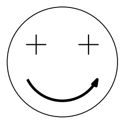
Krümmungsverhalten

Mithilfe der zweiten Ableitung $\boldsymbol{f''}$ können wir das **Krümmungsverhalten von $\boldsymbol{f}$** untersuchen:

1) Wenn $\boldsymbol{f''(x) > 0}$ für alle Stellen x eines Intervalls gilt, dann ist f' streng monoton steigend in diesem Intervall. Die Steigung von f wird in diesem Intervall also immer größer.

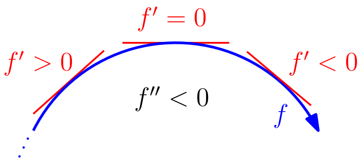


Wir sagen auch:
Der Graph von f ist **positiv gekrümmt**.
Der Graph von f ist **linksgekrümmt**.

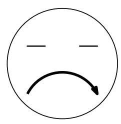


Ist der Graph eine Straße in Vogelperspektive, dann fahren wir eine Linkskurve.

2) Wenn $\boldsymbol{f''(x) < 0}$ für alle Stellen x eines Intervalls gilt, dann ist f' streng monoton fallend in diesem Intervall. Die Steigung von f wird in diesem Intervall also immer kleiner.



Wir sagen auch:
Der Graph von f ist **negativ gekrümmt**.
Der Graph von f ist **rechtsgekrümmt**.



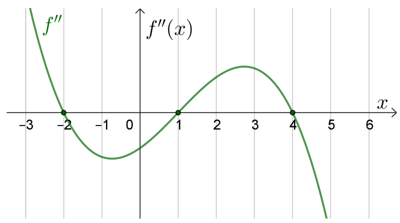
Ist der Graph eine Straße in Vogelperspektive, dann fahren wir eine Rechtskurve.

Funktionsgraph von f'' $\rightsquigarrow$ Krümmungsverhalten von f

Rechts ist der Graph einer 2. Ableitungsfunktion f'' dargestellt.
Wir untersuchen das Krümmungsverhalten von f.

1) Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat die drei Lösungen -2, 1 und 4.

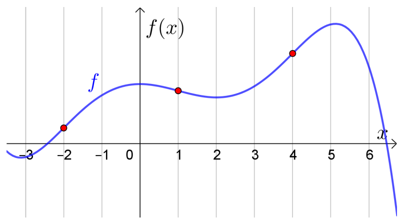
Die Funktion f'' wechselt an diesen Stellen das Vorzeichen.
Die Funktion f wechselt an diesen Stellen ihr Krümmungsverhalten.



2) Rechts ist der Graph von f dargestellt. Zeichne am Graphen alle Punkte ein, in denen f das Krümmungsverhalten wechselt.

3) Trage in die Kästchen ein, ob f im angegebenen Intervall positiv gekrümmt ($+$) oder negativ gekrümmt ($-$) ist.

$]-\infty; -2[$ $+$ $]-2; 1[$ $-$ $]1; 4[$ $+$ $]4; \infty[$ $-$



Wendestellen & Wendepunkte

Rechts sind der Graph einer Funktion f,
der Graph ihrer Ableitungsfunktion f' und
der Graph ihrer 2. Ableitungsfunktion f'' dargestellt.
An den Stellen x_1 und x_2 wechselt die Funktion f'' das Vorzeichen.
Daraus folgt, dass ...

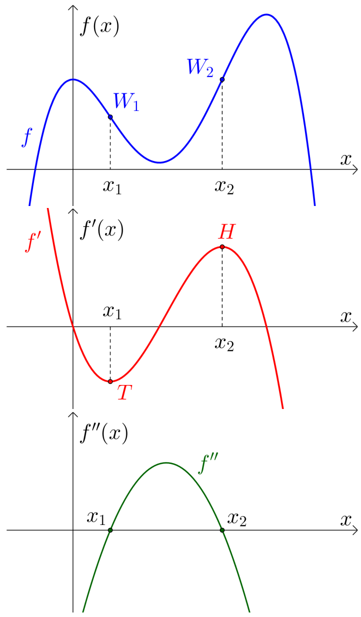
1) ... die Funktion f' dort das Monotonieverhalten wechselt.

2) ... die Funktion f dort das Krümmungsverhalten wechselt.

Diese Stellen $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$ heißen **Wendestellen von $\boldsymbol{f}$**.
Die zugehörigen Punkte $\boldsymbol{W_1}$ und $\boldsymbol{W_2}$ am Funktionsgraphen von f heißen **Wendepunkte von $\boldsymbol{f}$**.

Im Punkt W_1 hat die Steigung von f ein lokales Minimum.
Lokal geht es dort also am steilsten bergab.

Im Punkt W_2 hat die Steigung von f ein lokales Maximum.
Lokal geht es dort also am steilsten bergauf.

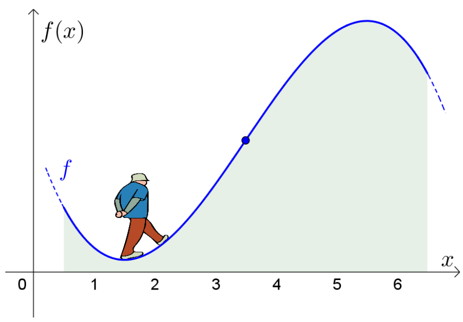


Maximale Steigung

Die Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^3 + \frac{63}{32} \cdot x^2 - \frac{297}{64} \cdot x + \frac{2217}{640}$$

modelliert das Profil rechts dargestellten Hügels.
Berechne jene Stelle, an der der Hügel am stärksten ansteigt.



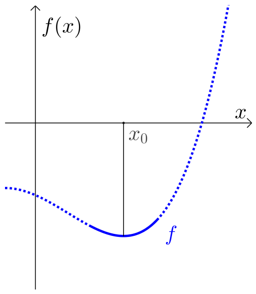
$$f'(x) = -\frac{9}{16} \cdot x^2 + \frac{63}{16} \cdot x - \frac{297}{64}$$

$$f''(x) = -\frac{9}{8} \cdot x + \frac{63}{16}$$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{63}{16} = \frac{9}{8} \cdot x \iff x = 3{,}5$$

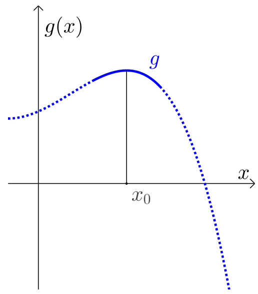
Der Anstieg ist an der Stelle $x = 3{,}5$ maximal.

Hinreichende Bedingung für Extremstellen



Im Bild links gilt $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ und $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$.
Dann wechselt f' das Vorzeichen von $-$ auf $+$.
Also hat $\boldsymbol{f}$ an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$ ein lokales Minimum.

Im Bild rechts gilt $\boldsymbol{g'(x_0) = 0}$ und $\boldsymbol{g''(x_0) < 0}$.
Dann wechselt g' das Vorzeichen von $+$ auf $-$.
Also hat $\boldsymbol{g}$ an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$ ein lokales Maximum.



Hinreichende Bedingung für Extremstellen

Die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \ln(x)$ ist für alle $x > 0$ definiert.

1) Zeige mit den Ableitungsregeln, dass $f'(x) = \ln(x) + 1$ und $f''(x) = \frac{1}{x}$ gilt.

2) Ermittle die Nullstelle von f'. Zeige mithilfe von f'', dass f dort ein lokales Minimum hat.

1) $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 \qquad$ (Produktregel)

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

2) $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1} = 0{,}367...$

$f''(e^{-1}) = e = 2{,}71... > 0$

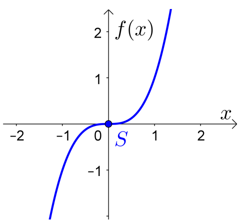
f hat also ein lokales Minimum an der Stelle $x = e^{-1}$.

Hinreichend, aber nicht notwendig

Für eine Funktion f gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$. Dann *kann* f an dieser Stelle x_0 ...

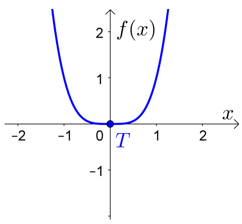
...einen Sattelpunkt haben:

$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f''(x) = 6 \cdot x$
$f'(0) = f''(0) = 0$



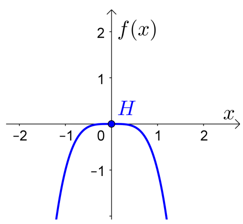
...einen Tiefpunkt haben:

$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4 \cdot x^3$
$f''(x) = 12 \cdot x^2$
$f'(0) = f''(0) = 0$



...einen Hochpunkt haben:

$f(x) = -x^4$
$f'(x) = -4 \cdot x^3$
$f''(x) = -12 \cdot x^2$
$f'(0) = f''(0) = 0$

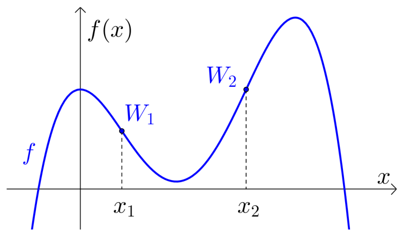


Höhere Ableitungen

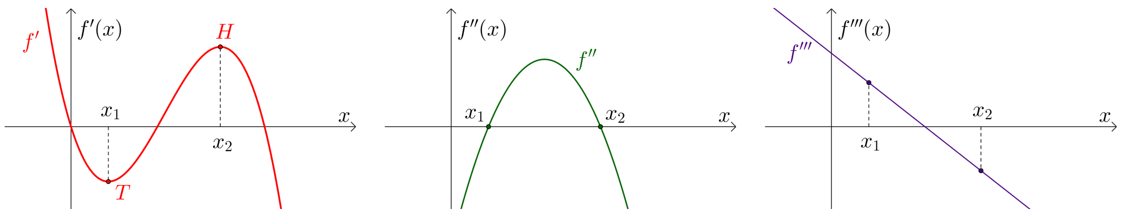
Wenn auch f'' differenzierbar ist, dann schreiben wir für deren Ableitung $\boldsymbol{f'''}$ und sprechen von der **3. Ableitung von $\boldsymbol{f}$**. Genauso können wir uns auch noch höhere Ableitungen einer Funktion ansehen. Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir dann aber zum Beispiel $f^{(42)}$ für die 42. Ableitung von f.

Hinreichende Bedingung für Wendestellen

Wenn $\boldsymbol{f''(x_1) = 0}$ und $\boldsymbol{f'''(x_1) > 0}$ gilt,
dann wechselt f'' an der Stelle x_1 das Vorzeichen von $-$ auf $+$.
Also ist $\boldsymbol{x_1}$ eine **Wendestelle von $\boldsymbol{f}$** und
das Krümmungsverhalten wechselt dort von auf .



Wenn $\boldsymbol{f''(x_2) = 0}$ und $\boldsymbol{f'''(x_2) < 0}$ gilt,
dann folgt genauso, dass f an der **Wendestelle $\boldsymbol{x_2}$**
das Krümmungsverhalten von auf wechselt.



Kurvenuntersuchung

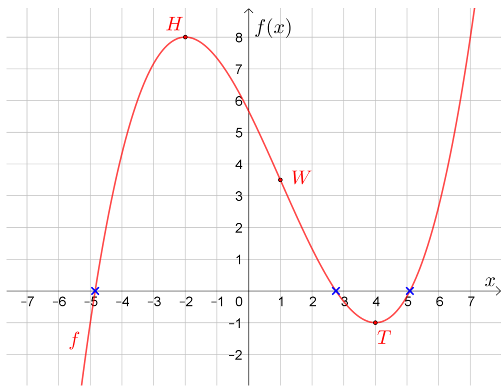
Für die Polynomfunktion f gilt: $f(x) = \dfrac{1}{12} \cdot x^3 - \dfrac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x + \dfrac{17}{3}$

1) Ermittle jeweils eine Funktionsgleichung von f', f'' und f'''.

2) Berechne die Extrempunkte von f.
Ermittle das Monotonieverhalten von f.

3) Berechne den Wendepunkt von f.
Ermittle das Krümmungsverhalten von f.

4) Rechts sind die 3 Nullstellen von f eingezeichnet.
Zeichne die Extrempunkte von f ein.
Zeichne den Wendepunkt von f ein.
Skizziere den Funktionsgraphen von f.



1) $f'(x) = \dfrac{1}{4} \cdot x^2 - \dfrac{1}{2} \cdot x - 2 \implies f''(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x - \dfrac{1}{2} \implies f'''(x) = \dfrac{1}{2}$

2) $f'(x) = 0 \iff x_1 = -2,\ x_2 = 4$

$f(-2) = 8,\ f''(-2) = -\frac{3}{2} < 0 \implies$ Hochpunkt: $H = (-2 \mid 8)$

$f(4) = -1,\ f''(4) = \frac{3}{2} > 0 \implies$ Tiefpunkt: $T = (4 \mid -1)$

Monotonieverhalten: $]-\infty; -2[\ \nearrow \quad]-2; 4[\ \searrow \quad]4; \infty[\ \nearrow$

3) $f''(x) = 0 \iff x = 1$

$f(1) = \frac{7}{2},\ f'''(1) = \frac{1}{2} > 0 \implies$ Wendepunkt: $W = (1 \mid \frac{7}{2})$ Krümmungswechsel von auf

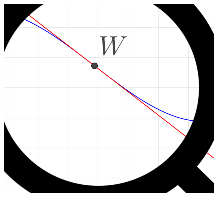
Krümmungsverhalten: $]-\infty; 1[$ $]1; \infty[$

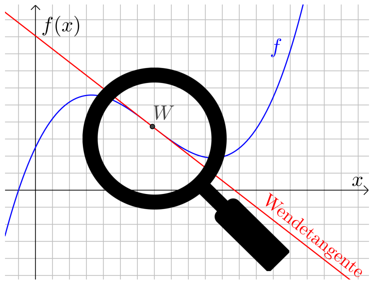
Wendetangente

Die Tangente in einem Wendepunkt nennen wir auch **Wendetangente**.

Die Wendetangente durchbohrt im Wendepunkt den Funktionsgraphen von f.

Lokal verläuft die Wendetangente auf der einen Seite oberhalb vom Funktionsgraphen von f und auf der anderen Seite unterhalb.

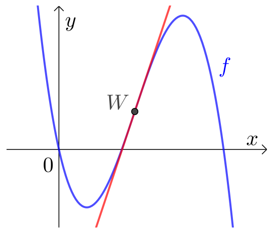




Wenn die Wendetangente waagrecht ist, dann ist der Wendepunkt gleichzeitig ein Sattelpunkt von f.

Wendetangente

Für die Polynomfunktion f gilt: $f(x) = -\frac{5}{32} \cdot x^3 + \frac{15}{8} \cdot x^2 - \frac{9}{2} \cdot x$



1) Berechne den Wendepunkt W.

2) Ermittle eine Gleichung der Wendetangente.

1) $f'(x) = -\frac{15}{32} \cdot x^2 + \frac{15}{4} \cdot x - \frac{9}{2} \implies f''(x) = -\frac{15}{16} \cdot x + \frac{15}{4}$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{15}{16} \cdot x = \frac{15}{4} \iff x = 4$$

$f(4) = 2 \implies W = (4 \mid 2)$

2) $y = k \cdot x + d$

$$k = f'(4) = 3$$

$$d = y - k \cdot x = 2 - 3 \cdot 4 = -10$$

Gleichung der Wendetangente: $y = 3 \cdot x - 10$

Funktionsgleichung von f'' $\rightsquigarrow$ Krümmungsverhalten von f

Für die zweite Ableitung einer Funktion f gilt: $f''(x) = x^2 \cdot (x - 5)$

1) Berechne die Nullstellen von f''.

$$f''(x) = 0 \iff x^2 \cdot (x-5) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = 5$$

2) Kreuze die zutreffenden Eigenschaften von f'' und f an.

	f''	f
$x < 0$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☒ < 0	☐ (+) ☒ (−)
$x = 0$	☒ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Wendepunkt ☒ kein Wendepunkt
$0 < x < 5$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☒ < 0	☐ (+) ☒ (−)
$x = 5$	☒ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☒ Wendepunkt ☐ kein Wendepunkt
$x > 5$	☐ $= 0$ ☒ > 0 ☐ < 0	☒ (+) ☐ (−)

Für die Funktion g gilt: $g(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

1) Wir haben die ersten beiden Ableitungen von g berechnet und faktorisiert: Rechne nach.

$$g'(x) = -(x+1)\cdot(x-1)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad g''(x) = (x+\sqrt{3})\cdot x\cdot(x-\sqrt{3})\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2) Berechne die Nullstelle von g und kreuze die zutreffenden Eigenschaften an.

$$g(x) = 0 \iff$$

$$x\cdot\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{>0} = 0 \iff x = 0$$

	g		
$x < 0$	☐ $= 0$	☐ > 0	☒ < 0
$x = 0$	☒ $= 0$	☐ > 0	☐ < 0
$x > 0$	☐ $= 0$	☒ > 0	☐ < 0

3) Berechne die Nullstellen von g' und kreuze die zutreffenden Eigenschaften an.

$$g'(x) = 0 \iff x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 1$$

	g'			g		
$x < -1$	☐ $= 0$	☐ > 0	☒ < 0	☐ ↗	☒ ↘	
$x = -1$	☒ $= 0$	☐ > 0	☐ < 0	☐ Hochpunkt	☒ Tiefpunkt	☐ Sattelpunkt
$-1 < x < 1$	☐ $= 0$	☒ > 0	☐ < 0	☒ ↗	☐ ↘	
$x = 1$	☒ $= 0$	☐ > 0	☐ < 0	☒ Hochpunkt	☐ Tiefpunkt	☐ Sattelpunkt
$x > 1$	☐ $= 0$	☐ > 0	☒ < 0	☐ ↗	☒ ↘	

4) Berechne die Nullstellen von g'' und kreuze die zutreffenden Eigenschaften an.

$$g''(x) = 0 \iff x = -\sqrt{3} \quad \text{oder} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{3}$$

	g''			g	
$x < -\sqrt{3}$	☐ $= 0$	☐ > 0	☒ < 0	☐ $\smile$ +	☒ $\frown$ −
$x = -\sqrt{3}$	☒ $= 0$	☐ > 0	☐ < 0	☒ Wendepunkt	☐ kein Wendepunkt
$-\sqrt{3} < x < 0$	☐ $= 0$	☒ > 0	☐ < 0	☒ $\smile$ +	☐ $\frown$ −
$x = 0$	☒ $= 0$	☐ > 0	☐ < 0	☒ Wendepunkt	☐ kein Wendepunkt
$0 < x < \sqrt{3}$	☐ $= 0$	☐ > 0	☒ < 0	☐ $\smile$ +	☒ $\frown$ −
$x = \sqrt{3}$	☒ $= 0$	☐ > 0	☐ < 0	☒ Wendepunkt	☐ kein Wendepunkt
$x > \sqrt{3}$	☐ $= 0$	☒ > 0	☐ < 0	☒ $\smile$ +	☐ $\frown$ −

5) Der Funktionsgraph von g ist unten dargestellt. Kontrolliere deine Ergebnisse von **2)**, **3)** und **4)**.