

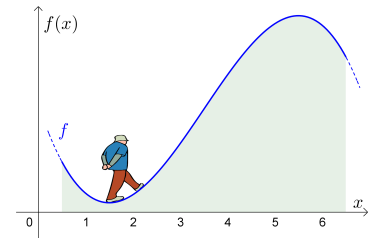
Maximale Steigung berechnen



MmF

Der dargestellte Funktionsgraph modelliert das Profil eines Hügels:

- Wo ist der tiefste Punkt?
- Wo ist der höchste Punkt?
- Wie misst man die Steigung in einem Punkt?
- Wo geht es am steilsten bergauf?



Am [Arbeitsblatt – Kurvenuntersuchungen I](#) und [Arbeitsblatt – Differentialquotient](#) beantworten wir die ersten drei Fragen. Auf diesem Arbeitsblatt beantworten wir die letzte Frage.

2. Ableitung



MmF

f' ist die **Ableitungsfunktion** von f . Wir sagen auch kurz: „ f' ist die Ableitung von f .“

Die Ableitung von f' – also $(f')'$ – heißt **2. Ableitung von f** . Wir schreiben dafür kurz f'' .

Monotonieverhalten von f'

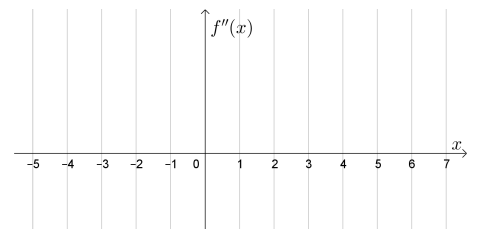
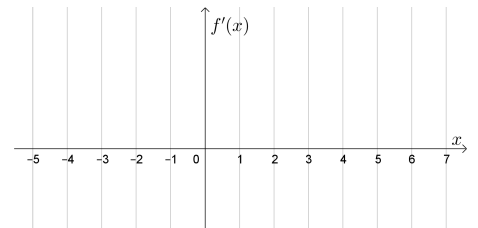
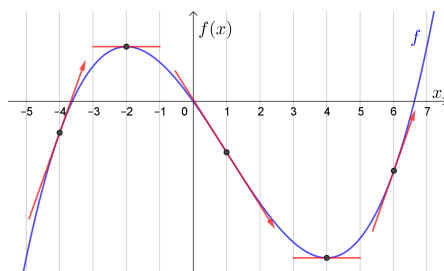


MmF

Das **Monotonieverhalten** der Funktion f können wir mithilfe des Vorzeichens von f' untersuchen.

Das Monotonieverhalten der Funktion f' können wir also mithilfe des Vorzeichens von f'' untersuchen.

Der Graph einer **kubischen** Funktion f ist dargestellt:



- 1) Skizziere den Graphen der **quadratischen** Funktion f' .

Wo sind die Nullstellen von f' ? Wo ist die Scheitelstelle?
Ist die Parabel nach unten oder nach oben geöffnet?

- 2) Skizziere den Graphen der **linearen** Funktion f'' .

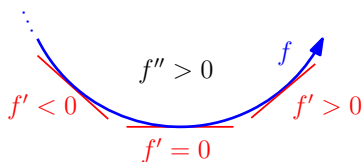
Krümmungsverhalten



MmF

Mithilfe der zweiten Ableitung f'' können wir das **Krümmungsverhalten von f** untersuchen:

- 1) Wenn $f''(x) > 0$ für alle Stellen x eines Intervalls gilt, dann ist f' streng monoton steigend in diesem Intervall. Die Steigung von f wird in diesem Intervall also immer größer.

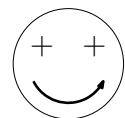


Wir sagen auch:

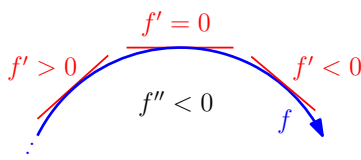
Der Graph von f ist **positiv gekrümmt**.

Der Graph von f ist **linksgekrümmt**.

Ist der Graph eine Straße in Vogelperspektive, dann fahren wir eine Linkskurve.



- 2) Wenn $f''(x) < 0$ für alle Stellen x eines Intervalls gilt, dann ist f' streng monoton fallend in diesem Intervall. Die Steigung von f wird in diesem Intervall also immer kleiner.




Wir sagen auch:

Der Graph von f ist **negativ gekrümmt**.

Der Graph von f ist **rechtsgekrümmt**.

Ist der Graph eine Straße in Vogelperspektive, dann fahren wir eine Rechtskurve.



Funktionsgraph von $f'' \rightsquigarrow$ Krümmungsverhalten von f 

Rechts ist der Graph einer 2. Ableitungsfunktion f'' dargestellt.
Wir untersuchen das Krümmungsverhalten von f .

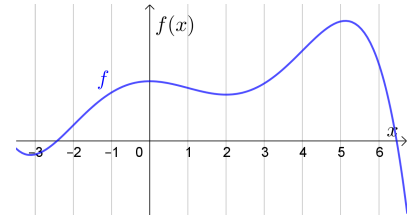
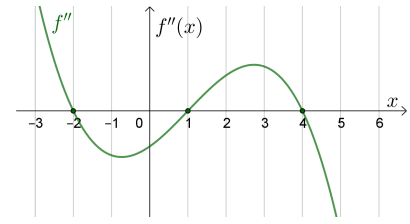
- 1) Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat die drei Lösungen , und .


Die Funktion f'' wechselt an diesen Stellen das Vorzeichen.

Die Funktion f wechselt an diesen Stellen ihr Krümmungsverhalten.

- 2) Rechts ist der Graph von f dargestellt. Zeichne am Graphen alle Punkte ein, in denen f das Krümmungsverhalten wechselt.
- 3) Trage in die Kästchen ein, ob f im angegebenen Intervall positiv gekrümmt (\cup) oder negativ gekrümmt (\cap) ist.

$]-\infty; -2[$ $]-2; 1[$ $]1; 4[$ $]4; \infty[$



Wendestellen & Wendepunkte 

Rechts sind der Graph einer Funktion f ,
der Graph ihrer Ableitungsfunktion f' und
der Graph ihrer 2. Ableitungsfunktion f'' dargestellt.

An den Stellen x_1 und x_2 wechselt die Funktion f'' das Vorzeichen.
Daraus folgt, dass ...

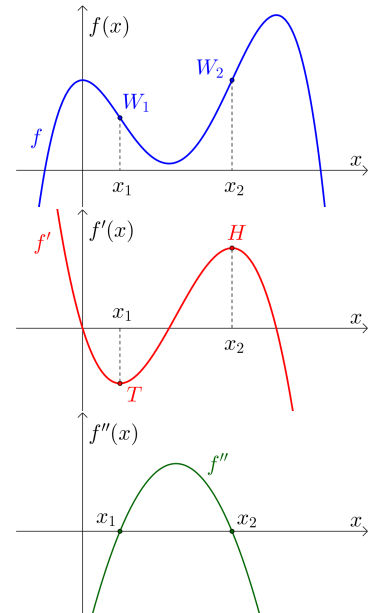
- ... die Funktion f' dort das Monotonieverhalten wechselt.
- ... die Funktion f dort das Krümmungsverhalten wechselt.


Diese Stellen x_1 und x_2 heißen **Wendestellen** von f .

Die zugehörigen Punkte W_1 und W_2 am Funktionsgraphen von f heißen **Wendepunkte** von f .

Im Punkt W_1 hat die Steigung von f ein lokales Minimum.
Lokal geht es dort also am steilsten bergab.

Im Punkt W_2 hat die Steigung von f ein lokales Maximum.
Lokal geht es dort also am steilsten bergauf.



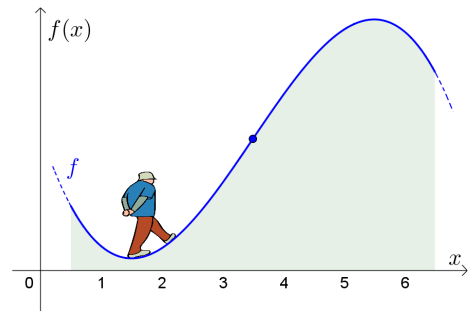
Maximale Steigung 

Die Funktion f mit

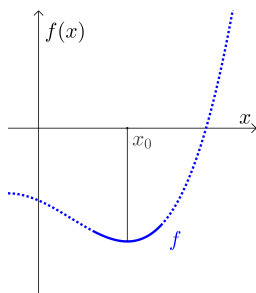
$$f(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^3 + \frac{63}{32} \cdot x^2 - \frac{297}{64} \cdot x + \frac{2217}{640}$$

modelliert das Profil rechts dargestellten Hügels.

Berechne jene Stelle, an der der Hügel am stärksten ansteigt.



Hinreichende Bedingung für Extremstellen



Im Bild links gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

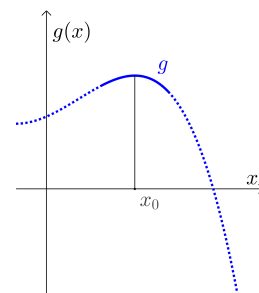
Dann wechselt f' das Vorzeichen von $-$ auf $+$.

Also hat f an der Stelle x_0 ein lokales _____.

Im Bild rechts gilt $g'(x_0) = 0$ und $g''(x_0) < 0$.

Dann wechselt g' das Vorzeichen von $+$ auf $-$.

Also hat g an der Stelle x_0 ein lokales _____.



Hinreichende Bedingung für Extremstellen



Die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \ln(x)$ ist für alle $x > 0$ definiert.

- 1) Zeige mit den **Ableitungsregeln**, dass $f'(x) = \ln(x) + 1$ und $f''(x) = \frac{1}{x}$ gilt.
- 2) Ermittle die Nullstelle von f' . Zeige mithilfe von f'' , dass f dort ein lokales Minimum hat.

Hinreichend, aber nicht notwendig



Für eine Funktion f gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$. Dann *kann* f an dieser Stelle x_0 ...

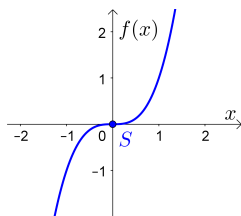
... einen **Sattelpunkt** haben:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \boxed{}$$

$$f''(x) = \boxed{}$$

$$f'(0) = f''(0) = \boxed{}$$



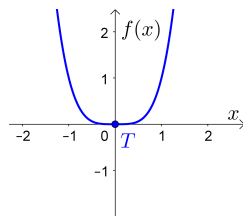
... einen **Tiefpunkt** haben:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = \boxed{}$$

$$f''(x) = \boxed{}$$

$$f'(0) = f''(0) = \boxed{}$$



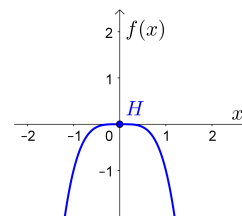
... einen **Hochpunkt** haben:

$$f(x) = -x^4$$

$$f'(x) = \boxed{}$$

$$f''(x) = \boxed{}$$

$$f'(0) = f''(0) = \boxed{}$$



Höhere Ableitungen



Wenn auch f'' **differenzierbar** ist, dann schreiben wir für deren Ableitung f''' und sprechen von der **3. Ableitung von f** . Genauso können wir uns auch noch höhere Ableitungen einer Funktion ansehen. Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir dann aber zum Beispiel $f^{(42)}$ für die 42. Ableitung von f .

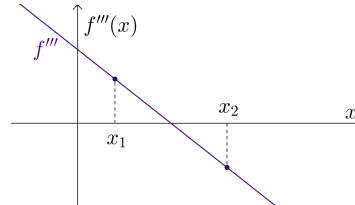
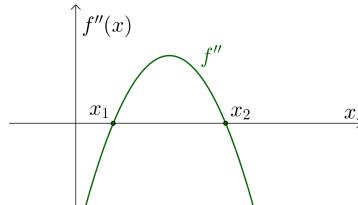
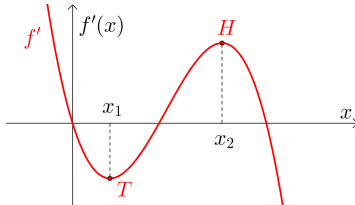
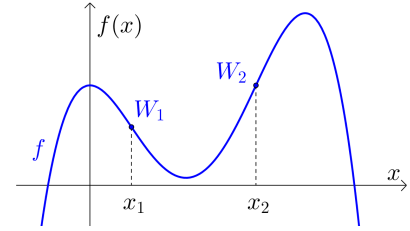
Hinreichende Bedingung für Wendestellen



Wenn $f''(x_1) = 0$ und $f'''(x_1) > 0$ gilt,
dann wechselt f'' an der Stelle x_1 das Vorzeichen von $-$ auf $+$.

Also ist x_1 eine **Wendestelle von f** und
das Krümmungsverhalten wechselt dort von \curvearrowright auf \curvearrowleft .

Wenn $f''(x_2) = 0$ und $f'''(x_2) < 0$ gilt,
dann folgt genauso, dass f an der **Wendestelle x_2**
das Krümmungsverhalten von \curvearrowleft auf \curvearrowright wechselt.

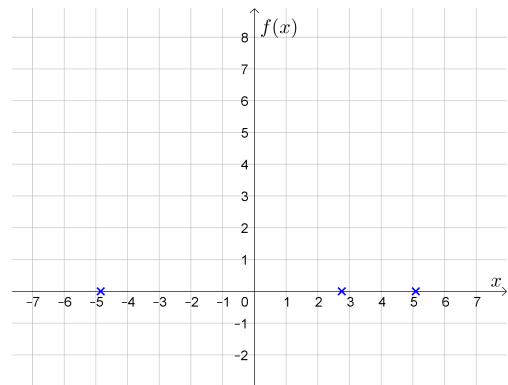


Kurvenuntersuchung



Für die **Polynomfunktion f** gilt: $f(x) = \frac{1}{12} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x + \frac{17}{3}$

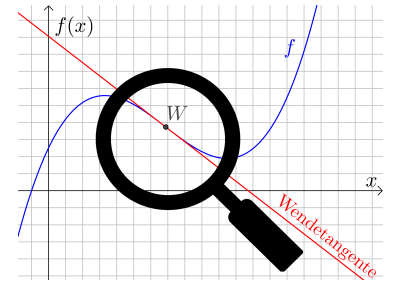
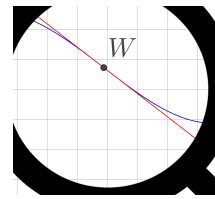
- 1) Ermittle jeweils eine Funktionsgleichung von f' , f'' und f''' .
- 2) Berechne die Extrempunkte von f .
Ermittle das Monotonieverhalten von f .
- 3) Berechne den Wendepunkt von f .
Ermittle das Krümmungsverhalten von f .
- 4) Rechts sind die 3 Nullstellen von f eingezeichnet.
Zeichne die Extrempunkte von f ein.
Zeichne den Wendepunkt von f ein.
Skizziere den Funktionsgraphen von f .



Die **Tangente** in einem Wendepunkt nennen wir auch **Wendetangente**.

Die Wendetangente durchbohrt im Wendepunkt den Funktionsgraphen von f .

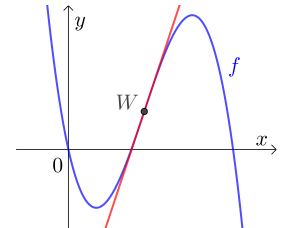
Lokal verläuft die Wendetangente auf der einen Seite oberhalb vom Funktionsgraphen von f und auf der anderen Seite unterhalb.



Wenn die Wendetangente waagrecht ist, dann ist der Wendepunkt gleichzeitig ein Sattelpunkt von f .

Für die Polynomfunktion f gilt: $f(x) = -\frac{5}{32} \cdot x^3 + \frac{15}{8} \cdot x^2 - \frac{9}{2} \cdot x$

- 1) Berechne den Wendepunkt W .
- 2) Ermittle eine Gleichung der Wendetangente.



Für die zweite Ableitung einer Funktion f gilt: $f''(x) = x^2 \cdot (x - 5)$

- 1) Berechne die Nullstellen von f'' .
- 2) Kreuze die zutreffenden Eigenschaften von f'' und f an.

	f''	f
$x < 0$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↗ <input type="checkbox"/> ↘
$x = 0$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> Wendepunkt <input type="checkbox"/> kein Wendepunkt
$0 < x < 5$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↗ <input type="checkbox"/> ↘
$x = 5$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> Wendepunkt <input type="checkbox"/> kein Wendepunkt
$x > 5$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↗ <input type="checkbox"/> ↘

Für die Funktion g gilt: $g(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

1) Wir haben die ersten beiden Ableitungen von g berechnet und faktorisiert: Rechne nach.

$$g'(x) = -(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad g''(x) = (x + \sqrt{3}) \cdot x \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2) Berechne die Nullstelle von g und kreuze die zutreffenden Eigenschaften an.

	g		
$x < 0$	<input type="checkbox"/> = 0	<input type="checkbox"/> > 0	<input type="checkbox"/> < 0
$x = 0$	<input type="checkbox"/> = 0	<input type="checkbox"/> > 0	<input type="checkbox"/> < 0
$x > 0$	<input type="checkbox"/> = 0	<input type="checkbox"/> > 0	<input type="checkbox"/> < 0

3) Berechne die Nullstellen von g' und kreuze die zutreffenden Eigenschaften an.

	g'	g
$x < -1$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↗ <input type="checkbox"/> ↘
$x = -1$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> Hochpunkt <input type="checkbox"/> Tiefpunkt <input type="checkbox"/> Sattelpunkt
$-1 < x < 1$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↗ <input type="checkbox"/> ↘
$x = 1$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> Hochpunkt <input type="checkbox"/> Tiefpunkt <input type="checkbox"/> Sattelpunkt
$x > 1$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↗ <input type="checkbox"/> ↘

4) Berechne die Nullstellen von g'' und kreuze die zutreffenden Eigenschaften an.

	g''	g
$x < -\sqrt{3}$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↪ <input type="checkbox"/> ↩
$x = -\sqrt{3}$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> Wendepunkt <input type="checkbox"/> kein Wendepunkt
$-\sqrt{3} < x < 0$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↪ <input type="checkbox"/> ↩
$x = 0$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> Wendepunkt <input type="checkbox"/> kein Wendepunkt
$0 < x < \sqrt{3}$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↪ <input type="checkbox"/> ↩
$x = \sqrt{3}$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> Wendepunkt <input type="checkbox"/> kein Wendepunkt
$x > \sqrt{3}$	<input type="checkbox"/> = 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> < 0	<input type="checkbox"/> ↪ <input type="checkbox"/> ↩

5) Der Funktionsgraph von g ist unten dargestellt. Kontrolliere deine Ergebnisse von 2), 3) und 4).

