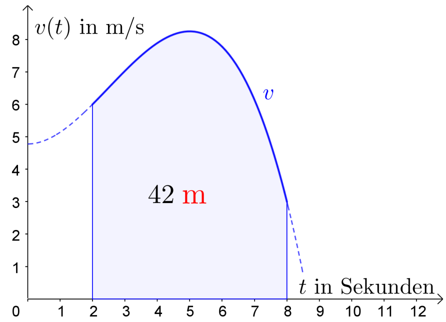
Mittlere Geschwindigkeit

Der Graph einer Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist dargestellt (t in Sekunden, $v(t)$ in m/s).



1) Welche Einheit hat $\int_2^8 v(t)\,\mathrm{d}t$?

Trage die Einheit in das Kästchen rechts ein.

2) Berechne die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[2; 8]$.

$$\frac{42\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{s}} = 7\,\mathrm{m/s}$$

3) Stelle mithilfe von v, a und b eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[a; b]$ auf.

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

Linearer Mittelwert m einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

Für den **linearen Mittelwert m** einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ gilt:

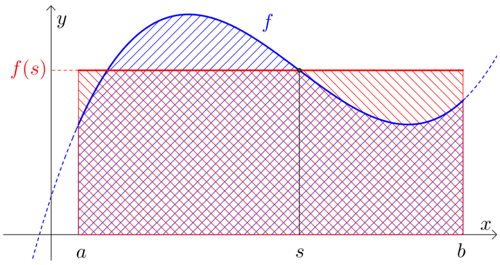
$$\boldsymbol{m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

m ist der „durchschnittliche Funktionswert“ von f in $[a; b]$.

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Der **Mittelwertsatz der Integralrechnung** garantiert (mindestens) eine Stelle s im Intervall $[a; b]$, für die gilt:

$$\boldsymbol{f(s) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

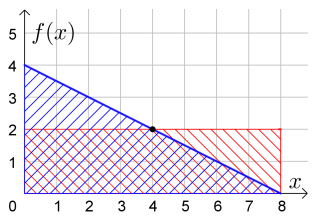


$f(s)$ ist der „durchschnittliche Funktionswert“ von f in $[a; b]$.

Die rote Fläche (▧) hat also den gleichen Inhalt wie die blaue Fläche (▨).

Lineare Funktion

Ermittle den linearen Mittelwert m der dargestellten linearen Funktion f in $[0; 8]$.



$$\int_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

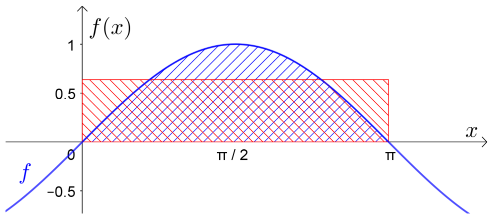
$$\Longrightarrow \quad m = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$$

Sinusfunktion

Ermittle den linearen Mittelwert m der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ in $[0; \pi]$.

$$\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = (-\cos(x))\Big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2$$

$$\Longrightarrow \quad m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} = 0{,}636\ldots$$

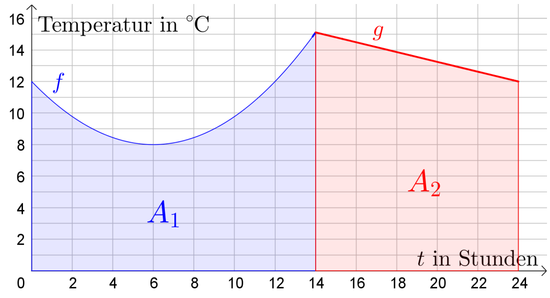


Mittlere Temperatur

Der Temperaturverlauf an einem Tag wird durch zwei Funktionen f und g modelliert:

$$f(t) = \frac{1}{9}\cdot t^2 - \frac{4}{3}\cdot t + 12 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 14$$

$$g(t) = -\frac{14}{45}\cdot t + \frac{292}{15} \qquad \text{mit } 14 \leq t \leq 24$$



Berechne die mittlere Temperatur im Zeitintervall ...

i) $[0\,\text{h}; 14\,\text{h}]$. **ii)** $[14\,\text{h}; 24\,\text{h}]$. **iii)** $[0\,\text{h}; 24\,\text{h}]$.

$$A_1 = \int_0^{14} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{27}\cdot t^3 - \frac{2}{3}\cdot t^2 + 12\cdot t\,\Big|_0^{14} = 138{,}96...$$

$$A_2 = \int_{14}^{24} g(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{7}{45}\cdot t^2 + \frac{292}{15}\cdot t\,\Big|_{14}^{24} = 377{,}6 - 242{,}04... = 135{,}55...$$

i) $\frac{1}{14}\cdot A_1 = 9{,}92...\,°\text{C}$

ii) $\frac{1}{10}\cdot A_2 = 13{,}55...\,°\text{C}$

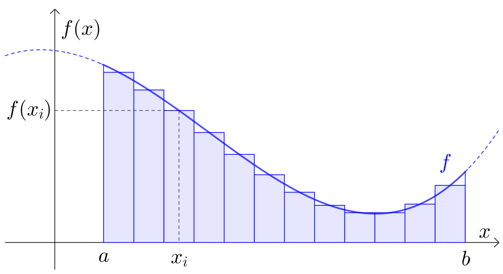
iii) $\frac{1}{24}\cdot (A_1 + A_2) = 11{,}43...\,°\text{C}$

Warum ist das Ergebnis von **iii)** *nicht* das arithmetische Mittel der Ergebnisse von **i)** und **ii)**?

Die beiden Intervalle haben verschiedene Längen (14 Stunden bzw. 10 Stunden).

Richtig wäre das *gewichtete* arithmetische Mittel: $\frac{14}{24}\cdot \textbf{i)} + \frac{10}{24}\cdot \textbf{ii)}$

Annäherung mit Zwischensummen



Wir teilen das Intervall $[a; b]$ in n Teile mit gleicher Breite.

In jedem Teilintervall wählen wir eine Stelle x_i. $i = 1, 2, \ldots, n$

Das arithmetische Mittel

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

ist eine Annäherung an den „durchschnittlichen Funktionswert“ der Funktion f in $[a; b]$.

Nähern wir das bestimmte Integral durch die dargestellte Zwischensumme an, erhalten wir ebenso:

$$\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\cdot[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$