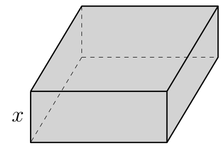
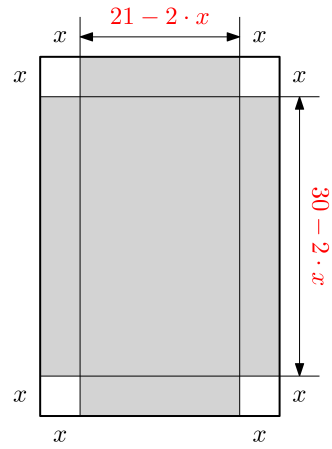
Volumen einer Schachtel maximieren

Aus einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen $a = 21\,\text{cm}$ und $b = 30\,\text{cm}$ wollen wir eine oben offene Schachtel mit möglichst großem Volumen falten.

Dazu schneiden wir von den 4 Ecken jeweils ein Quadrat mit x cm Seitenlänge ab.



1) Trage mithilfe von x die Längen im Bild rechts ein.



2) Für welche Werte von x können wir eine Schachtel falten?

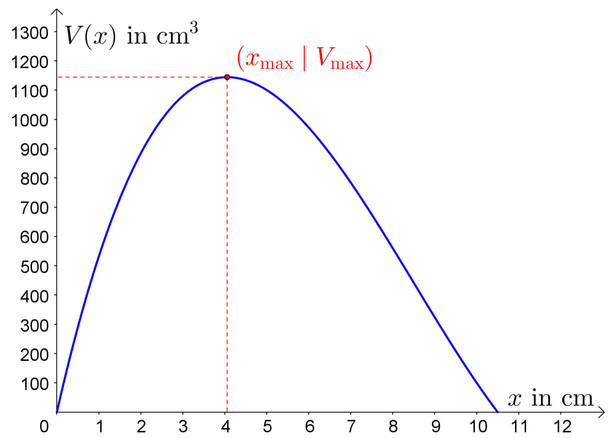
$$0 < x < 10{,}5$$

3) Das Volumen V der Schachtel hängt von x ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion V auf.

$$V(x) = (21 - 2 \cdot x) \cdot (30 - 2 \cdot x) \cdot x$$

$x \ldots$ Länge in cm
$V(x) \ldots$ Volumen der Schachtel in cm^3

Rechts ist der Graph der Funktion V dargestellt.
Wir möchten x so wählen, dass das Volumen so groß wie möglich ist.



4) Zeichne den Hochpunkt von V rechts ein.
Verschiebe dazu ein Geodreieck parallel zur x-Achse.

Lies seine Koordinaten näherungsweise ab.

$$x_{\max} \approx 4\,\text{cm}$$

$$V_{\max} \approx 1150\,\text{cm}^3$$

5) Berechne $x_{\max}$ und $V_{\max}$ mithilfe der Differentialrechnung.

$$\begin{aligned} V(x) &= (21 - 2 \cdot x) \cdot (30 \cdot x - 2 \cdot x^2) = \\ &= 630 \cdot x - 42 \cdot x^2 - 60 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 = \\ &= 4 \cdot x^3 - 102 \cdot x^2 + 630 \cdot x \end{aligned}$$

$$\implies \quad V'(x) = 12 \cdot x^2 - 204 \cdot x + 630$$

$$V'(x) = 0 \iff 12 \cdot x^2 - 204 \cdot x + 630 = 0 \iff x = 4{,}055\ldots \text{ oder } (x = 12{,}94\ldots)$$

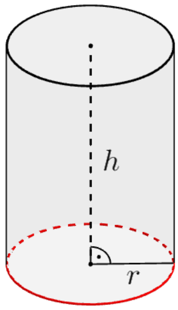
$$V(0) = 0$$

$$V(4{,}055\ldots) = 1144{,}1\ldots \implies x_{\max} = 4{,}055\ldots\,\text{cm} \qquad V_{\max} = 1144{,}1\ldots\,\text{cm}^3$$

$$V(10{,}5) = 0$$

Oberfläche eines Drehzylinders minimieren

Rechts ist ein Drehzylinder mit dem Radius r und der Höhe h dargestellt.



1) Stelle mithilfe von r und h eine Formel für sein Volumen V auf.

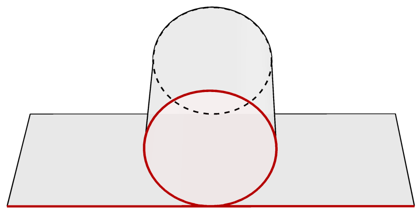
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Es gibt Drehzylinder mit *verschiedenen* Abmessungen, aber *gleichem* Volumen.

2) Wenn der Radius verdoppelt wird, aber das Volumen gleich bleiben soll, dann muss die Höhe auf $\frac{1}{4}$ von h verkleinert werden.

Wir wollen eine Konservendose in der Form eines Drehzylinders mit Volumen $V = 500\,\text{cm}^3$ herstellen. Die Oberfläche (Materialkosten) soll dabei so klein wie möglich sein.

3) Stelle jeweils mithilfe von r und h einen richtigen Term auf:



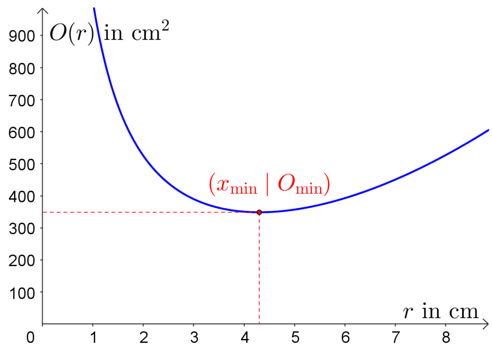
Der abgerollte Mantel ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $2 \cdot \pi \cdot r$ und h.

Für die Oberfläche O des Drehzylinders gilt also:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

4) Das Volumen $V = 500\,\text{cm}^3$ ist konstant.
Stelle mithilfe von $r > 0$ eine Formel für h auf.

$$h = \frac{500}{\pi \cdot r^2} \qquad \text{(Nebenbedingung)}$$



5) Die Oberfläche O des Drehzylinders hängt von r ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion O auf.

$$O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{1000}{r}$$

Rechts oben ist der Graph der Funktion O dargestellt.

6) Zeichne den Tiefpunkt von O rechts oben ein. Lies seine Koordinaten näherungsweise ab.

$$r_{\min} \approx 4{,}3\,\text{cm} \qquad O_{\min} \approx 350\,\text{cm}^3$$

7) Berechne die Abmessungen des optimalen Drehzylinders mithilfe der Differentialrechnung.

$$O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 1000 \cdot r^{-1} \implies O'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - 1000 \cdot r^{-2}$$

$$O'(r) = 0 \iff 4 \cdot \pi \cdot r = \frac{1000}{r^2} \iff r^3 = \frac{1000}{4 \cdot \pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4 \cdot \pi}} = 4{,}301\ldots\,\text{cm}$$

Die Funktion O ist wegen $O''(r) = 4 \cdot \pi + 2000 \cdot r^{-3} > 0$ überall positiv gekrümmt.

Also ist $O(4{,}301\ldots\,\text{cm}) = 348{,}7\ldots\,\text{cm}^3$ ein globales Minimum.

Für die Höhe dieses Drehzylinders gilt: $h = \dfrac{500}{\pi \cdot 4{,}301\ldots^2} = 8{,}602\ldots\,\text{cm} \quad (= 2 \cdot r)$

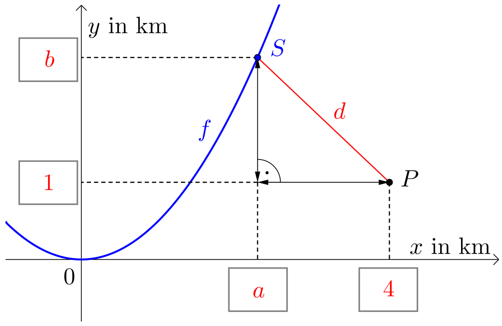
Allgemein ist die Oberfläche eines Drehzylinders mit fixem Volumen dann minimal, wenn Höhe und Durchmesser gleich lang sind.

Minimaler Abstand: Funktionsgraph ↔ Punkt

Ein Raumschiff fliegt entlang des Funktionsgraphen von f mit $f(x) = \frac{x^2}{2}$. (Koordinaten in km)

In welchem Punkt seiner Flugbahn ist es dem Planeten im Punkt $P = (4 \mid 1)$ am nächsten?

Am rechts unten dargestellten Funktionsgraphen ist ein beliebiger Punkt $S = (a \mid b)$ eingezeichnet.



1) Stelle mithilfe von a und b eine Formel für den Abstand d zwischen den Punkten S und P auf.

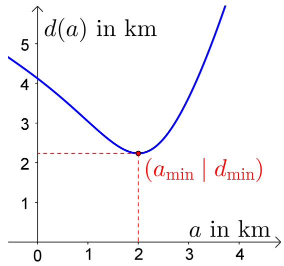
$$d = \sqrt{(4-a)^2 + (b-1)^2}$$

2) Für jeden Punkt $S = (a \mid b)$ auf der Flugbahn gilt:

$$b = f(a) = \frac{a^2}{2}$$ (Nebenbedingung)

3) Der Abstand d zwischen $S = (a \mid f(a))$ und $P = (4 \mid 1)$ hängt von a ab. Stelle eine Gleichung dieser Funktion d auf.

$$d(a) = \sqrt{(4-a)^2 + \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)^2}$$



Rechts ist der Graph der Funktion d dargestellt.

4) Zeichne den Tiefpunkt von d rechts oben ein. Lies seine Koordinaten näherungsweise ab.

$a_{\text{min}} \approx 2\,\text{km}$ $\quad d_{\text{min}} \approx 2{,}2\,\text{km}$

5) Berechne a_{min} und d_{min} mithilfe der Differentialrechnung.

Hinweis: Die Wurzelfunktion ☺ $\mapsto \sqrt{☺}$ ist streng monoton steigend: Je größer ☺ ist, desto größer ist $\sqrt{☺}$.
Also ist $d(a) = \sqrt{g(a)}$ mit $g(a) \geq 0$ genau dann minimal, wenn $g(a)$ minimal ist.

$$g(a) = (4-a)^2 + \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)^2 = 16 - 8 \cdot a + a^2 + \frac{a^4}{4} - a^2 + 1 = \frac{a^4}{4} - 8 \cdot a + 17$$

$$\implies g'(a) = a^3 - 8$$

$$g'(a) = 0 \iff a^3 = 8 \iff a = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\implies a_{\text{min}} = 2\,\text{km}$$

$$\implies d_{\text{min}} = d(2) = 2{,}236\ldots\,\text{km}$$

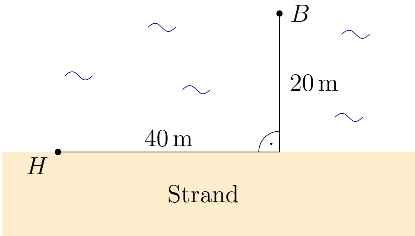
Wegen $g''(a) = 3 \cdot a^2$ und damit $g''(2) = 12 > 0$ hat die Funktion g an der Stelle $a = 2$ ein lokales Minimum.
Also hat auch die Funktion d an der Stelle $a = 2$ ein lokales Minimum. Da die Funktion d an allen Stellen $a \in \mathbb{R}$ definiert und stetig ist und keine weiteren Extremstellen hat, ist es auch ein globales Minimum.

Minimaler Zeitaufwand: Hund → Ball

Der Hund *Elvis* steht am Ufer und möchte auf schnellstem Weg einen Ball im Wasser erreichen.
An Land läuft Elvis mit der konstanten Geschwindigkeit $v_L = 3\,\text{m/s}$.
Im Wasser schwimmt Elvis mit der konstanten Geschwindigkeit $v_W = 1\,\text{m/s}$.

1) Wie lang braucht Elvis auf direktem Weg durch das Wasser?

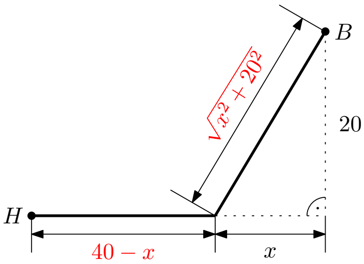
$$t = \frac{s}{v_W} = \frac{\sqrt{40^2 + 20^2}}{1} = 44{,}72\ldots\,\text{s}$$



2) Wie lang braucht Elvis zum Ball, wenn der Weg durch das Wasser so kurz wie möglich sein soll?

$$t_L + t_W = \frac{s_L}{v_L} + \frac{s_W}{v_W} = \frac{40}{3} + \frac{20}{1} = 33{,}33\ldots\,\text{s}$$

Ein Mathematiker hat festgestellt, dass sein Hund Elvis intuitiv bessere Wege wählt. Ein solcher Weg ist rechts dargestellt.



3) Trage mithilfe von x die Längen im Bild rechts ein.

Die Randwerte $x = 40$ und $x = 0$ haben wir in **1)** und **2)** berechnet.
Der optimale Wert für x, bei dem die benötigte Zeit minimal ist, liegt dazwischen.

4) Wie lang läuft Elvis am Strand? Stelle mithilfe von x eine Formel für diese Zeit t_L auf.

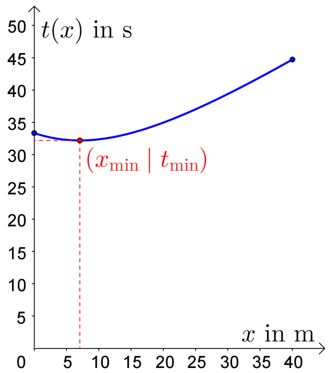
$$t_L = \frac{s_L}{v_L} = \frac{40 - x}{3}$$

Wie lang schwimmt Elvis im Wasser? Stelle mithilfe von x eine Formel für diese Zeit t_W auf.

$$t_W = \frac{s_W}{v_W} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{1} = \sqrt{x^2 + 400}$$

5) Die von Elvis insgesamt benötigte Zeit t hängt von x ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion t auf.

$$t(x) = \frac{40 - x}{3} + \sqrt{x^2 + 400}$$



Im Bild rechts siehst du den Graphen der Funktion t.
Findest du deine Ergebnisse aus **1)** und **2)** wieder?

Elvis möchte x so wählen, dass die Gesamtzeit so klein wie möglich ist.
Der optimale Wert für x ist $x_{\min} = \sqrt{50} = 7{,}07\ldots\,\text{m}$.

Rechne das mithilfe der Differentialrechnung und den Ableitungsregeln nach.

6) Um wie viel Prozent weniger Zeit benötigt Elvis auf dem optimalen Weg als auf direktem Weg?

$$t_{\min} = t(\sqrt{50}) = 32{,}18\ldots\,\text{s}$$

$$\frac{t_{\min}}{44{,}72\ldots} = 0{,}7197\ldots = 71{,}97\ldots\,\%$$

$$100\,\% - 71{,}97\ldots\,\% = 28{,}02\ldots\,\%$$

Elvis benötigt auf dem optimalen Weg um 28,02... % weniger Zeit als auf direktem Weg.