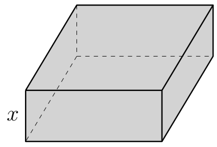
**Volumen einer Schachtel maximieren**

Aus einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen $a = 21$ cm und $b = 30$ cm wollen wir eine oben offene Schachtel mit möglichst großem Volumen falten.

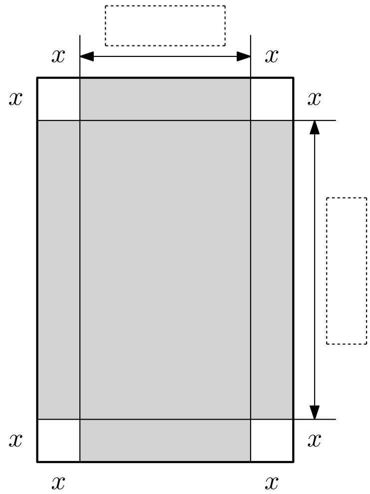
Dazu schneiden wir von den 4 Ecken jeweils ein Quadrat mit $x$ cm Seitenlänge ab.




**1)** Trage mithilfe von $x$ die Längen im Bild rechts ein.

**2)** Für welche Werte von $x$ können wir eine Schachtel falten?

$\boxed{\phantom{xxx}} < x < \boxed{\phantom{xxx}}$



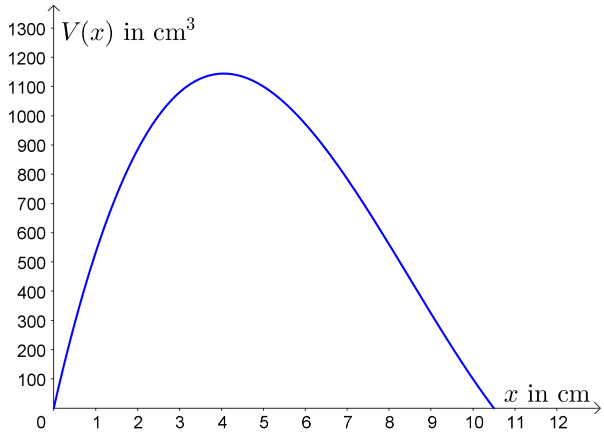

**3)** Das Volumen $V$ der Schachtel hängt von $x$ ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion $V$ auf.

$V(x) = \boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxx}}$

$x$ … Länge in cm
$V(x)$ … Volumen der Schachtel in cm$^3$

Rechts ist der Graph der Funktion $V$ dargestellt.

Wir möchten $x$ so wählen, dass das Volumen so groß wie möglich ist.




**4)** Zeichne den Hochpunkt von $V$ rechts ein.
Verschiebe dazu ein Geodreieck parallel zur $x$-Achse.

Lies seine Koordinaten näherungsweise ab.

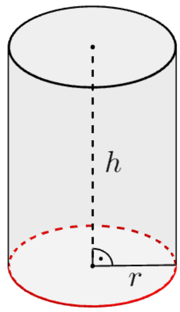
$x_{\max} \approx \boxed{\phantom{xxxx}}$

$V_{\max} \approx \boxed{\phantom{xxxx}}$

**5)** Berechne $x_{\max}$ und $V_{\max}$ mithilfe der Differentialrechnung.

**Oberfläche eines Drehzylinders minimieren**

Rechts ist ein Drehzylinder mit dem Radius $r$ und der Höhe $h$ dargestellt.




**1)** Stelle mithilfe von $r$ und $h$ eine Formel für sein Volumen $V$ auf.

$V =$ ______

Es gibt Drehzylinder mit *verschiedenen* Abmessungen, aber *gleichem* Volumen.

**2)** Wenn der Radius verdoppelt wird, aber das Volumen gleich bleiben soll, dann muss die Höhe auf $\frac{\square}{\square}$ von $h$ verkleinert werden.

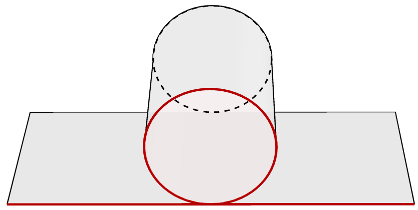
Wir wollen eine Konservendose in der Form eines Drehzylinders mit Volumen $V = 500\,\text{cm}^3$ herstellen. Die Oberfläche (Materialkosten) soll dabei so klein wie möglich sein.

**3)** Stelle jeweils mithilfe von $r$ und $h$ einen richtigen Term auf:

Der abgerollte Mantel ist ein Rechteck mit den Seitenlängen ______ und ______.

Für die Oberfläche $O$ des Drehzylinders gilt also:

$O =$ ______

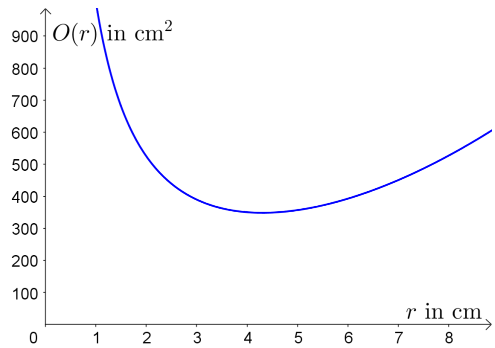


**4)** Das Volumen $V = 500\,\text{cm}^3$ ist konstant.
Stelle mithilfe von $r > 0$ eine Formel für $h$ auf.

$h =$ ______ (Nebenbedingung)

**5)** Die Oberfläche $O$ des Drehzylinders hängt von $r$ ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion $O$ auf.

$O(r) =$ ______




Rechts oben ist der Graph der Funktion $O$ dargestellt.

**6)** Zeichne den Tiefpunkt von $O$ rechts oben ein. Lies seine Koordinaten näherungsweise ab.

$r_{\text{min}} \approx$ ______ $O_{\text{min}} \approx$ ______

**7)** Berechne die Abmessungen des optimalen Drehzylinders mithilfe der Differentialrechnung.

Allgemein ist die Oberfläche eines Drehzylinders mit fixem Volumen dann minimal, wenn Höhe und Durchmesser gleich lang sind.

**Minimaler Abstand: Funktionsgraph ↔ Punkt**

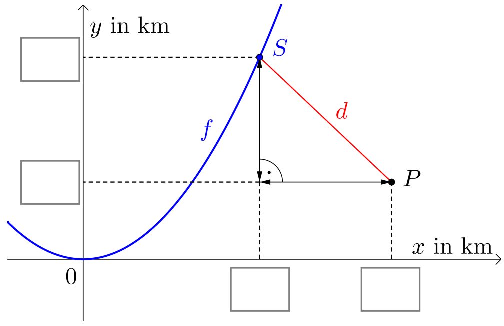
Ein Raumschiff fliegt entlang des Funktionsgraphen von $f$ mit $f(x) = \frac{x^2}{2}$. (Koordinaten in km)

In welchem Punkt seiner Flugbahn ist es dem Planeten im Punkt $P = (4 \mid 1)$ am nächsten?

Am rechts unten dargestellten Funktionsgraphen ist ein beliebiger Punkt $S = (a \mid b)$ eingezeichnet.

**1)** Stelle mithilfe von $a$ und $b$ eine Formel für den Abstand $d$ zwischen den Punkten $S$ und $P$ auf.

$d =$ ☐

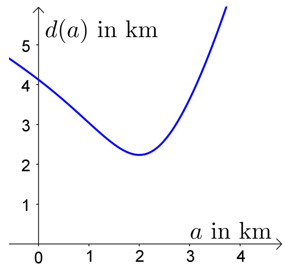



**2)** Für jeden Punkt $S = (a \mid b)$ auf der Flugbahn gilt:

$b = f(a) =$ ☐ (Nebenbedingung)

**3)** Der Abstand $d$ zwischen $S = (a \mid f(a))$ und $P = (4 \mid 1)$ hängt von $a$ ab. Stelle eine Gleichung dieser Funktion $d$ auf.

$d(a) =$ ☐




Rechts ist der Graph der Funktion $d$ dargestellt.

**4)** Zeichne den Tiefpunkt von $d$ rechts oben ein. Lies seine Koordinaten näherungsweise ab.

$a_{\text{min}} \approx$ ☐ $d_{\text{min}} \approx$ ☐

**5)** Berechne $a_{\text{min}}$ und $d_{\text{min}}$ mithilfe der Differentialrechnung.

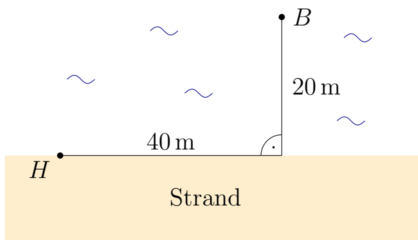
Hinweis: Die Wurzelfunktion $☺ \mapsto \sqrt{☺}$ ist streng monoton steigend: Je größer ☺ ist, desto größer ist $\sqrt{☺}$.
Also ist $d(a) = \sqrt{g(a)}$ mit $g(a) \geq 0$ genau dann minimal, wenn $g(a)$ minimal ist.

**Minimaler Zeitaufwand: Hund → Ball**

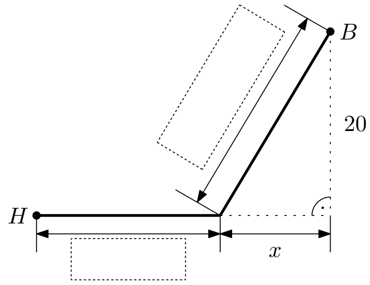
Der Hund *Elvis* steht am Ufer und möchte auf schnellstem Weg einen Ball im Wasser erreichen.
An Land läuft Elvis mit der konstanten Geschwindigkeit $v_L = 3\,\text{m/s}$.
Im Wasser schwimmt Elvis mit der konstanten Geschwindigkeit $v_W = 1\,\text{m/s}$.

**1)** Wie lang braucht Elvis auf direktem Weg durch das Wasser?

**2)** Wie lang braucht Elvis zum Ball, wenn der Weg durch das Wasser so kurz wie möglich sein soll?




Ein Mathematiker hat festgestellt, dass sein Hund Elvis intuitiv bessere Wege wählt. Ein solcher Weg ist rechts dargestellt.




**3)** Trage mithilfe von $x$ die Längen im Bild rechts ein.

Die Randwerte $x = 40$ und $x = 0$ haben wir in **1)** und **2)** berechnet.
Der optimale Wert für $x$, bei dem die benötigte Zeit minimal ist, liegt dazwischen.

**4)** Wie lang läuft Elvis am Strand? Stelle mithilfe von $x$ eine Formel für diese Zeit $t_L$ auf.

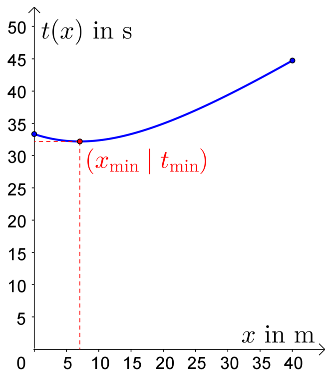
$t_L =$

Wie lang schwimmt Elvis im Wasser? Stelle mithilfe von $x$ eine Formel für diese Zeit $t_W$ auf.

$t_W =$

**5)** Die von Elvis insgesamt benötigte Zeit $t$ hängt von $x$ ab.
Stelle eine Gleichung dieser Funktion $t$ auf.

$t(x) =$




Im Bild rechts siehst du den Graphen der Funktion $t$.
Findest du deine Ergebnisse aus **1)** und **2)** wieder?

Elvis möchte $x$ so wählen, dass die Gesamtzeit so klein wie möglich ist.
Der optimale Wert für $x$ ist $x_{\text{min}} = \sqrt{50} = 7{,}07\ldots\,\text{m}$.

Rechne das mithilfe der Differentialrechnung und den Ableitungsregeln nach.

**6)** Um wie viel Prozent weniger Zeit benötigt Elvis auf dem optimalen Weg als auf direktem Weg?