Parameterdarstellung von Geraden im Raum MmF

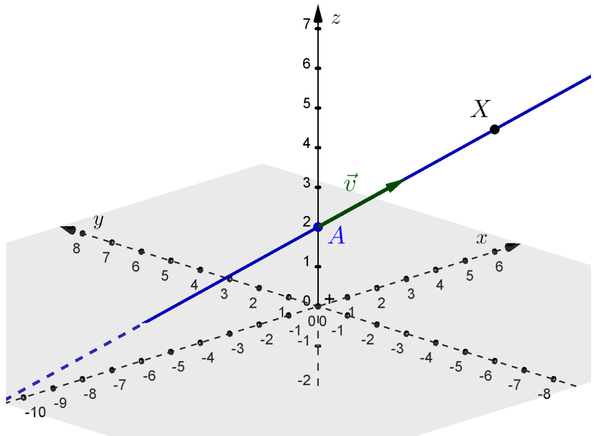
Die Gerade g verläuft durch den Punkt A, und $\vec{v}$ ist ein Richtungsvektor der Gerade. Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt

$$X = A + t \cdot \vec{v}$$

auf der Gerade.
Die Zahl $\boldsymbol{t}$ nennen wir **Parameter** und

$$\boldsymbol{g\colon X = A + t \cdot \vec{v}}$$

eine **Parameterdarstellung** der Gerade g.



Jeder Punkt X auf der Gerade *entspricht genau einem* Wert des Parameters $t \in \mathbb{R}$.

Gerade durch zwei Punkte MmF

Ermittle eine Parameterdarstellung der Gerade durch die Punkte $A = (3 \mid -2 \mid 4)$ und $B = (5 \mid 1 \mid 0)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-(-2) \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt auf Gerade? MmF

Gegeben ist eine Parameterdarstellung der Gerade $h\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Liegt der Punkt $P = (4 \mid -7 \mid 1)$ auf der Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad 4 = 2 + t \cdot (-1) &&\iff t = -2 \\ \text{II:}&\quad -7 = -1 + t \cdot 3 &&\iff t = -2 \\ \text{III:}&\quad 1 = 3 + t \cdot 1 &&\iff t = -2 \end{aligned}$$

Der Punkt P liegt also auf der Gerade h.
Der Parameterwert $t = -2$ liefert diesen Punkt P.

Liegt der Punkt $Q = (-1 \mid 8 \mid 5)$ auf der Gerade?
Die Frage ist, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad -1 = 2 + t \cdot (-1) &&\iff t = 3 \\ \text{II:}&\quad 8 = -1 + t \cdot 3 &&\iff t = 3 \\ \text{III:}&\quad 5 = 3 + t \cdot 1 &&\iff t = 2 \end{aligned}$$

Der Punkt Q liegt also *nicht* auf der Gerade h.
Es gibt keine Zahl $t \in \mathbb{R}$, die *alle drei* Gleichungen erfüllt.

Punkt auf Gerade MmF

Berechne a und b so, dass die Gerade $g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ den Punkt $P = (4 \mid 2 \mid 0)$ enthält.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I:}&\ 4 = 1 + t \cdot b &&\iff b = \frac{3}{t} \overset{\text{II}}{\iff} b = -2 \\ \text{II:}&\ 2 = 5 + t \cdot 2 &&\iff t = -\frac{3}{2} \\ \text{III:}&\ 0 = a + t \cdot (-4) &&\iff a = 4 \cdot t \overset{\text{II}}{\iff} a = -6 \end{aligned}$$

Lagebeziehung zweier Geraden im Raum

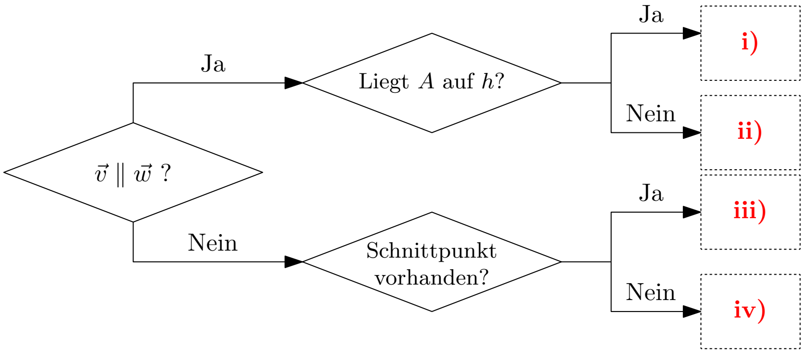
Zwei Geraden im Raum haben genau eine der vier folgenden Lagebeziehungen:

i) ident **ii)** parallel (aber nicht ident) **iii)** schneidend (aber nicht ident) **iv)** windschief

Erkläre, wie du die Lagebeziehung zweier Geraden g und h aus den Parameterdarstellungen

$$g\colon X = A + t \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad h\colon X = B + u \cdot \vec{w}$$

ermitteln kannst. Trage dazu die 4 Lagebeziehungen **i)**, **ii)**, **iii)** bzw. **iv)** richtig in die Kästchen ein:



i) oder ii) ?

Welche Lage haben die Geraden $g\colon X = \begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ und $h\colon X = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}$ zueinander?

$\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix} = -1{,}5 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix} \implies$ g und h sind ident oder echt parallel.

Liegt der Punkt $(4 \mid 2 \mid -2)$ auf h?

$$\begin{aligned}
\text{I:}\quad & 4 = 3 + u \cdot (-3) && \iff && u = -\frac{1}{3}\\
\text{II:}\quad & 2 = u \cdot (-6) && \iff && u = -\frac{1}{3}\\
\text{III:}\quad & -2 = -2 + u \cdot 3 && \iff && u = 0 \quad ↯
\end{aligned}$$

Der Punkt $(4 \mid 2 \mid -2)$ liegt also nicht auf h. Die Geraden g und h sind also echt parallel.

iii) oder iv) ?

Welche Lage haben die Geraden $g\colon X = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$ und $h\colon X = \begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ zueinander?

$\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \implies$ g und h sind schneidend oder windschief.

Gibt es einen Schnittpunkt?

$$\begin{aligned}
\text{I:}\quad & 2 + t \cdot 5 = -5 + u \cdot 1 && \iff && u = 7 + 5 \cdot t = -2\\
\text{II:}\quad & 2 + t \cdot (-2) = 4 && \iff && t = -1\\
\text{III:}\quad & 4 + t \cdot 3 = 2 + u \cdot (-2) && \iff && u = \frac{2 + 3 \cdot t}{-2} = \frac{1}{2} \quad ↯
\end{aligned}$$

Es gibt keine Zahlen t und u, die alle 3 Gleichungen lösen.
Die Geraden g und h haben also keinen Schnittpunkt. Sie sind zueinander windschief.